L'archetipo della logica algebrica

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

(BI)	$A + B = B + A,$
(BII)	$A + (B + C) = (A + B) + C,$
(BIII)	$(A^{-} + B)^{-} + (A^{-} + B^{-})^{-} = A,$
(BIV)	$A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C,$
(BV)	$(A + B) \odot C = A \odot C + B \odot C,$
(BVI)	$A \odot \dot{\mathbf{1}} = A,$
(BVII)	$A^{\smile\smile} = A,$
(BVIII)	$(A + B)^{\smile} = A^{\smile} + B^{\smile},$
(BIX)	$(A \odot B)^{\smile} = B^{\smile} \odot A^{\smile},$
(BX)	$A^{\smile} \odot (A \odot B)^{-} + B^{-} = B^{-}.$

Trieste, 3&10/03/2021

L'archetipo della logica algebrica

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

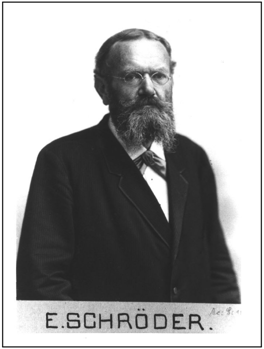
Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

L'archetipo della logica algebrica

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



Simboli logici: Vi sono

0. due ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\,\mathbb{1}}^{\text{booleane}}$,

Lessico dell'algebra $\mathcal{L}^{\times}$ delle mappe

Simboli logici: Vi sono

0. due ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\,\mathbb{1}}^{\text{booleane}}$,
1. *due* (?) segni d'***identità***: ι ed $=$;

SIMBOLI LOGICI: Vi sono

0. $\overset{\text{tre}}{\cancel{\text{due}}}$ ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\ \mathbb{1}}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'***identità***: ι ed $=$;

SIMBOLI LOGICI: Vi sono

0. ~~due~~ tre ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\,\mathbb{1}}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'***identità***: ι ed $=$;
2. due ***operatori***:

   INTERSEZIONE, SOMMA: $\overbrace{\cap_{/2}\,,\,\triangle_{/2}}^{\text{booleani}}$;

Simboli logici: Vi sono

0. $\overset{\text{tre}}{\cancel{\text{due}}}$ ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\ \mathbb{1}}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'***identità***: ι ed $=$;
2. $\overset{\text{quattro}}{\cancel{\text{due}}}$ ***operatori***:

$$\begin{array}{ll} \text{INTERSEZIONE, SOMMA:} & \overbrace{\cap_{/2}\,,\ \triangle_{/2}}^{\text{booleani}}\,; \\ \text{COMPOSIZIONE, INVERSIONE:} & \underbrace{\circ_{/2}\,,\ \smile_{/1}}_{\text{peirceani}}\,. \end{array}$$

Simboli logici: Vi sono

0. tre ~~due~~ ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\ 1\!\!1}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'***identità***: ι ed $=$;
2. quattro ~~due~~ ***operatori***:

$$\begin{array}{ll} \text{INTERSEZIONE, SOMMA:} & \overbrace{\cap_{/2}\,,\ \triangle_{/2}}^{\text{booleani}}\,; \\ \text{COMPOSIZIONE, INVERSIONE:} & \underbrace{\circ_{/2}\,,\ \smile_{/1}}_{\text{peirceani}}\,. \end{array}$$

Lettere mappali: $r_1\,,\ r_2\,,\ r_3\,,\ldots$ (almeno una, e di forma tipografica molto varia: $\leqslant$, $\in$, λ, ρ, ...).

SIMBOLI LOGICI: Vi sono

0. $\overset{\text{tre}}{\text{~~due~~}}$ *costanti*: $\overbrace{\emptyset\,,\ \mathbb{1}}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'*identità*: ι ed $=$;
2. $\overset{\text{quattro}}{\text{~~due~~}}$ *operatori*:

INTERSEZIONE, SOMMA: $\overbrace{\cap_{/2}\,,\ \triangle_{/2}}^{\text{booleani}}$;

COMPOSIZIONE, INVERSIONE: $\underbrace{\circ_{/2}\,,\ {}^{\smile}_{/1}}_{\text{peirceani}}$.

LETTERE MAPPALI: $r_1\,, r_2\,, r_3\,, \ldots$ (almeno una, e di forma tipografica molto varia: $\leqslant$, $\in$, λ, ρ , . . .).

PARENTESI: (,) .

Predicati:

0. Le costanti $\emptyset$, $1\!\!1$, ι ;
1. le lettere mappali r_i ;

PREDICATI:

0. Le costanti $\emptyset$, $\mathbb{1}$, ι;
1. le lettere mappali r_i;
2. le espressioni di una delle forme

$$(P \cap Q), \quad (P \triangle Q), \quad (P \circ Q), \quad P^{\smile},$$

con P e Q predicati.

PREDICATI:

0. Le costanti $\emptyset$, $\mathbb{1}$, ι ;
1. le lettere mappali r_i ;
2. le espressioni di una delle forme

$$(P \cap Q), \quad (P \triangle Q), \quad (P \circ Q), \quad P^{\smile},$$

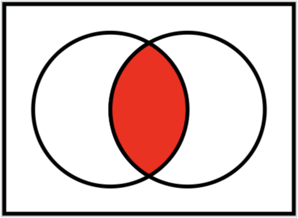
con P e Q predicati.

ENUNCIATI: le uguaglianze di forma

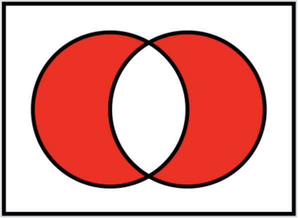
$$P = Q,$$

con P e Q predicati.

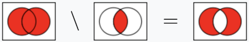
Verso la semantica di $\mathcal{L}^{\times}$ — Diagrammaticam.:



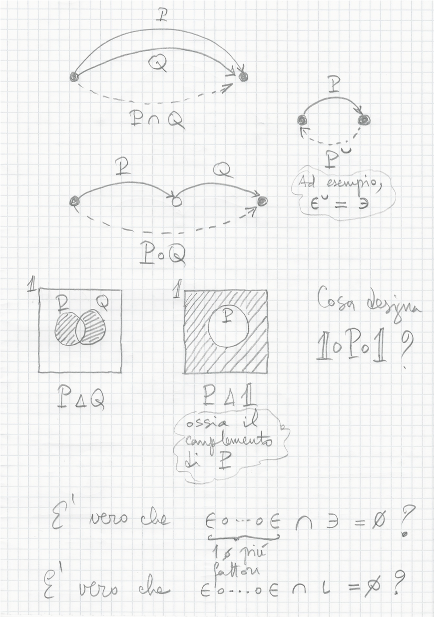
The intersection of two sets A and B, represented by circles. $A \cap B$ is in red.



Venn diagram of $A \triangle B$. The symmetric difference is the union without the intersection:



...Questo per quanto riguarda il retaggio booleano...


P
Q
P ∩ Q
P
P^∪
Ad esempio,
∈^∪ = ∋
P
Q
P ∘ Q
1
P
Q
P △ Q
1
P
P △ 1
ossia il complemento di P
Cosa designa
1 ∘ P ∘ 1 ?
E' vero che ∈ ∘ ··· ∘ ∈ ∩ ∋ = ∅ ?
1 o più fattori
E' vero che ∈ ∘ ··· ∘ ∈ ∩ ι = ∅ ?

Per ***interpretare*** il linguaggio mappale dalla ***firma*** $\mathcal{R}$, ove

$$\mathcal{R} \;=\; \left\{ \text{le lettere mappali } \mathsf{r}_i \right\},$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \left(\mathfrak{D},\, \mathfrak{R} \right),$$

con

Per ***interpretare*** il linguaggio mappale dalla ***firma*** $\mathcal{R}$, ove

$$\mathcal{R} \;=\; \Big\{ \text{le lettere mappali } \mathsf{r}_i \Big\},$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \Big(\mathfrak{D},\, \mathfrak{R} \Big),$$

con

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{D} & \text{dominio del discorso, non vuoto}\,, \\ \mathfrak{R} & \text{appartenente a } \prod_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{P}\Big(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \Big)\,. \end{array}$$

Per ***interpretare*** il linguaggio mappale dalla ***firma*** $\mathcal{R}$, ove

$$\mathcal{R} \;=\; \Big\{ \text{le lettere mappali } \mathsf{r}_i \Big\},$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \Big(\mathfrak{D}, \, \mathfrak{R} \Big),$$

con

$$\mathfrak{D} \quad \text{dominio del discorso, non vuoto}\;,$$

$$\mathfrak{R} \quad \text{appartenente a} \quad \textstyle\prod_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{P}\Big(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \Big)\,.$$

Vale a dire che: $\mathfrak{R}$ associa a ogni lettera mappale una relazione *diadica* su $\mathfrak{D}$, cioè, un insieme di coppie ordinate di elem. di $\mathfrak{D}$.

Estendiamo la funzione

$$\mathfrak{R}: \quad \mathsf{r_i} \quad \longmapsto \quad \mathsf{r_i}^{\mathfrak{I}}$$

a $\boxed{\text{tutti}}$ i predicati ponendo, ricorsivam.,

$$\emptyset^{\mathfrak{I}} \;=_{\mathsf{Def}}\; \emptyset\,, \qquad \mathbb{1}^{\mathfrak{I}} \;=_{\mathsf{Def}}\; \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}\,, \qquad \iota^{\mathfrak{I}} \;=_{\mathsf{Def}}\; \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \;:\; \boldsymbol{a} \text{ in } \mathfrak{D}\};$$

Estendiamo la funzione

$$\mathfrak{R}: \quad \mathsf{r_i} \;\mapsto\; \mathsf{r_i}^{\mathfrak{I}}$$

a $\boxed{\text{tutti}}$ i predicati ponendo, ricorsivam.,

$$\emptyset^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \emptyset, \quad \mathbb{1}^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}, \quad \iota^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle : \boldsymbol{a} \text{ in } \mathfrak{D}\};$$

$$(P \cap Q)^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in Q^{\mathfrak{I}}\};$$

$$(P \triangle Q)^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} \text{ \underline{s}se } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \notin Q^{\mathfrak{I}}\};$$

Estendiamo la funzione

$$\mathfrak{R} : \quad \mathsf{r_i} \;\mapsto\; \mathsf{r_i}^{\mathfrak{I}}$$

a $\boxed{\text{tutti}}$ i predicati ponendo, ricorsivam.,

$$\emptyset^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \emptyset, \quad \mathbb{1}^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}, \quad \iota^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle : \boldsymbol{a} \text{ in } \mathfrak{D}\};$$

$$(P \cap Q)^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in Q^{\mathfrak{I}}\};$$

$$(P \triangle Q)^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} \text{ sse } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \notin Q^{\mathfrak{I}}\};$$

$$(P^{\smile})^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}}\};$$

$$(P \circ Q)^{\mathfrak{I}} =_{\text{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} : \text{vi sono } \boldsymbol{c} \text{ in } \mathfrak{D} \text{ per i quali } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} \text{ e } \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \rangle \in Q^{\mathfrak{I}}\}.$$

A qs. punto, qualsiasi enunciato $P = Q$ risulta vero / falso in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. Scrivendo che

$$\boxed{\mathcal{A} \models^{\times} P{=}Q}$$

intenderemo che $P^{\mathfrak{I}} = Q^{\mathfrak{I}}$ vale quando $\mathfrak{I}$ è tale che $R^{\mathfrak{I}} = S^{\mathfrak{I}}$ valga per tutte le uguaglianze $R{=}S$ in $\mathcal{A}$.

A qs. punto, qualsiasi enunciato $P = Q$ risulta vero / falso in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. Scrivendo che

$$\boxed{\mathcal{A} \models^{\times} P{=}Q}$$

intenderemo che $P^{\mathfrak{I}} = Q^{\mathfrak{I}}$ vale quando $\mathfrak{I}$ è tale che $R^{\mathfrak{I}} = S^{\mathfrak{I}}$ valga per tutte le uguaglianze $R{=}S$ in $\mathcal{A}$.

Spesso vorremo specificare la collezione $\mathfrak{K}$ delle strutture *che hanno interesse per un'applicazione* tramite un insieme $\mathcal{A}$ di uguaglianze che devono risultare vere in ogni $\mathfrak{I}$ di $\mathfrak{K}$.

A qs. punto, qualsiasi enunciato $P = Q$ risulta vero / falso in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. Scrivendo che

$$\boxed{\mathcal{A} \models^{\times} P = Q}$$

intenderemo che $P^{\mathfrak{I}} = Q^{\mathfrak{I}}$ vale quando $\mathfrak{I}$ è tale che $R^{\mathfrak{I}} = S^{\mathfrak{I}}$ valga per tutte le uguaglianze $R = S$ in $\mathcal{A}$.

Spesso vorremo specificare la collezione $\mathfrak{K}$ delle strutture *che hanno interesse per un'applicazione* tramite un insieme $\mathcal{A}$ di uguaglianze che devono risultare vere in ogni $\mathfrak{I}$ di $\mathfrak{K}$.

Ad es., con $\mathcal{A} = \{\, \iota = \mathbb{1} \,\}$, imporremo che $\mathfrak{D}$ sia singoletto. Cosí, $\emptyset$ ed $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ diverranno i soli valori possibili per qualsiasi predicato.

A qs. punto, qualsiasi enunciato $P = Q$ risulta vero / falso in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. Scrivendo che

$$\boxed{\mathcal{A} \models^{\times} P{=}Q}$$

intenderemo che $P^{\mathfrak{I}} = Q^{\mathfrak{I}}$ vale quando $\mathfrak{I}$ è tale che $R^{\mathfrak{I}} = S^{\mathfrak{I}}$ valga per tutte le uguaglianze $R{=}S$ in $\mathcal{A}$.

Spesso vorremo specificare la collezione $\mathfrak{K}$ delle strutture *che hanno interesse per un'applicazione* tramite un insieme $\mathcal{A}$ di uguaglianze che devono risultare vere in ogni $\mathfrak{I}$ di $\mathfrak{K}$.

Ad es., con $\mathcal{A} = \{\,\iota = 1\!\!1\,\}$, imporremo che $\mathfrak{D}$ sia singoletto. Cosí, $\emptyset$ ed $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ diverranno i soli valori possibili per qualsiasi predicato.

Ma incontreremo esempi ben piú sofisticati. . .

Qualche proprietà di un ... ...

Scegliamo per r_1 questa forma tipografica: $\leqslant$.
Indicare quali sono le strutture interpretative $\mathfrak{I}$ in cui risultano vere

$$\begin{aligned} \iota \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) &= \emptyset \,, \\ (\leqslant \circ \leqslant) \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) &= \emptyset \,. \end{aligned}$$

È vero che

$$\{\, \iota \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) = \emptyset \,,\; (\leqslant \circ \leqslant) \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) = \emptyset \,\} \;\models^{\times}\; \leqslant^{\smile} = \leqslant \,?$$

Esercizio*:

Stabilire se la coppia

$$\left(\texttt{uguaglianze di } \mathcal{L}^{\times},\ \models^{\times} \right)$$

sia o no una logica.

Dove risiede la difficoltà:

Stabilire se

$$\left(\texttt{uguaglianze di } \mathcal{L}^{\times},\ \models^{\times} \right)$$

goda o meno della compattezza, eventualmente individuando una relazione $\vdash^{\times}$ piú '*operativa*' di $\models^{\times}$ ma che a conti fatti risulti tale che:

$$\vdash^{\times} \; = \; \models^{\times}$$

(sempre che ciò sia possibile!!)

$$\begin{aligned} \overline{P} &=_{\mathsf{Def}} P \triangle \mathbb{1} \\ P \cup Q &=_{\mathsf{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q) \\ P \setminus Q &=_{\mathsf{Def}} P \cap (Q \triangle P) \end{aligned}$$

$\overline{P} =_{\mathrm{Def}} P \triangle 1\!\!1$	$P \dagger Q =_{\mathrm{Def}} \overline{\overline{P} \circ \overline{Q}}$
$P \cup Q =_{\mathrm{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q)$	$\diamond P =_{\mathrm{Def}} 1\!\!1 \circ P \circ 1\!\!1$
$P \setminus Q =_{\mathrm{Def}} P \cap (Q \triangle P)$	$\mathrm{fncPart}(P) =_{\mathrm{Def}} P \cap \overline{P \circ \bar{\iota}}$

$\overline{P} =_{\mathrm{Def}} P \triangle \mathbb{1}$ $P \cup Q =_{\mathrm{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q)$ $P \setminus Q =_{\mathrm{Def}} P \cap (Q \triangle P)$	$P \dagger Q =_{\mathrm{Def}} \overline{\overline{P} \circ \overline{Q}}$ $\diamond P =_{\mathrm{Def}} \mathbb{1} \circ P \circ \mathbb{1}$ $\mathrm{fncPart}(P) =_{\mathrm{Def}} P \cap \overline{P \circ \overline{\iota}}$

$$P \sqsubseteq Q \;\leftrightarrow_{\mathrm{Def}}\; P \setminus Q = \emptyset$$

$\overline{P} =_{\mathrm{Def}} P \triangle 1\!\!1$	$P \dagger Q =_{\mathrm{Def}} \overline{\overline{P} \circ \overline{Q}}$
$P \cup Q =_{\mathrm{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q)$	$\diamond P =_{\mathrm{Def}} 1\!\!1 \circ P \circ 1\!\!1$
$P \setminus Q =_{\mathrm{Def}} P \cap (Q \triangle P)$	$\mathrm{fncPart}(P) =_{\mathrm{Def}} P \cap \overline{P \circ \bar{\iota}}$

$$P \sqsubseteq Q \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} P \setminus Q = \emptyset$$

$$\mathsf{f} \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} 1\!\!1 = \emptyset$$

$$P{=}Q \Rightarrow R{=}S \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \overline{\diamond(P \triangle Q)} \cap (R \triangle S) = \emptyset$$

$$\neg P{=}Q \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} P{\neq}Q \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \diamond(P \triangle Q) = 1\!\!1$$

$\overline{P} =_{\text{Def}} P \triangle \mathbb{1}$	$P \dagger Q =_{\text{Def}} \overline{\overline{P} \circ \overline{Q}}$
$P \cup Q =_{\text{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q)$	$\diamond P =_{\text{Def}} \mathbb{1} \circ P \circ \mathbb{1}$
$P \setminus Q =_{\text{Def}} P \cap (Q \triangle P)$	$\text{fncPart}(P) =_{\text{Def}} P \cap \overline{P \circ \bar{\iota}}$

$$P \sqsubseteq Q \leftrightarrow_{\text{Def}} P \setminus Q = \emptyset$$

$$\mathsf{f} \leftrightarrow_{\text{Def}} \mathbb{1} = \emptyset$$

$$P = Q \Rightarrow R = S \leftrightarrow_{\text{Def}} \overline{\diamond(P \triangle Q)} \cap (R \triangle S) = \emptyset$$

$$\neg P = Q \leftrightarrow_{\text{Def}} P \neq Q \leftrightarrow_{\text{Def}} \diamond(P \triangle Q) = \mathbb{1}$$

costrutto	$\Rightarrow$	$\neg$	$=$	$\neq$	$\sqsubseteq$	$\setminus$	$\cup$	$\triangle$	$\dagger$	$\cap$	$\circ$	$\smile$	$-$
priorità	-2	-1	0	0	0	1	1	2	3	4	5	6	6

Assiomi logici di $\mathcal{L}^{\times}$

$$\boxed{\begin{array}{c} P \cap Q = Q \cap P \\ (P \cap (Q \triangle R)) \triangle (P \cap Q) = P \cap R \\ \mathbb{1} \cap P = P \\ (P \star Q) \star R = P \star (Q \star R) \\ \hline (P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R) \\ \iota \circ P = P \\ (P \cup Q) \circ R = (Q \circ R) \cup (P \circ R) \\ P^{\smile\smile} = P \\ (P \star Q)^{\smile} = Q^{\smile} \star P^{\smile} \\ (P^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))) \cap Q = \emptyset \end{array}}$$

$\star \in \{ \triangle , \cap \}$

$\star \in \{ \cap , \circ \}$

Qui sopra (richiamo):

$$\begin{array}{rcl} P \cup Q & =_{\mathrm{Def}} & (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q), \\ P \setminus Q & =_{\mathrm{Def}} & P \cap (Q \triangle P). \end{array}$$

$$P \cap Q = Q \cap P$$
$$(P \cap (Q \triangle R)) \triangle (P \cap Q) = P \cap R$$
$$\mathbb{1} \cap P = P$$
$$(P \star Q) \star R = P \star (Q \star R) \qquad \star \in \{\triangle, \cap, \circ\}$$
$$\iota \circ P = P$$
$$(P \cup Q) \circ R = (Q \circ R) \cup (P \circ R)$$
$$P^{\smile\smile} = P$$
$$(P \star Q)^{\smile} = Q^{\smile} \star P^{\smile} \qquad \star \in \{\cap, \circ\}$$
$$(P^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))) \cap Q = \emptyset$$

Esercizio ‘soundness’ (?)

Verificare la ***validità*** degli schemi qui adottati come assiomi logici,

□

$$P \cap Q = Q \cap P$$
$$(P \cap (Q \triangle R)) \triangle (P \cap Q) = P \cap R$$
$$\mathbb{1} \cap P = P$$
$$(P \star Q) \star R = P \star (Q \star R) \qquad \star \in \{\triangle, \cap, \circ\}$$
$$\iota \circ P = P$$
$$(P \cup Q) \circ R = (Q \circ R) \cup (P \circ R)$$
$$P^{\smile\smile} = P$$
$$(P \star Q)^{\smile} = Q^{\smile} \star P^{\smile} \qquad \star \in \{\cap, \circ\}$$
$$(P^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))) \cap Q = \emptyset$$

ESERCIZIO ‘SOUNDNESS’ (?)

Verificare la ***validità*** degli schemi qui adottati come assiomi logici, intesa nel senso che qualsiasi uguaglianza fra predicati ricada sotto ciascuno di essi è vera in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. □

$$P \cap Q = Q \cap P$$
$$(P \cap (Q \triangle R)) \triangle (P \cap Q) = P \cap R$$
$$1\!\!1 \cap P = P$$
$$(P \star Q) \star R = P \star (Q \star R) \qquad \star \in \{\triangle, \cap, \circ\}$$
$$\iota \circ P = P$$
$$(P \cup Q) \circ R = (Q \circ R) \cup (P \circ R)$$
$$P^{\smile\smile} = P$$
$$(P \star Q)^{\smile} = Q^{\smile} \star P^{\smile} \qquad \star \in \{\cap, \circ\}$$
$$(P^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))) \cap Q = \emptyset$$

Esercizio ‘soundness’ (?)

Verificare la ***validità*** degli schemi qui adottati come assiomi logici, intesa nel senso che qualsiasi uguaglianza fra predicati ricada sotto ciascuno di essi è vera in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. □

Regola d'inferenza del calcolo delle mappe

$$\boxed{\boxed{\vdash^{\times}}}$$

$$\boxed{\vdash^{\times}}$$

Da $P = Q$ ed $R = S$, quando R figura in P e/o in Q ,

s'inferisce qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla $P = Q$

per

Regola d'inferenza del calcolo delle mappe

$$\boxed{\boxed{\vdash^{\times}}}$$

Da $P = Q$ ed $R = S$, quando R figura in P e/o in Q ,

s'inferisce qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla $P = Q$

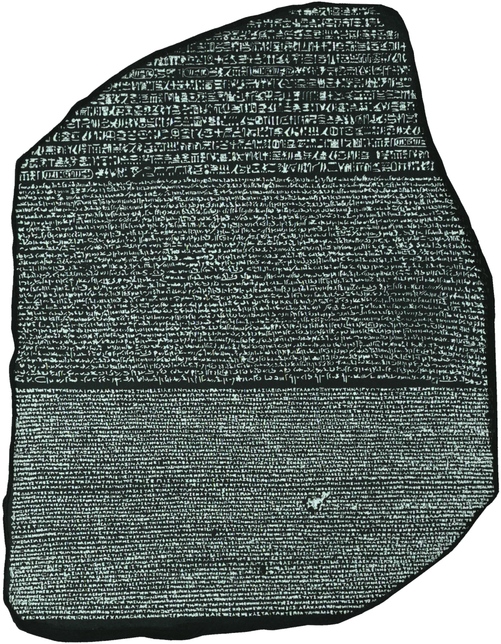
per sostituzione di S a qualche occorrenza di R .

Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme delle uguaglianze fra predicati. Diremo che la sequenza

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_h \rangle$$

è una dimostrazione di ϑ da $\mathcal{A}$, dove $\vartheta \in \mathcal{Q}$ ed $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$, quando:

1. $\delta_h = \vartheta$;
2. per ogni $i = 0, \ldots, h$, accade che δ_i sia un elemento di $\mathcal{Q}$ che
   - ⋆ appartiene ad $\mathcal{A}$, *oppure*
   - ⋆ ricade in uno degli schemi proposti come assiomi logici, oppure ha la forma $P{=}P$, *oppure*
   - ⋆ vi sono uguaglianze $\delta_{j_0} = (P{=}Q)$ e $\delta_{j_1} = (R{=}S)$ che lo *precedono* (nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$), tali che R figuri come parte di P e/o di Q e che δ_i risulti dall'uguaglianza $P{=}Q$ per rimpiazzamento di qualche R in essa presente con il predicato S.



Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\text{Def}} \forall v\,(\,v \in X \rightarrow v \in Y\,)$	$\subseteq\ =_{\text{Def}}\ \overline{\overline{\in}^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(\, v \in X \rightarrow v \in Y\,)$	$\subseteq \;=_{\mathrm{Def}}\; \overline{\overline{\in}^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \rightarrow X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(v \in X \to v \in Y)$	$\subseteq\ =_{\mathrm{Def}} \overline{\overline{\in}^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \to X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \to X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$

Density: $X \leqslant Y \,\&\, X \neq Y \to (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \,\&\, X \neq v \neq Y)$

$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(\, v \in X \rightarrow v \in Y\,)$	$\sqsubseteq\ =_{\mathrm{Def}}\ \overline{\overline{\in}^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \rightarrow X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists\, v \big(\, X\,\rho\,v \vee v\,\rho\,X\,\big)$	$(\,\rho \cup \rho^{\smile}\,) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$

Density: $X \leqslant Y \,\&\, X \neq Y \rightarrow (\exists\, v)(\, X \leqslant v \leqslant Y \,\&\, X \neq v \neq Y\,)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\sqsubseteq \;=_{\mathrm{Def}}\; \overline{\overline{\in}^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \rightarrow X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v \big(X\,\rho\,v \vee v\,\rho\,X \big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X\,\rho\,Y \rightarrow X\,\rho\,X \;\&\; Y\,\rho\,Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$

Density: $X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\text{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\subseteq\ =_{\text{Def}} \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y \rho X \rightarrow X \rho Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X \rho Y \rho Z \rightarrow X \rho Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v \big(X \rho v \vee v \rho X \big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X \rho Y \rightarrow X \rho X \;\&\; Y \rho Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$
Strictness:	$\neg X < X$	$< \cap\, \iota = \emptyset$

Density: $X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\subseteq \;=_{\mathrm{Def}}\; \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y \,\rho\, X \rightarrow X \,\rho\, Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X \,\rho\, Y \,\rho\, Z \rightarrow X \,\rho\, Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v \big(X \,\rho\, v \vee v \,\rho\, X \big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X \,\rho\, Y \rightarrow X \,\rho\, X \;\&\; Y \,\rho\, Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$
Strictness:	$\neg\, X < X$	$< \cap\, \iota = \emptyset$
Antisym.:	$X \leqslant Y \leqslant X \rightarrow X = Y$	$\leqslant \cap \leqslant^{\smile} \sqsubseteq \iota$

Density: $X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\text{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\subseteq \;=_{\text{Def}}\; \overline{\overline{\in}^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y \,\rho\, X \rightarrow X \,\rho\, Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X \,\rho\, Y \,\rho\, Z \rightarrow X \,\rho\, Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v\big(X \,\rho\, v \vee v \,\rho\, X\big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X \,\rho\, Y \rightarrow X \,\rho\, X \,\&\, Y \,\rho\, Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$
Strictness:	$\neg X < X$	$< \cap\, \iota = \emptyset$
Antisym.:	$X \leqslant Y \leqslant X \rightarrow X = Y$	$\leqslant \cap \leqslant^{\smile} \sqsubseteq \iota$
Trich'my:	$X < Y \vee X = Y \vee Y < X$	$< \cup\, \iota \cup <^{\smile} = \mathbb{1}$

Density: $X \leqslant Y \,\&\, X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \,\&\, X \neq v \neq Y)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\subseteq \;=_{\mathrm{Def}}\; \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y \rho X \rightarrow X \rho Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X \rho Y \rho Z \rightarrow X \rho Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v \big(X \rho v \vee v \rho X \big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X \rho Y \rightarrow X \rho X \;\&\; Y \rho Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$
Strictness:	$\neg X < X$	$< \cap\, \iota = \emptyset$
Antisym.:	$X \leqslant Y \leqslant X \rightarrow X = Y$	$\leqslant \cap \leqslant^{\smile} \sqsubseteq \iota$
Trich'my:	$X < Y \vee X = Y \vee Y < X$	$< \cup\, \iota \cup <^{\smile} = \mathbb{1}$
Acyc'ty:	$\neg X_0 \in X_1 \in \cdots \in X_n \in X_0$	$\in \circ \cdots \circ \in \cap\, \iota = \emptyset$
Density:	$X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$	
		$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\text{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\subseteq\ =_{\text{Def}} \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \rightarrow X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v\big(X\,\rho\,v \vee v\,\rho\,X\big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X\,\rho\,Y \rightarrow X\,\rho\,X \;\&\; Y\,\rho\,Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$
Strictness:	$\neg\, X < X$	$< \cap\ \iota = \emptyset$
Antisym.:	$X \leqslant Y \leqslant X \rightarrow X = Y$	$\leqslant \cap \leqslant^{\smile} \sqsubseteq \iota$
Trich'my:	$X < Y \vee X = Y \vee Y < X$	$< \cup\ \iota \cup <^{\smile} = \mathbb{1}$
Acyc'ty:	$\neg\, X_0 \in X_1 \in \cdots \in X_n \in X_0$	$\in \circ \cdots \circ \in \cap\ \iota = \emptyset$
Density:	$X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$	
		$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$
No ends:	$\exists v\, \exists w (v \leqslant X \leqslant w \;\&\; v \neq X \neq w)$	
		$\iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ \mathbb{1} \circ (\leqslant \setminus \iota)^{\smile}$

Galois': $\big(\exists z(\,X\ \mathrm{g}\ z\ \mathrm{g}\ Y\,) \rightarrow X{=}Y\big)\ \&\ (\,X\mathrm{g}Y \rightarrow X \neq Y\,)\ \&\ (\,Y\mathrm{g}X \rightarrow \exists v\ X\mathrm{g}v\,)$

$$\mathrm{g} \circ \mathrm{g} \sqsubseteq \iota\ \&\ \mathrm{g} \cap \iota = \emptyset\ \&\ \mathrm{g}^{\smile} \sqsubseteq \mathrm{g} \circ 1\!\!1$$

Galois': $\big(\exists z(\, X \,\mathrm{g}\, z \,\mathrm{g}\, Y \,) \rightarrow X{=}Y\big)$ & $(\, X\mathrm{g}Y \rightarrow X{\neq}Y \,)$ & $(\, Y\mathrm{g}X \rightarrow \exists v\, X\mathrm{g}v \,)$

$$\mathrm{g} \circ \mathrm{g} \sqsubseteq \iota \;\&\; \mathrm{g} \cap \iota = \emptyset \;\&\; \mathrm{g}^{\smile} \sqsubseteq \mathrm{g} \circ 1\!\!1$$

Monot.: $X \leqslant Y \,\mathrm{g}\, Z \;\&\; X \,\mathrm{g}\, V \;\rightarrow\; V \leqslant Z$ $\qquad \leqslant \circ\, \mathrm{g} \cap \mathrm{g} \circ \not\leqslant = \emptyset$

Galois': $\big(\exists z(\,X\,\mathrm{g}\,z\,\mathrm{g}\,Y\,) \to X{=}Y\big)\ \&\ (\,X\mathrm{g}Y \to X \neq Y\,)\ \&\ (\,Y\mathrm{g}X \to \exists v\ X\mathrm{g}v\,)$

$\mathrm{g}\circ\mathrm{g} \sqsubseteq \iota\ \&\ \mathrm{g}\cap\iota = \emptyset\ \&\ \mathrm{g}^{\smile} \sqsubseteq \mathrm{g}\circ\mathbb{1}$

Monot.: $X \leqslant Y\,\mathrm{g}\,Z\ \&\ X\,\mathrm{g}\,V \ \to\ V \leqslant Z$ $\qquad \leqslant\circ\mathrm{g}\cap\mathrm{g}\circ\not\leqslant = \emptyset$

Bisim'n: $\big(Y\,\beta\,X \ \to\ X\,\beta\,Y\big)\ \&\ \big(V\,\gamma\,X\,\beta\,Y \ \to\ (\exists\,w)(\,w\,\gamma\,Y\ \&\ V\,\beta\,w\,)\big)$

$\mathbb{1}\circ(\,\beta\setminus\beta^{\smile}\,)\cup(\,\gamma\circ\beta\setminus\beta\circ\gamma\,) = \emptyset$

Galois': $(\exists z(X\,\mathrm{g}\,z\,\mathrm{g}\,Y) \rightarrow X{=}Y)\ \&\ (X\mathrm{g}Y \rightarrow X{\neq}Y)\ \&\ (Y\mathrm{g}X \rightarrow \exists v\, X\mathrm{g}v)$

$$\mathrm{g}\circ\mathrm{g}\sqsubseteq\iota\ \&\ \mathrm{g}\cap\iota=\emptyset\ \&\ \mathrm{g}^{\smile}\sqsubseteq\mathrm{g}\circ\mathbb{1}$$

Monot.: $X\leqslant Y\,\mathrm{g}\,Z\ \&\ X\,\mathrm{g}\,V\ \rightarrow\ V\leqslant Z$ $\qquad \leqslant\circ\mathrm{g}\cap\mathrm{g}\circ\not\leqslant=\emptyset$

Bisim'n: $(Y\,\beta\,X\ \rightarrow\ X\,\beta\,Y)\ \&\ (V\,\gamma\,X\,\beta\,Y\ \rightarrow\ (\exists w)(w\,\gamma\,Y\ \&\ V\,\beta\,w))$

$$\mathbb{1}\circ(\beta\setminus\beta^{\smile})\cup(\gamma\circ\beta\setminus\beta\circ\gamma)=\emptyset$$

Graph iso'sm: $((X\,\mathrm{g}\,Y\ \&\ X\,\mathrm{g}\,Z)\vee(Y\,\mathrm{g}\,X\ \&\ Z\,\mathrm{g}\,X)\ \rightarrow\ Y=Z)\ \&$

$((\exists v)X\,\mathrm{f}\,v\ \leftrightarrow\ (\exists w)(X\,\mathrm{r}\,w\ \vee\ w\,\mathrm{r}\,X))\ \&$

$((\exists v)v\,\mathrm{f}\,Y\ \leftrightarrow\ (\exists w)(Y\,\mathrm{s}\,w\ \vee\ w\,\mathrm{s}\,Y))\ \&$

$(X\,\mathrm{r}\,Z\ \leftrightarrow\ (\exists v,w)(X\,\mathrm{g}\,v\,\mathrm{s}\,w\ \&\ Z\,\mathrm{g}\,w))$

$$\mathrm{g}^{\smile}\circ\mathrm{g}\cup\mathrm{g}\circ\mathrm{f}^{\smile}\sqsubseteq\iota\ \&\ \mathrm{g}\circ\mathbb{1}=(\mathrm{r}\cup\mathrm{r}^{\smile})\circ\mathbb{1}\ \&$$

$$\mathbb{1}\circ\mathrm{g}=\mathbb{1}\circ(\mathrm{s}\cup\mathrm{s}^{\smile})\ \&\ \mathrm{r}=\mathrm{g}\circ\mathrm{s}\circ\mathrm{g}^{\smile}$$

A. Tarski and S. Givant.
A formalization of Set Theory without variables, volume 41 of *Colloquium Publications*.
American Mathematical Society, 1987.