

SERIE E INTEGRALI GENERALIZZATI

1 Serie

Definizione 1 (Serie). *Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali, definisco per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'elemento*

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

*La coppia di successioni $(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ si dice **serie** di termine generico a_n e si indica col simbolo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

I valori a_n si dicono termini della serie, mentre i valori s_n si dicono somme parziali o ridotte n -esime della serie.

A partire da una serie $(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ ha senso chiedersi quali siano i limiti delle due successioni coinvolte. Il nostro interesse è rivolto al limite della successione $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definizione 2 (Somma e carattere di una serie). *Supponiamo esista il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i = S, \quad (1)$$

allora possiamo scrivere

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

e chiameremo il valore S somma della serie. Se $S \in \mathbb{R}$ allora la serie si dirà convergente, altrimenti se $S = \pm\infty$ si dirà positivamente/negativamente divergente.

Se invece il limite in (1) non esiste la serie si dirà indeterminata.

Osservazione 3. *Se la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è definitivamente nulla, ovvero $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, a_n = 0$, allora abbiamo che $s_n = s_{n_0}$ per ogni $n \geq n_0$ e di conseguenza esiste il limite $\lim_n s_n = s_{n_0}$, e quindi la serie $(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ è convergente.*

Invece la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n$ è (positivamente) divergente, infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $s_n \geq n$ e quindi $\lim_n s_n = +\infty$

Osservazione 4. *In seguito denoteremo con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia la serie che la sua somma, qualora tale valore esista.*

Osservazione 5. *Le serie non sono definite necessariamente a partire da una successione che coinvolga tutti i naturali $n = 0, 1, 2, \dots$ ma possiamo cominciare da un naturale successivo, come ad esempio nelle seguenti serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Esempio 6 (Serie geometrica). *Consideriamo la serie geometrica di ragione x :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per la scelta $x = 0$ si pone per convenzione $0^0 = 1$, quindi si ha $\sum_{n=0}^{\infty} 0^n = 1$, e chiaramente in questo caso la serie è convergente.

Se poniamo $x = 1$ troviamo $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$, essendo $s_n = n + 1$. In questo caso la serie è divergente.

Se poniamo $x = -1$ troviamo $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ con $s_{2k} = 1$ e $s_{2k+1} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ne consegue che in questo caso la serie è indeterminata.

Prendiamo ora $x \neq 1$, possiamo calcolare esplicitamente

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

e se $x \in (-1, 1)$ notiamo che vale

$$\lim_n s_n = \lim_n \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Quindi per ogni $x \in (-1, 1)$ la serie geometrica di ragione x converge e vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

Se invece consideriamo $x > 1$ abbiamo

$$\lim_n s_n = \lim_n \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \lim_n \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = +\infty.$$

e la serie geometrica in questo caso diverge. Se prendiamo $x < -1$ troviamo

$$\lim_k s_{2k} = \lim_k \frac{1 - x^{2k+1}}{1 - x} = \lim_k \frac{1 + |x|^{2k+1}}{1 - x} = +\infty,$$

$$\lim_k s_{2k+1} = \lim_k \frac{1 - x^{2k+2}}{1 - x} = \lim_k \frac{1 - |x|^{2k+2}}{1 - x} = -\infty.$$

Ne concludiamo che la serie geometrica in questo caso è indeterminata.

Esempio 7 (I decimali periodici). Ricordate quando da bambini ci insegnarono a scrivere i numeri decimali periodici sotto forma di frazione? La regola era più o meno questa

- ◇ Al numeratore scrivi il numero decimale periodico senza virgola e senza il segno del periodo e sottrai il numero stesso a cui hai tolto le cifre contenute nel periodo. Al denominatore scrivi tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'anti periodo.

In questo modo calcolavamo ad esempio:

$$1.0\bar{1} = \frac{101 - 10}{90}, \quad 2.00\bar{12} = \frac{20012 - 200}{9900}, \quad 3.\bar{2} = \frac{32 - 3}{9}.$$

Da dove salta fuori questa regola? La parte riguardante gli zeri è semplice conseguenza del fatto che l'antiperiodo sparisce dopo aver moltiplicato il numero per l'opportuno multiplo di dieci. Focalizziamo quindi la nostra attenzione su un numero decimale periodico senza antiperiodo e con parte intera zero, come ad esempio $0.\overline{23}$.

$$\begin{aligned} 0.\overline{23} &= 0.232323\dots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \dots \\ &= \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \dots \\ &= 23 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots \right) \\ &= 23 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^n - 1 \right) \\ &= 23 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} - 1 \right) \\ &= 23 \cdot \frac{1}{100 - 1} = \frac{23}{99}. \end{aligned}$$

Notiamo che $100 = 10^2$ dove 2 è il numero di cifre del periodo e che nella quarta riga del calcolo compare un -1 perché nella riga precedente manca il primo termine della serie geometrica, ovvero $1 = \left(\frac{1}{100}\right)^0$.

Questo calcolo è decisamente lontano da una dimostrazione rigorosa, lo studente volentoso formalizzi una dimostrazione per esercizio. Si mostri inoltre anche il motivo per cui la costruzione del numeratore segue la regola suindicata.

Osservazione 8 (Serie resto). Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, possiamo definire, dato un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, la sua serie resto

di ordine n_0 come $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ togliendo i termini della serie originale fino all'indice n_0 . Si nota facilmente che queste due serie hanno lo stesso carattere, infatti, per ogni $n > n_0$ vale

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^{n_0} a_i + \sum_{i=n_0+1}^n a_i \\ &= \bar{s} + \tilde{s}_n. \end{aligned}$$

dove s_n e \tilde{s}_n sono le ridotte rispettivamente della serie originale e della serie resto.

Dalla precedente osservazione segue che il comportamento di una serie è determinato da come sono fatti gli elementi delle sue serie resto. Quindi, in quanto segue, troveremo spesso teoremi e proprietà relativi al comportamento asintotico della successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ coinvolta nella definizione della serie. I primi termini della serie influenzeranno solo il valore della somma della serie (qualora questa sia convergente) non influenzando il suo carattere. Inoltre negli enunciati supporremo sempre che la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia definita sui naturali.

Proposizione 9 (Linearità per serie convergenti). Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie convergenti, allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ è convergente e vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) + \mu \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Esercizio 10. Dimostrare la precedente proposizione usando le proprietà dei limiti. Inoltre, dimostrare che date $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$ (serie convergente) e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ (serie positivamente divergente) allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ è positivamente divergente se $\mu > 0$, negativamente divergente se $\mu < 0$.

In quanto segue ci porremo il problema di determinare il carattere di una serie. Da un punto di vista pratico, la determinazione della somma di una serie non è quasi mai un calcolo facile. Spesso si usano i calcolatori per determinarla, ma prima di far calcolare ad un computer la somma di una serie, sarebbe bene verificare se il risultato esiste nei reali o meno.

Teorema 11 (Condizione necessaria per la convergenza). Se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora vale $\lim_n a_n = 0$.

Dimostrazione. Sia $S := \lim_n s_n$, allora vale anche $\lim_n s_{n-1} = S$ e quindi, essendo $s_n - s_{n-1} = a_n$ (per ogni $n > 0$) troviamo

$$\lim_n a_n = \lim_n s_n - s_{n-1} = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = S - S = 0$$

e quindi la tesi. □

Esempio 12 (Serie armonica). La serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. Infatti, scrivendo $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, troviamo $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$,

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq s_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \geq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

da cui concludiamo che $s_{2^3} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$. Con ragionamento analogo si mostra che vale

$$s_{2^k} \geq 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

e di conseguenza che

$$\lim_k s_{2^k} = +\infty.$$

Essendo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a termini positivi allora $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione crescente, e quindi ammette limite. Poichè la sottosuccessione $\{s_{2^k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è divergente, allora anche $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ diverge e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Come notato nell'esercizio precedente, una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **a termini non negativi** (ovvero tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) non può essere indeterminata in quanto la successione $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali è *non decrescente* e quindi ammette limite. In questo caso la serie sarà convergente o positivamente divergente.

In particolare una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **a termini positivi** (ovvero tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) non può essere indeterminata in quanto la successione $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali è *crescente* e quindi ammette limite. Anche in questo caso la serie sarà convergente o positivamente divergente.

In presenza di serie a termini non negativi o a termini positivi scriveremo in breve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ per indicare

che una serie è convergente, mentre scriveremo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ per indicare che è positivamente divergente.

1.1 Criteri di convergenza per serie a termini non negativi o a termine positivo

I criteri presenti in questa sezione sono formulati per serie a termini non negativi o a termini positivi, e non sono validi per serie a termine generico (ovvero che presentano sia termini positivi e negativi). Naturalmente, se una serie presenta un numero finito di termini negativi, asintoticamente sarà una serie a termini non negativi e, grazie alla Osservazione 8, potremo utilizzare i seguenti criteri passando ad un'opportuna serie resto.

Se siamo in presenza di una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini non positivi (o a termini negativi), possiamo considerare

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} -a_n$ che sarà quindi a termini non negativi (o a termini positivi) e il carattere di questa sarà lo stesso della serie di partenza. Naturalmente la somma della serie, se esiste, avrà segno opposto.

Teorema 13 (Criterio del confronto). Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini non negativi. Se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora

- se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge,

- se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione. Definisco i termini delle successioni delle somme parziali come

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{e} \quad t_n = \sum_{k=0}^n b_k.$$

Si può dimostrare per induzione che $s_n \leq t_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (fare per esercizio questa parte della dimostrazione). Ne consegue che $\lim_n s_n \leq \lim_n t_n$ (i limiti esistono perché le serie sono a termini non negativi). Da questa disequazione segue la tesi (scrivere per esercizio tutti i dettagli in entrambi i casi). \square

Esempio 14 (Serie di Mengoli).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Notiamo che $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, quindi

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

A questo punto si vede facilmente che $\lim_n s_n = 1$.

Esempio 15. Studiamo il caso di una serie con termine generico $a_n = \frac{1}{n^2}$, ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^2} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^2} < +\infty.$$

Poiché $\frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{m(m+1)}$ per ogni $m \geq 1$, la convergenza segue usando il criterio del confronto.

Esempio 16 (Serie armonica generalizzata). Studiamo ora il caso di una serie con termine generico $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ con α reale, ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Per $\alpha \leq 0$ non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, quindi la serie risulta divergente. Se prendiamo $\alpha \in (0, 1]$ notiamo che vale $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, quindi per il criterio del confronto la serie diverge. Se invece $\alpha \in [2, +\infty)$ abbiamo $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, quindi per il criterio del confronto la serie converge.

Resta aperto il problema per $\alpha \in (1, 2)$ che troverà risposta nel seguito.

Esempio 17 (Serie esponenziale). Studiamo il caso di una serie con termine generico $a_n = \frac{1}{n!}$, ovvero

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < +\infty$$

Provare per esercizio che $k! \geq 2^{k-1}$ per ogni $k \geq 2$, usando il metodo induttivo. Dalla precedente disuguaglianza, troviamo $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$ e usando la convergenza della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ e la linearità per serie convergenti, troviamo la convergenza della serie esponenziale.

Il motivo per cui questa serie si chiama serie esponenziale sarà chiaro in seguito, per ora ci limitiamo ad anticipare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Come già accennato, è importante conoscere il comportamento asintotico dei termini di una serie. Il criterio del confronto visto in precedenza pretende un controllo su tutti i termini della serie ed è quindi molto restrittivo. Il seguente criterio lascia più margine di movimento.

Teorema 18 (Criterio del confronto asintotico). *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi. Sia*

$$\ell := \lim_n \frac{b_n}{a_n}, \quad \ell \in [0, +\infty], \quad (2)$$

dove quindi assumiamo che il limite esista.

a) se $0 < \ell < +\infty$ allora i termini della serie si dicono asintoticamente equivalenti e le due serie hanno lo stesso carattere (convergono entrambe o divergono entrambe);

b) se $\ell = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$;

c) se $\ell = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.

Dimostrazione. Proviamo il punto a). Dal limite in (2), poiché $\ell \in \mathbb{R}^+$ segue che

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n} \quad \left| \frac{b_n}{a_n} - \ell \right| < \epsilon.$$

Se scegliamo $\epsilon = \ell/2$ troviamo che

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n} \quad \frac{1}{2}\ell < \frac{b_n}{a_n} < \frac{3}{2}\ell.$$

Essendo $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\frac{1}{2}\ell a_n < b_n < \frac{3}{2}\ell a_n, \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

A questo punto la tesi segue dal criterio del confronto (scrivere i dettagli per esercizio).

Proviamo ora il punto b). Scegliendo $\epsilon = 1$ nella definizione di limite abbiamo:

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = 0 \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n} \quad \frac{b_n}{a_n} < 1,$$

da cui segue che $b_n < a_n$ per ogni $n > \bar{n}$. Usando il criterio del confronto sulla serie resto di ordine \bar{n} , dalla convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ segue la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Proviamo ora il punto c). Scriviamo la definizione di limite

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n} \quad \frac{b_n}{a_n} > M,$$

e prendiamo $M = 1$. Segue che $b_n > a_n$ per ogni $n > \bar{n}$. Usando il criterio del confronto sulla serie resto di ordine \bar{n} , dalla divergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ segue la divergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. \square

Esercizio 19. *Discutere il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1}.$$

Dopo aver verificato che si tratta di una serie a termini positivi, usando i limiti fondamentali troviamo che

$$\lim_n \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = 1, \quad \lim_n \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

quindi

$$\lim_n \frac{\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}}}{\frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n^2}}} = \lim_n \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1} = 3.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge allora anche la serie da studiare è convergente.

Esercizio 20. Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n}.$$

Dopo aver verificato che si tratta di una serie a termini positivi essendo $e^x \geq 1 \geq \cos x$ quando $x > 0$, usando i limiti fondamentali troviamo che

$$\lim_n \frac{e^{\frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\cancel{1} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge allora anche la serie da studiare è divergente.

Teorema 21 (Criterio del rapporto). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi tale che esiste $q \in (0, 1)$ con la seguente proprietà

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora la serie è convergente.

Dimostrazione. Dall'ipotesi segue che $a_{n+1} \leq qa_n$, quindi abbiamo che $a_1 \leq qa_0$, inoltre $a_2 \leq qa_1 \leq q^2 a_0$. Possiamo dimostrare quindi per induzione che $a_n \leq q^n a_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (dimostrarlo per esercizio).

Quindi troviamo

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n q^k a_0 = a_0 \sum_{k=0}^n q^k.$$

Possiamo quindi confrontare la successione delle somme parziali con un multiplo della successione delle somme parziali della serie geometrica di ragione $q < 1$ che sappiamo convergere. Quindi

$$\lim_n \sum_{k=0}^n a_k \leq a_0 \cdot \frac{1}{1-q} < +\infty,$$

quindi la serie è convergente. □

Corollario 22 (Criterio del rapporto asintotico). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi tale che esiste il seguente limite

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell, \quad \text{con } \ell \in [0, +\infty]. \quad (3)$$

Allora distinguiamo i seguenti casi

- se $\ell \in [0, 1)$ allora la serie è convergente;

- se $\ell \in (1, +\infty]$ allora la serie è divergente.

Nota 1. Nel caso si abbia $\ell = 1$ il limite in (3) non dà informazioni sul carattere della serie. Esistono infatti sia serie convergenti che serie divergenti che portano al limite $\ell = 1$, come ad esempio le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ già viste in precedenza.

Nota 2. In alcuni libri si trova il criterio del rapporto nella forma del precedente corollario. In questo caso nel libro la dimostrazione del Corollario 22 contiene al suo interno la dimostrazione del Teorema 21.

Dimostrazione del Corollario 22. Se vale $\ell < 1$ allora possiamo trovare un reale $q \in (\ell, 1)$ per cui, usando la definizione di limite, vale

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

a questo punto la serie resto di ordine \bar{n} soddisfa le ipotesi del criterio del rapporto e la serie risulta convergente.

Se invece $\ell > 1$ possiamo trovare anche in questo caso $q \in (1, \ell)$ tale che

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1.$$

Troviamo quindi $a_{n+1} > a_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, ovvero che la serie resto di ordine \bar{n} è crescente, quindi non può valere la condizione necessaria per la convergenza di una serie (ovvero che $\lim_n a_n = 0$). \square

Teorema 23 (Criterio della radice). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi tale che esiste $q \in (0, 1)$ con la seguente proprietà

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora la serie è convergente.

Dimostrazione. Dall'ipotesi segue che $a_n \leq q^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo quindi confrontare la serie con la serie geometrica di ragione $q < 1$ che sappiamo convergere. Quindi la serie è convergente. \square

Corollario 24 (Criterio della radice asintotico). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi tale che esiste il seguente limite

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell, \quad \text{con } \ell \in [0, +\infty]. \quad (4)$$

Allora distinguiamo i seguenti casi

- se $\ell \in [0, 1)$ allora la serie è convergente;
- se $\ell \in (1, +\infty]$ allora la serie è divergente.

Nota 3. Anche qui, nel caso si abbia $\ell = 1$ il limite in (4) non dà informazioni sul carattere della serie. Esistono infatti sia serie convergenti che serie divergenti che portano al limite $\ell = 1$, come ad esempio le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ già viste in precedenza.

Nota 4. In alcuni libri si trova il criterio della radice nella forma del precedente corollario. In questo caso nel libro la dimostrazione del Corollario 24 contiene al suo interno la dimostrazione del Teorema 23.

Dimostrazione del Corollario 24. Se vale $\ell < 1$ allora possiamo trovare un reale $q \in (\ell, 1)$ per cui, usando la definizione di limite, vale

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n} \quad \sqrt[n]{a_n} < q,$$

a questo punto la serie resto di ordine \bar{n} soddisfa le ipotesi del criterio della radice e la serie risulta convergente.

Se invece $\ell > 1$ possiamo trovare anche in questo caso $q \in (1, \ell)$ tale che

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n} \quad \sqrt[n]{a_n} > q > 1.$$

Troviamo quindi $a_n > 1$ per ogni $n \geq \bar{n}$, quindi non può valere la condizione necessaria per la convergenza di una serie (ovvero che $\lim_n a_n = 0$). \square

Esercizio 25. *Mostrare che la seguente serie converge per ogni $k \in \mathbb{R}^+$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{e^n}.$$

Proviamo ad applicare il criterio del rapporto asintotico e calcoliamo

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^k}{e^{n+1}}}{\frac{n^k}{e^n}} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

Concludiamo quindi che la serie converge avendo trovato un limite $\ell < 1$.

Esercizio 26. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{2n}{n} \right]^{-1}.$$

Proviamo ad applicare il criterio del rapporto asintotico e calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_n \frac{\left[\binom{2n+2}{n+1} \right]^{-1}}{\left[\binom{2n}{n} \right]^{-1}} \\ &= \lim_n \left[\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!(n+1)n!} \right]^{-1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \lim_n \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che la serie converge avendo trovato un limite $\ell < 1$.

Esercizio 27. *Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza come*

$$a_1 = 1; \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{2 + a_k} \quad (k \geq 1).$$

Qual è il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Osserviamo che la serie è a termini positivi e che vale, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2 + a_n} < \frac{1}{2}.$$

Quindi possiamo applicare il criterio del rapporto.

Notiamo che in questo caso non possiamo dire nulla del limite richiesto nel criterio del rapporto asintotico.

Inoltre, in questo caso, l'aver dimostrato la convergenza della serie, ci dà come conseguenza che $\lim_n a_n = 0$.

Esercizio 28 (Serie esponenziale - parte 2). *Mostrare che la seguente serie converge per ogni $x > 0$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Proviamo ad applicare il criterio del rapporto asintotico e calcoliamo

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_n \frac{x}{n+1} = 0.$$

Concludiamo quindi che la serie converge avendo trovato un limite $\ell < 1$.

Mostriamo inoltre che, per ogni $x > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Infatti, per ogni $N \in \mathbb{N}$, scrivendo il polinomio di Taylor di grado N in $x = 0$ della funzione e^x e usando il resto di Lagrange abbiamo

$$e^x = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} + e^{\xi_N} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}, \quad \xi_N \in (0, x).$$

da cui, usando che l'esponenziale è una funzione crescente,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^x \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$

dove, per ogni $x > 0$ abbiamo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^x \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = 0.$$

Teorema 29 (Criterio della serie condensata). Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione decrescente.

Allora le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{2^n} 2^n$$

(la seconda prende il nome di serie condensata) hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Consideriamo le successioni delle ridotte

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad e \quad t_m = \sum_{h=0}^m a_{2^h} 2^h$$

e osserviamo che, essendo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decrescente,

$$a_1 \geq \frac{1}{2} a_1,$$

$$a_2 \geq \frac{1}{2} \cdot 2a_2,$$

$$a_3 + a_4 \geq 2a_4 = \frac{1}{2} \cdot 4a_4,$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 4a_8 = \frac{1}{2} 8a_8.$$

Possiamo quindi mostrare più in generale che, per ogni $h \in \mathbb{N}$, vale

$$a_{2^{h-1}+1} + a_{2^{h-1}+2} + \cdots + a_{2^h-1} + a_{2^h} \geq \frac{1}{2} 2^h a_{2^h}.$$

Quindi abbiamo

$$s_{2^m} \geq \frac{1}{2} t_m, \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Similmente

$$a_1 = a_1,$$

$$a_2 + a_3 \leq 2a_2,$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4.$$

Possiamo quindi mostrare più in generale che, per ogni $h \in \mathbb{N}$, vale

$$a_{2^h} + a_{2^h+1} + \cdots + a_{2^{h+1}-2} + a_{2^{h+1}-1} \leq 2^h a_{2^h}.$$

Quindi abbiamo

$$s_{2^{m+1}-1} \leq t_m, \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

A questo punto, usando il teorema del confronto per successioni visto nel precedente corso di analisi (non il criterio del confronto introdotto sopra!), se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, usando la stima (5) abbiamo la convergenza della serie condensata, se invece essa diverge usando la stima (6) abbiamo che la serie condensata diverge.

Viceversa, sempre usando il criterio del confronto, se la serie condensata converge, allora da (6) segue la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, se invece la serie condensata diverge, allora da (5) segue che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. \square

Esempio 30 (Serie armonica generalizzata - parte 2). *Consideriamo ancora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Dall'Esempio 16 era rimasto in sospeso il caso $\alpha \in (1, 2)$. La serie condensata risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha n}} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n,$$

che è una serie geometrica di ragione $\rho = 2^{-(\alpha-1)}$. Essa converge se e solo se $\rho < 1$ ovvero $\alpha > 1$. Quindi la serie armonica generalizzata converge per ogni $\alpha > 1$, mentre diverge se $0 \leq \alpha \leq 1$.

Esempio 31. *Consideriamo la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

La serie condensata risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (\log 2^n)^\alpha} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log 2)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Quindi (a meno della costante moltiplicativa) otteniamo la serie dell'esercizio precedente e concludiamo che la serie converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$.

Esercizio 32. *Mostrare che per la serie precedente fallisce il tentativo col criterio del confronto sia usando le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (divergente) che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ con $\delta > 0$ (convergente).*

Esercizio 33. *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\beta (\log n)^\alpha},$$

al variare di $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Esercizio 34. *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \log n \cdot (\log \log n)^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

1.2 Criteri di convergenza per serie a termini qualunque

Con serie a termine qualunque, intendiamo serie aventi termini di segno variabile.

Consideriamo una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e la sua successione delle ridotte $\{s_n\}_n$. Ricordiamo che una serie converge se e solo se esiste reale il limite della successione delle ridotte (che quindi è una successione convergente). Inoltre, sappiamo che una successione $\{s_n\}_n$ convergente in \mathbb{R} è anche una successione di Cauchy, ovvero che

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall p > 0 \quad |s_{n+p} - s_n| < \epsilon.$$

Da queste considerazioni, osservando che

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

segue il prossimo teorema.

Teorema 35 (Criterio di Cauchy). *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall p > 0 \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon.$$

Esercizio 36. *Scrivere formalmente la dimostrazione del precedente teorema, usando quanto scritto sopra.*

Definizione 37 (Serie assolutamente convergente). *Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.*

Vista la precedente definizione, sorge il sospetto che una serie assolutamente convergente sia effettivamente convergente (nella definizione non viene specificato): infatti il prossimo teorema enuncia proprio questo.

Teorema 38 (Criterio dell'assoluta convergenza). *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Poiché vale $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ allora la successione delle ridotte di questa serie converge, e quindi è di Cauchy, ovvero

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall p > 0 \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| < \epsilon.$$

Usando la disuguaglianza triangolare troviamo che

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

e quindi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n}, \forall p > 0 \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon.$$

Troviamo quindi che la successione delle ridotte di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è di Cauchy, quindi convergente. \square

Definizione 39. *Una serie a termine qualunque convergente ma non assolutamente convergente si dirà semplicemente convergente.*

Definizione 40. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ a termine qualunque si dice **serie a termini alterni** se la successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è tale che

$$b_k \cdot b_{k+1} < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ovvero se ogni termine ha il segno opposto di quello che precede. In particolare potremo individuare una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di termini non negativi (o non positivi) tale che $b_n = (-1)^n a_n$.

Teorema 41 (Criterio di Leibniz). Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi decrescente e infinitesima ($\lim_n a_n = 0$). Allora la serie a termini alterni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

è convergente.

Dimostrazione. La successione delle ridotte ha termini $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Consideriamo le sue sottosuccessioni $\{s_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{s_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenenti i termini in posizione rispettivamente pari e dispari. Valgono le seguenti stime

$$\begin{aligned} s_{2(n+1)} &= s_{2n+2} = s_{2n} \underbrace{-a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq s_{2n}, \\ s_{2(n+1)+1} &= s_{2n+3} = s_{2n+1} \underbrace{+a_{2n+2} - a_{2n+3}}_{\geq 0} \geq s_{2n+1}. \end{aligned}$$

Quindi $\{s_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{s_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono rispettivamente una successione decrescente e crescente. Inoltre

$$s_1 \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0.$$

Abbiamo quindi che esistono i seguenti limiti in \mathbb{R} :

$$D := \lim_n s_{2n+1}, \quad P := \lim_n s_{2n},$$

che soddisfano sicuramente $D \leq P$. Osserviamo che

$$D - P = \lim_n s_{2n+1} - s_{2n} = \lim_n (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = 0.$$

Quindi abbiamo $D = P$ e quindi vale $\lim_n s_n = D = P \in \mathbb{R}$, ovvero la serie è convergente. \square

Nota 5. La struttura della dimostrazione con le due successioni una decrescente e una crescente ricordano la dimostrazione di un risultato di Analisi 1, quale?

Nella precedente dimostrazione essendo la somma S della serie tale che $s_{2n+1} \leq S \leq s_{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, notiamo che l'errore commesso nell'approssimare la somma della serie mediante un termine della successione delle somme parziali può essere sovrastimato nel modo seguente:

$$|S - s_{2n+1}| \leq |s_{2n+1} - s_{2n}| = |a_{2n+1}|.$$

Quindi se volessimo ottenere il valore S a meno di un errore ϵ sarebbe sufficiente considerare la somma parziale s_{2k+1} tale che $a_{2k+1} < \epsilon$.

Esempio 42. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

è (semplicemente) convergente. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi) (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

è (semplicemente) convergente osservando che

$$\cos(n\pi) (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Osservazione 43. Ricordando l'Osservazione 8, notiamo che, per poter applicare il Criterio di Leibniz ad una serie, basta che una sua serie resto sia a termini alterni che, in valore assoluto, formino una successione decrescente.

Teorema 44 (Criterio di Dirichlet). Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ avente una successione delle ridotte $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitata. Consideriamo una successione $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di reali non negativi, decrescente e infinitesima. Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n a_n$$

è convergente.

Dimostrazione. Essendo la successione $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitata allora possiamo trovare $M > 0$ tale che $|s_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Gli elementi della successione $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ delle ridotte della serie $\sum_{n=0}^{\infty} q_n a_n$ può essere rimaneggiata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= q_0 a_0 + q_1 a_1 + \cdots + q_k a_k + \cdots + q_n a_n \\ &= q_0 s_0 + q_1 (s_1 - s_0) + \cdots + q_k (s_k - s_{k-1}) + \cdots + q_n (s_n - s_{n-1}) \\ &= s_0 (q_0 - q_1) + s_1 (q_1 - q_2) + \cdots + s_k (q_k - q_{k+1}) \\ &\quad + \cdots + s_{n-1} (q_{n-1} - q_n) + s_n q_n, \end{aligned}$$

Quindi avremo

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} s_k (q_k - q_{k+1}) + q_n s_n$$

dove il secondo addendo va a zero per ipotesi. Se mostriamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} s_n (q_n - q_{n+1})$ è convergente abbiamo la tesi.

Mostriamo che essa è assolutamente convergente. Infatti, valendo $|s_k (q_k - q_{k+1})| \leq M (q_k - q_{k+1})$ e

$$\lim_n \sum_{k=0}^n M (q_k - q_{k+1}) = \lim_n M (q_0 - q_{n+1}) = M q_0,$$

troviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |s_n (q_n - q_{n+1})| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} (q_n - q_{n+1}) = M q_0 < +\infty.$$

□

Osservazione 45. Il precedente criterio non dà informazioni sul carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Esercizio 46. Dimostrare il Criterio di Leibniz usando il Criterio di Dirichlet.

Esercizio 47. Usare il criterio precedente per mostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{k}n\right) \frac{1}{n}$$

è convergente per ogni $k \in \mathbb{N}^+$.

Esercizio 48. Usare il criterio precedente per mostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}n\right) \frac{1}{n}$$

è convergente per ogni $k \in \mathbb{N}^+$.

2 Integrali generalizzati

Per la lettura di questa parte bisogna avere ben chiara la definizione di integrale di Riemann di una funzione limitata definita su un intervallo limitato. Denoteremo con $f \in \mathcal{R}(I)$ le funzioni $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann. Ricordiamo inoltre che scrivendo $f \in \mathcal{R}(I)$ implicitamente assumiamo che f sia limitata, essendo questa la richiesta base per avere una funzione integrabile secondo Riemann.

Nella prima sezione toglieremo l'ipotesi di limitatezza alla f , nella seconda ammetteremo che la funzione f abbia un dominio illimitato.

2.1 Integrazione di funzioni illimitate definite su intervalli limitati

Scopo di questa sezione è riuscire a rispondere a domande del tipo:

$$\text{“Quanto vale l'integrale } \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ ?”}$$

Notiamo infatti che la funzione integranda non è definita su $[0, 1]$ ma solo su $(0, 1]$ ed è illimitata in un intorno di zero.

Definizione 49 (Integrale generalizzato - $f \geq 0$). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa (ovvero $f(x) \geq 0 \forall x \in I$). Tale funzione si dice **integrabile secondo Riemann in senso generalizzato** se*

- per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x) = \min(f(x), n) \in \mathcal{R}(I)$,
- esiste in \mathbb{R} il limite $\lim_n \int_I f_n(x) dx$.

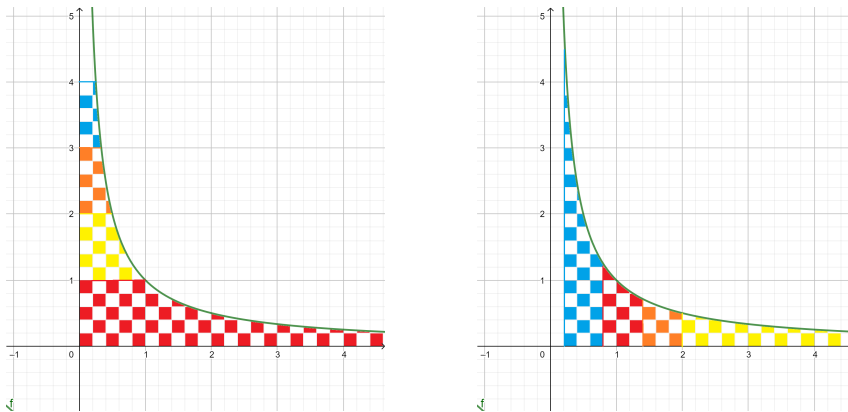


Figura 1: a sinistra uno sketch della definizione di integrale generalizzato, a destra uno sketch della definizione di integrale improprio spesso introdotto alle superiori.

Denoteremo con $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ le funzioni $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann in senso generalizzato. Inoltre per ogni $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ l'integrale generalizzato avrà il valore

$$\int_I f(x) dx := \lim_n \int_I f_n(x) dx.$$

Specifichiamo inoltre che

$$f_n(x) = \min(f(x), n) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq n, \\ n & \text{se } f(x) > n, \end{cases}$$

e che questa notazione sarà usata da qui in avanti. Sostanzialmente, stiamo *segando l'area sotto il grafico di f ad altezza n* ottenendo l'area di valore $\mathcal{A}_n = \int_I f_n(x) dx$ e ci stiamo chiedendo se la successione $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dei valori così ottenuti (chiaramente non decrescente) converge in \mathbb{R} o meno.

Osservazione 50. Possiamo definire anche per ogni $c \in \mathbb{R}^+$ la funzione $f_c(x) = \min(f(x), c)$ e notare che se $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ allora $f_c \in \mathcal{R}(I)$ per ogni $c \in \mathbb{R}^+$ valendo $f_c(x) = \min(f_n(x), c)$ per ogni scelta di un intero $n \geq c$. Inoltre è facile verificare che, per ogni coppia di reali $c < c'$, vale $f_c \leq f_{c'}$ e

$$\int_I f_c(x) dx \leq \int_I f_{c'}(x) dx.$$

Quindi esistono necessariamente i limiti seguenti

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_I f_c(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \ell \in [0, +\infty]$$

essendo rispettivamente la prima una funzione di c non decrescente e la seconda una successione in n anch'essa non decrescente. L'integrabilità della funzione f sarà quindi data dal fatto che $\ell \neq +\infty$. Se $\ell \in \mathbb{R}$ allora avremo $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ e diremo che l'integrale è **convergente**, altrimenti se $\ell = +\infty$ diremo che l'integrale è **divergente** e avremo $f \notin \widetilde{\mathcal{R}}(I)$.

Abbiamo visto la definizione per funzioni non negative, per funzioni che cambiano segno abbiamo la seguente definizione.

Definizione 51 (Integrale generalizzato). Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Tale funzione si dice **integrabile secondo Riemann in senso generalizzato** e scriveremo $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ se e solo se entrambe le funzioni f^+ e f^- sono funzioni integrabili secondo Riemann in senso generalizzato e definiremo

$$\int_I f(x) dx = \int_I f^+(x) dx - \int_I f^-(x) dx.$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max(f(x), 0) \quad \text{e} \\ f^-(x) &= \max(-f(x), 0) = -\min(f(x), 0) \end{aligned}$$

ed entrambe sono non negative.

Per le funzioni a segno variabile possiamo definire la funzione

$$f_c(x) := \begin{cases} c & \text{se } f(x) > c \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq c \\ -c & \text{se } f(x) < -c. \end{cases}$$

Proposizione 52. Se $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ allora vale

$$\int_I f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_I f_c(x) dx$$

Esercizio 53. Non vale il viceversa nella seconda proposizione!

Trovare una funzione definita sull'intervallo $(0, 1)$ definita costante a tratti tale che non valga il precedente limite. Idea: dividere in tre parti l'intervallo, nella prima assegnare il valore a_1 , nella seconda il valore $-a_1$. Il terzo intervallo sarà diviso nuovamente in tre parti: nella prima assegnare il valore a_2 , nella seconda il valore $-a_2$. Il terzo intervallo verrà ulteriormente diviso all'infinito. Scegliere in modo opportuno i valori della successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in modo che la somma delle aree positive diverga. Naturalmente la somma delle aree costruite ad ogni step è zero.

La prossima proposizione ci garantisce che la definizione di integrale generalizzato è stata ben posta.

Proposizione 54. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata allora

$$f \in \mathcal{R}(I) \iff f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$$

e gli integrali coincidono.

Proposizione 55. L'insieme $\widetilde{\mathcal{R}}(I)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} ovvero vale la proprietà di linearità dell'integrale.

Esercizio 56. Formalizzare la dimostrazione delle Proposizioni 54 e 55.

Esempio 57. Consideriamo $I = (0, 1]$ e la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Vale (per $n > 1$)

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 < x < \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Quindi

$$\int_I f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n^2}} n dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{n} + \left(2 - \frac{2}{n}\right)$$

cosicché $\lim_n \int_I f_n(x) dx = 2$. Quindi $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$.

Esempio 58. Consideriamo $I = (0, 1]$ e la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Vale (per $n > 1$)

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Quindi

$$\int_I f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x} = 1 - \log \frac{1}{n}$$

cosicché $\lim_n \int_I f_n(x) dx = +\infty$. Quindi $f \notin \widetilde{\mathcal{R}}(I)$.

Osservazione 59. Consideriamo ora $I = [-1, 1]$ e la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Possiamo calcolare facilmente, usando il fatto che la funzione f_n è dispari,

$$\int_{-1}^1 f_n(x) dx = 0, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Tuttavia abbiamo $f \notin \widetilde{\mathcal{R}}(I)$, usando i calcoli dell'esempio precedente.

Teorema 60. Sia $I = [0, 1]$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ non negativa. Supponiamo che per ogni $\delta > 0$ vale $f \in \mathcal{R}([\delta, 1])$. Allora $f_n \in \mathcal{R}(I)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e vale

$$\int_I f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 f(x) dx. \quad (7)$$

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e proviamo che $f_n \in \mathcal{R}([0, 1])$. Per ogni scelta di $\epsilon > 0$ scegliamo $\delta \in (0, 1)$ tale che soddisfi $n\delta \leq \epsilon/2$. Per ipotesi sappiamo che $f \in \mathcal{R}([\delta, 1])$ e quindi automaticamente $f_n \in \mathcal{R}([\delta, 1])$. Possiamo quindi, dato il valore $\epsilon/2 > 0$, trovare una partizione dell'intervallo $[\delta, 1]$

$$\delta = x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = 1$$

tale che

$$\sum_{j=2}^k \left(\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f_n - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f_n \right) (x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Possiamo aggiungere alla partizione il punto $x_0 = 0$ e ottenere la partizione di $[0, 1]$

$$0 = x_0 < \delta = x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = 1$$

e ottenere la stima

$$\sum_{j=1}^k \left(\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f_n - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f_n \right) (x_j - x_{j-1}) \leq n\delta + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

usando che sul primo intervallo vale $0 \leq f_n \leq n$ e $x_1 - x_0 = \delta$. Ho quindi provato che $f_n \in \mathcal{R}([0, 1])$. Poiché $f \geq 0$ valgono i seguenti limiti (in $[0, +\infty[$!)

$$\exists \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 f(x) dx = \sup_{\delta \in (0,1)} \int_{\delta}^1 f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{m}}^1 f(x) dx =: \ell_1, \quad (8)$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sup_n \int_0^1 f_n(x) dx =: \ell_2. \quad (9)$$

Vogliamo mostrare che $\ell_1 = \ell_2$ (potrebbero valere $+\infty$).

Dimostriamo che $\ell_1 \leq \ell_2$. Poiché $f \in \mathcal{R}([\frac{1}{m}, 1])$ per ogni $m \geq 2$, in particolare f è limitata su $[\frac{1}{m}, 1]$ e quindi esiste un $\bar{n} = \bar{n}(m)$ tale che $0 \leq f(x) \leq \bar{n}(m)$ per ogni $x \in [\frac{1}{m}, 1]$. Possiamo quindi calcolare

$$\int_{\frac{1}{m}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{m}}^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \ell_2$$

per ogni intero $n > \bar{n}(m)$. Abbiamo appena dimostrato che per ogni intero $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, possiamo ottenere la maggiorazione

$$\int_{\frac{1}{m}}^1 f(x) dx \leq \ell_2,$$

quindi passando al limite troviamo $\ell_1 \leq \ell_2$.

Dimostriamo che $\ell_2 \leq \ell_1$. Fissiamo un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$. Per ogni intero $m \geq 2$ vale

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{m}} f_n(x) dx + \int_{\frac{1}{m}}^1 f_n(x) dx \leq \frac{n}{m} + \int_{\frac{1}{m}}^1 f(x) dx,$$

dove usiamo che $f_n(x) \leq n$ per il primo integrale, e che $f_n(x) \leq f(x)$ per il secondo. Quindi passando al limite $m \rightarrow +\infty$ troviamo

$$\int_0^1 f_n(x) dx \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{n}{m} + \int_{\frac{1}{m}}^1 f(x) dx = 0 + \ell_1$$

Abbiamo dimostrato che per ogni intero $n \in \mathbb{N}$ possiamo ottenere la maggiorazione

$$\int_0^1 f_n(x) dx \leq \ell_1,$$

quindi passando al limite troviamo $\ell_2 \leq \ell_1$.

Segue quindi $\ell_1 = \ell_2$, quindi la tesi. □

Esercizio 61. *Il teorema precedente è stato enunciato focalizzando l'attenzione sull'estremo $x = 0$, riscrivere enunciato e dimostrazione per l'estremo $x = 1$.*

Successivamente sostituire l'intervallo $I = [0, 1]$ con un più generico intervallo $[a, b]$ e considerare il caso dell'estremo $x = a$ e quello dell'estremo $x = b$.

Infine, considerare un punto interno all'intervallo $c \in (a, b)$: il teorema si enuncia considerando gli intervalli $[a, c]$ e $[b, c]$ separatamente.

Osservazione 62. *Il precedente teorema, in particolare il limite in (7), potrebbe ricordare qualcosa di già visto alla scuola secondaria superiore.*

Inoltre nell'enunciato non si afferma che il limite è un valore reale, esso può essere anche $+\infty$.

Esempio 63. *Consideriamo $I = (0, 1]$ e $f(x) = x^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$. Mostriamo che*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha \in (0, 1).$$

Possiamo facilmente calcolare, se $\alpha \in (0, 1)$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_\delta^1 = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Se invece $\alpha = 1$ otteniamo

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [\log x]_\delta^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} -\log \delta = +\infty.$$

Infine, se $\alpha > 1$, essendo $\frac{1}{x^\alpha} > \frac{1}{x}$ otteniamo anche in questo caso un integrale divergente.

Esercizio 64. Nel precedente esercizio abbiamo usato la proprietà di monotonia per l'integrale. Dimostrare che essa vale anche per gli integrali generalizzati:

- date due funzioni non negative $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I$, e tali che sia $f_n = \min(f, n)$ che $g_n = \min(g, n)$ appartengano a $\mathcal{R}(I)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora vale

$$\int_I f(x) dx = \lim_n \int_I f_n(x) dx \leq \lim_n \int_I g_n(x) dx = \int_I g(x) dx.$$

In particolare,

- se $g \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ allora anche $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$,
- viceversa, se vale $\int_I f(x) dx = +\infty$ allora $\int_I g(x) dx = +\infty$.

2.2 Integrazione di funzioni su intervalli illimitati

In questa sezione considereremo un intervallo illimitato del tipo $I = [a, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Per esercizio riscrivere questa sezione nel caso della scelta $I = (-\infty, b]$.

Definizione 65 (Integrale generalizzato 2 - $f \geq 0$). Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa. Essa si dice integrabile secondo Riemann in senso generalizzato e scriveremo $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ se

- per ogni $b \in I$ vale $f \in \widetilde{\mathcal{R}}([a, b])$,
- esiste reale il limite $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$.

Osservazione 66. Nella precedente definizione, essendo la funzione f non negativa, il limite $\mathcal{I}(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ necessariamente esiste essendo la funzione \mathcal{I} non decrescente. Quindi se

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \ell \in \mathbb{R}$$

diremo che l'integrale converge, mentre se

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = +\infty$$

diremo che l'integrale diverge.

Notiamo che nella precedente definizione chiediamo che su ogni intervallo limitato $[a, b]$ la funzione sia integrabile secondo Riemann in senso generalizzato secondo quanto esposto nella definizione precedente. In particolare potrebbe essere non limitata.

Definizione 67 (Integrale generalizzato 2). Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Essa si dice integrabile secondo Riemann in senso generalizzato e scriveremo $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ se e solo se sia f^+ che f^- appartengono a $\widetilde{\mathcal{R}}(I)$. Avremo quindi

$$\int_I f(x) dx = \int_I f^+(x) dx - \int_I f^-(x) dx.$$

Definizione 68. Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann in senso generalizzato e scriveremo $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(\mathbb{R})$ se e solo se le restrizioni agli intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$ sono anch'esse integrabili secondo Riemann in senso generalizzato, ovvero

$$f \in \widetilde{\mathcal{R}}(\mathbb{R}) \iff f|_{(-\infty, 0]} \in \widetilde{\mathcal{R}}((-\infty, 0]) \quad e \quad f|_{[0, +\infty)} \in \widetilde{\mathcal{R}}([0, +\infty)).$$

e varrà

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

Anche in questo caso continua a valere la proprietà di linearità dell'integrale e la proprietà di monotonia.

Esempio 69. Consideriamo $I = [0, +\infty)$ e la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Abbiamo $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I)$ e vale

$$\int_I f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

Esempio 70. Consideriamo $I = [1, +\infty)$ e la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Abbiamo $f \notin \widetilde{\mathcal{R}}(I)$, infatti vale

$$\int_I f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\log x]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \log b = +\infty.$$

Esempio 71. Consideriamo $I = [1, +\infty)$ e la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Possiamo calcolare

$$\int_I f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

Scegliendo $\alpha > 1$ otteniamo un valore reale, mentre se $0 < \alpha < 1$ otteniamo che l'integrale diverge.

Esempio 72. Consideriamo ora una funzione non negativa $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e assumiamo $f \in \mathcal{R}([0, m])$ per ogni intero $m \in \mathbb{N}$. Possiamo scrivere

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^m f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \sum_{k=0}^\infty a_k,$$

dove abbiamo definito

$$a_k = \int_k^{k+1} f(x) dx.$$

Proposizione 73. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione e $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita costante a tratti

$$f(x) = a_n, \quad \text{se } x \in [n, n+1).$$

Allora esiste reale il limite $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$ se e solo se la serie $\sum_{n=0}^\infty a_n$ è convergente. In tal caso

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx = \sum_{n=0}^\infty a_n.$$

Dimostrazione. “ \Rightarrow ” Supponiamo che esista il limite $\ell := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$ allora vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n+1} f(x) dx = \ell.$$

“ \Leftarrow ” Supponiamo ora che esista il limite $S := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$, allora dalla definizione di limite e dal fatto che la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è necessariamente infinitesima deduciamo che per ogni $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k - S \right| &\leq \frac{\epsilon}{2}, \\ \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1 \quad |a_n| &\leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Prendendo quindi $b > \max\{n_0, n_1\} + 1$, e scrivendo con $[b]$ la sua parte intera, otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b f(x) dx - S \right| &\leq \left| \int_0^{[b]} f(x) dx - S \right| + \left| \int_{[b]}^b f(x) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{[b]-1} a_k - S \right| + a_{[b]}(b - [b]) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \cdot 1 = \epsilon. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx = S.$$

□

Osservazione 74. Dobbiamo distinguere il concetto di integrale generalizzato, dal concetto di integrale improprio (che lo studente potrebbe aver visto alla scuola secondaria superiore). L'integrale di Riemann generalizzato chiede che siano convergenti sia l'integrale di f^+ che quello di f^- , mentre l'integrale improprio richiede semplicemente che il limite $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$ esista in \mathbb{R} . L'integrale improprio quindi tollera che aree di segno opposto si cancellino, mentre l'integrale generalizzato non lo permette. A titolo di esempio, usando le notazioni della proposizione precedente, se f è definita costante a tratti tramite la successione

$$a_{2n} = \frac{1}{n}, \quad a_{2n+1} = -\frac{1}{n}$$

abbiamo che f è integrabile in senso improprio e troviamo che l'integrale vale zero, mentre non lo è in senso generalizzato, non essendole le funzioni f^+ e f^- .

Sfruttando i risultati precedenti possiamo quindi concludere con la seguente osservazione.

Osservazione 75. Consideriamo la funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita come nella Proposizione 73. Avremo che

- f è integrabile in senso improprio se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente,
- f è integrabile in senso generalizzato se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente.

Teorema 76 (Criterio integrale di convergenza per serie). Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva decrescente, allora l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ è convergente \iff la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ è convergente.

Dimostrazione. Per il teorema di integrabilità delle funzioni monotone, notiamo che vale $f \in \mathcal{R}([0, b])$ per ogni $b \in \mathbb{R}^+$.

Dal fatto che f è decrescente deduciamo che $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ per ogni $x \in [n, n+1]$. Quindi $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$ e

$$\sum_{k=0}^n f(k+1) \leq \int_0^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^n f(k).$$

Effettuando un cambio di indice al membro sinistro troviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale

$$s_{n+1} - f(0) = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^n f(k) = s_n, \quad (10)$$

dove $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è la successione delle ridotte di $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$.

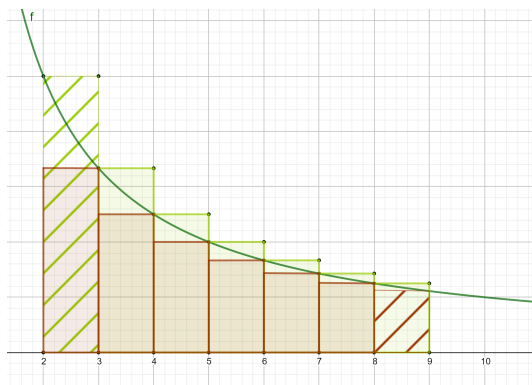


Figura 2: vedi dimostrazione del Teorema 76.

Poiché la funzione f è positiva allora esiste il limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx = \sup_n \int_0^n f(x) dx$$

e inoltre esiste il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sup_n s_n \in [0, +\infty].$$

Definiamo quindi $S := \sup_n s_n$ e $I := \sup_n \int_0^n f(x) dx$.

Mostriamo che vale “ \Rightarrow ”. Essendo $I < +\infty$ dalla formula (10) segue $s_{n+1} \leq I + f(0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi segue facilmente

$$S = \sup_n s_n \leq I + f(0) < +\infty.$$

Mostriamo ora che vale “ \Leftarrow ”. Poiché $S < +\infty$, usando la formula (10), abbiamo la stima $\int_0^{n+1} f(x) dx \leq s_n \leq S$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi

$$I = \sup_n \int_0^n f(x) dx \leq S < +\infty.$$

□

3 Serie di potenze

Consideriamo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in \mathbb{R} e sia $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce **serie di potenze** l’espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

In questa sezione tratteremo per semplicità il caso $x_0 = 0$ ottenendo quindi l’espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Esercizio 77. La teoria si adatta facilmente al caso $x_0 \neq 0$ semplicemente con la traslazione $x \mapsto x - x_0$. Riscrivere i prossimi enunciati nel caso di serie di potenze con $x_0 \neq 0$.

In questa sezione cercheremo di rispondere alla domanda: “Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ l’espressione (11) individua una serie convergente? In che modo converge? Assolutamente o semplicemente?”

Innanzitutto, precisiamo che si pone per convenzione, nella formula (11), $x^n = 1$ quando abbiamo $x = 0$ e $n = 0$. Di conseguenza vale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0$ quando poniamo $x = 0$. Quindi abbiamo già scoperto che ogni serie di potenze (11) converge per $x = 0$.

C'è la possibilità di studiare le serie di potenze con $x \in \mathbb{C}$ e $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, ma non è argomento di questo corso.

Teorema 78. *Data la serie di potenze (11), se essa converge per $x \neq 0$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge assolutamente per ogni y tale che $|y| < |x|$.*

Dimostrazione. Sia y tale che $|y| < |x|$, allora esiste $b > 0$ tale che $|y| < b < |x|$ per cui troviamo

$$|a_n y^n| = |a_n| |y|^n < |a_n| b^n = |a_n| |x|^n \left(\frac{b}{|x|} \right)^n.$$

Dalla convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ segue che $\lim_n a_n x^n = 0$ e quindi la successione $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e quindi

$$|a_n y^n| \leq |a_n x^n| \left(\frac{b}{|x|} \right)^n \leq M \left(\frac{b}{|x|} \right)^n,$$

dove M è tale che $|a_n x^n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora abbiamo

$$\sum_{k=0}^n |a_k y^k| \leq M \sum_{k=0}^n \left(\frac{b}{|x|} \right)^k \leq M \cdot \frac{1}{1 - \frac{b}{|x|}},$$

da cui la tesi. □

Definiamo

$$\mathcal{R} := \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \text{ è convergente} \right\}. \quad (12)$$

Notiamo che l'insieme di cui calcoliamo l'estremo superiore non è vuoto: contiene lo zero. Quindi \mathcal{R} è ben definito. \mathcal{R} si dice **raggio di convergenza** della serie (11). In particolare

- (a) se $\mathcal{R} = 0$ allora la serie di potenze converge solo per $x = 0$;
- (b) se $\mathcal{R} = +\infty$ allora la serie di potenze converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$;
- (c) se $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ allora la serie di potenze
 - (c1) converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R} : |x| < \mathcal{R}$
 - (c2) non converge $\forall x \in \mathbb{R} : |x| > \mathcal{R}$
 - (c3) per $x = \pm \mathcal{R}$ bisogna studiare la convergenza.

Esercizio 79. *Dimostrare i punti (a),(b),(c) dell'elenco precedente usando il Teorema 78 e la definizione di raggio di convergenza data in (12). Naturalmente il punto (c3) non necessita di una dimostrazione.*

Esercizio 80. *Studiare la convergenza della serie di potenze (11) nel caso di una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ costante.*

Teorema 81. *Data la serie di potenze (11), supponiamo esista il limite $L = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ allora*

- se $L = +\infty$ allora $\mathcal{R} = 0$,
- se $L \in \mathbb{R}$ allora $\mathcal{R} = 1/L$,
- se $L = 0$ allora $\mathcal{R} = +\infty$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal criterio della radice.

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} |x| = L|x|.$$

Se $L = +\infty$ allora il limite vale infinito per ogni scelta di $x \neq 0$ e quindi la serie non converge per ogni $x \neq 0$. Se $L = 0$ allora il limite vale zero per ogni scelta di $x \in \mathbb{R}$ e quindi la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se invece $L \in \mathbb{R}$, usando il criterio della radice, per l'assoluta convergenza dobbiamo avere $|x| < 1/L$, se invece $|x| > 1/L$ la serie non converge. Il caso $|x| = 1/L$ è il caso in cui non si può dire nulla. A questo punto riconosciamo che $1/L$ soddisfa la definizione di raggio di convergenza. \square

Osservazione 82. *Del precedente teorema esiste una versione più generale nota come Teorema di Cauchy-Hadamard.*

Teorema 83. *Data la serie di potenze (11), supponiamo esista il limite $L = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ allora*

- se $L = +\infty$ allora $\mathcal{R} = 0$,
- se $L \in \mathbb{R}$ allora $\mathcal{R} = 1/L$,
- se $L = 0$ allora $\mathcal{R} = +\infty$.

Esercizio 84. *Scrivere la dimostrazione del precedente teorema, ragionando come nella dimostrazione del Teorema 81, usando stavolta il criterio del rapporto.*

Esempio 85. *Scrivere i dettagli dei seguenti facili esempi.*

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2} x^n$ diverge per $x \neq 0$ essendo $\lim_n \sqrt[n]{e^{n^2}} = +\infty$ e quindi $\mathcal{R} = 0$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} x^n$ ha raggio di convergenza $\mathcal{R} = 1$, quindi converge assolutamente per $|x| < 1$. Nel caso $|x| = 1$ si vede immediatamente che essa converge semplicemente per $x = 1$ mentre diverge per $x = -1$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ ha raggio di convergenza $\mathcal{R} = 1$, quindi converge assolutamente per $|x| < 1$. Nel caso $x = 1$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge, poi per $x = -1$ troviamo che la serie è assolutamente convergente.

Teorema 86. *Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avente raggio di convergenza $\mathcal{R} > 0$, allora per ogni $x \in (-\mathcal{R}, \mathcal{R})$ possiamo definire*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

La funzione $S : (-\mathcal{R}, \mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ così definita¹ è continua.

Per la dimostrazione di questo teorema servono nozioni aggiuntive rispetto a quelle finora introdotte. Per una dimostrazione si rimanda al Capitolo 13 del Giusti, al Capitolo 7 del Bramanti Pagani Salsa oppure al Capitolo 1 del Fusco Marcellini Sbordone.

Consideriamo ora $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ e una funzione $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile infinite volte. Di questa possiamo scrivere il polinomio di Taylor di grado n che la approssima in un intorno di x_0 e ottenere

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

dove R_n è una funzione resto tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

¹La funzione S può essere estesa anche ai valori $x = \mathcal{R}$ o $x = -\mathcal{R}$ qualora si abbia convergenza della serie di potenze in questi punti.

Possiamo definire la **serie di Taylor** di f in x_0 come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (13)$$

Come si vede essa è una serie di potenze. Nel caso particolare in cui $x_0 = 0$ si ottiene la *serie di Taylor-MacLaurin*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Definizione 87 (Funzione analitica). *Una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile infinite volte su (a, b) , si dice analitica se per ogni $x_0 \in (a, b)$ esiste $\delta > 0$ tale che la serie di Taylor (13) converge a f per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ovvero tale che*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Esempio 88. • $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

• $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ per ogni $x \in (-1, 1]$.

• $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

Esercizio 89. *Scrivere le serie di Taylor-MacLaurin delle funzioni seno, coseno, tangente, arcotangente, seno iperbolico, coseno iperbolico, tangente iperbolica, $\log(1-x)$, $(1-x)^{-2}$ e studiarne il raggio di convergenza.*

Esistono funzioni derivabili infinite volte che non sono analitiche.

Esempio 90. *La funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-1/x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

non è analitica in un intorno dello zero. Infatti (verificare i calcoli) per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste continua la derivata di ordine k , $f^{(k)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ed essa soddisfa $f^{(k)}(0) = 0$. A questo punto il polinomio di Taylor-MacLaurin di grado n della funzione f è il polinomio nullo $P_n(x) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la serie di Taylor associata ha somma nulla. Tuttavia chiaramente $f \neq 0$ e quindi la serie di Taylor associata ad f non coincide con la funzione f in un intorno di zero.

Nota 6. *In quanto segue è importante saper usare bene gli indici nelle sommatorie.*

Data la generica serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (14)$$

possiamo definire la sua **serie derivata**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (15)$$

e la sua **serie integrale**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \quad (16)$$

Teorema 91. *Sia \mathcal{R} il raggio di convergenza di una serie di potenze (14) allora la serie derivata (15) e la serie integrale (16) hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Per la dimostrazione, potrebbe essere utile rivedere la definizione di raggio di convergenza data in (12).

Dimostrazione. Sia \mathcal{R} il raggio di convergenza della serie (14) e \mathcal{R}' il raggio di convergenza di (15). Mostriamo dapprima che $\mathcal{R}' \leq \mathcal{R}$. Prendiamo $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < \mathcal{R}'$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |na_n x^{n-1}|$ converge. La seguente maggiorazione

$$|a_n x^n| = |x| |a_n x^{n-1}| \leq |na_n x^{n-1}| \quad \forall n \geq |x|,$$

ci permette, usando il criterio del confronto, di affermare che anche la serie (14) converge assolutamente. Quindi $\mathcal{R}' \leq \mathcal{R}$.

Proviamo ora che $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$. Prendiamo $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < \mathcal{R}$ e consideriamo $y \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < |y| < \mathcal{R}$. Abbiamo

$$|na_n x^{n-1}| = n|a_n| \left| \frac{x}{y} \right|^{n-1} |y|^{n-1} = \left(\frac{n}{|y|} \left| \frac{x}{y} \right|^{n-1} \right) |a_n y^n|.$$

Essendo $|x/y| < 1$, il termine in parentesi va a zero per n che va a infinito.² Quindi esisterà $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|na_n x^{n-1}| \leq 1 \cdot |a_n y^n|$$

per ogni $n > \bar{n}$. Anche in questo caso, usando il criterio del confronto possiamo concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ converge assolutamente usando l'assoluta convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Quindi $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$.

Concludiamo quindi che $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.

Mostriamo ora che la stessa proprietà vale per la serie integrale.³ Sia \mathcal{R} il raggio di convergenza della serie (14) e \mathcal{R}' il raggio di convergenza di (16). Mostriamo dapprima che $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$. Prendiamo $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < \mathcal{R}$. Abbiamo

$$\left| \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right| = \frac{|x|}{n+1} |a_n x^n| \leq |a_n x^n|$$

per ogni $n > |x| - 1$ e concludiamo con il criterio del confronto. Proviamo ora che $\mathcal{R}' \leq \mathcal{R}$. Prendiamo $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < \mathcal{R}'$ e consideriamo $y \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < |y| < \mathcal{R}'$. Abbiamo

$$|a_n x^n| = \left(\frac{n+1}{|y|} \left| \frac{x}{y} \right|^n \right) \left| \frac{a_n}{n+1} y^{n+1} \right|$$

Essendo $|x/y| < 1$, anche in questo caso il termine in parentesi va a zero per n che va a infinito e si conclude con il criterio del confronto.⁴ \square

A questo punto, data una serie di potenze (14) con raggio di convergenza \mathcal{R} , le seguenti funzioni sono ben definite nell'intervallo $(-\mathcal{R}, \mathcal{R})$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n, \\ h(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n. \end{aligned}$$

Il prossimo enunciato giustifica l'introduzione delle serie (15) e (16) con il nome rispettivamente di serie derivata e serie integrale.

Teorema 92. *Valgono le seguenti identità: $g(x) = f'(x)$ e $h(x) = \int_0^x f(t) dt$.*

²Per esercizio dimostrare che

$$\lim_n \frac{n}{|y|} \left| \frac{x}{y} \right|^{n-1} = 0.$$

³Per la dimostrazione di questa parte si ragiona in modo simile, ma ci sono delle sottili differenze.

⁴Per esercizio scrivere i dettagli.

Nel caso si desideri reperire una dimostrazione di questo teorema si vedano i libri consigliati ai capitoli menzionati in precedenza.

Naturalmente possiamo definire anche le serie *derivata-seconda* e la serie *integrale-secondo*:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+2)(n+1)} x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} x^n.$$

Esempio 93. *La serie geometrica, come sappiamo dà come risultato*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

per ogni $x \in (-1, 1)$. Se passiamo alla serie integrale troviamo

$$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (17)$$

Invece, la serie derivata risulta

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n. \quad (18)$$

Moltiplicando per x troviamo

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

Esercizio 94. *Derivare l'espressione in (18) e integrare l'espressione in (17) per trovare rispettivamente la serie derivata-seconda e la serie integrale-secondo della serie geometrica.*