Spazi metrici
e funzioni continue

1 Richiami e nomenclatura

Prima di intraprendere la lettura è bene che il lettore abbia chiare le seguenti conoscenze:

spazio vettoriale, base di uno spazio vettoriale, coordinate rispetto ad una base, applicazioni lineari, spazio duale, matrici associate ad un'applicazione lineare, applicazioni bilineari e matrici associate, matrici ortogonali, isometrie, teorema spettrale.

Nel seguito vedremo diversi esempi di funzioni

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$$

dove A è il dominio della funzione. Le funzioni con dominio e codominio contenuti in uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^d$ si classificano come segue:

- Se $N = 1$ sono dette funzioni di variabile reale;
- Se $N > 1$ sono dette funzioni di variabile vettoriale;
- Se $M = 1$ sono dette funzioni a valori reale, o funzioni scalari;
- Se $M > 1$ sono dette funzioni a valori vettoriali.

Nota 1. *Il caso $N = 1, M = 3$ è il caso della legge oraria del moto di una particella nello spazio, il caso $N = 3, M = 1$, ad esempio, si ha per la funzione temperatura nello spazio, infine il caso $N = M = 3$ si ritrova quando si considerano campi di forze, come ad esempio il campo gravitazionale. Di funzioni con $N = M = 1$ se ne vedono a sufficienza nel primo corso di analisi.*

Scriveremo i vettori di $\mathbb{R}^N$ secondo questa notazione

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \,,$$

con i pedici che indicano le coordinate. Considerando un punto prefissato scriveremo

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0) \in \mathbb{R}^N$$

mettendo in apice lo zero.

Nel considerare una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ considereremo le sue *componenti* $f_1, \dots, f_M$ tali che

$$f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_M(x)\big) \,,$$

quindi avremo $f_k : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (componente k-esima) con $k = 1, \dots, M$.

Precisiamo inoltre che useremo, limitatamente agli spazi $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ le notazioni

$$P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,, P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \,;$$

$$P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,, P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \,.$$

dove gli zeri in apice sono tornati all'usuale posizione di pedice in quanto qui le coordinate sono in numero finito prefissato e non si crea confusione con gli indici.

Definizione 1.1 (Spazio metrico)**.** *Dato un insieme X è detta **distanza**, o **metrica**, una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che*

1. *$d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$. Inoltre vale $d(x, y) = 0 \iff x = y$;*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;*

3. $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ *per ogni* $x, y, z \in X$.

La coppia (X,d) *denota uno* ***spazio metrico****.*

Definizione 1.2 (Palla)**.** *In uno spazio metrico* (X,d)*, dati* $x_0 \in X$ *e* $R \in \mathbb{R}^+$*, diremo* ***palla di centro*** x_0 ***e raggio*** R *l'insieme*

$$B_R(x_0) = B(x_0, R) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < R\}.$$

Esempio 1.3. *Sia* $X = \mathbb{R}^N$*,* $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$*, possono essere definite le distanze*

- $d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2}$ *(distanza euclidea);*
- $d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|$*;*
- *fissato* $p > 1$*,* $d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$*;*
- $d_\infty(x,y) = \max_{k=1,\ldots,N} |x_k - y_k|$ *(distanza uniforme);*

Si osservi che il caso $p = 2$ *nel terzo punto coincide con la distanza euclidea. In Figura 1, sono riportate le palle di raggio 1 centrate in* $0 \in \mathbb{R}^2$*.*

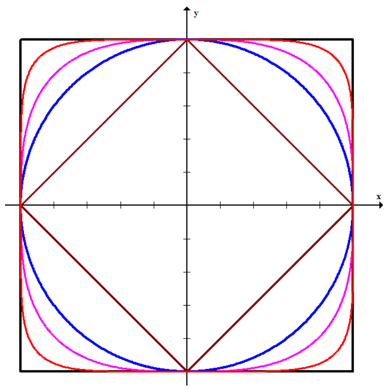

Figura 1: Dall'interno all'esterno, è disegnato il bordo delle palle $B_1(0)$ in $\mathbb{R}^2$ nelle distanze d_1 (il "rombo"), d_2 (la circonferenza), d_3, d_6, d_∞ (il quadrato). Si noti come per $p \to \infty$ il bordo della palla della distanza d_p tenda ad avvicinarsi al bordo della palla della distanza d_∞.

Definizione 1.4 (Norma)**.** *Dato uno spazio vettoriale* V *su* $\mathbb{R}$*, si dice norma una funzione* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *tale che*

1. $\|v\| \ge 0$ *per ogni* $v \in V$*. Inoltre vale* $\|v\| = 0 \iff v = 0$*;*

2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *per ogni* $v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

3. $\|v_1 + v_2\| \le \|v_1\| + \|v_2\|$ *per ogni* $v_1, v_2 \in V$*.*

La coppia $(V, \|\cdot\|)$ *denota uno* ***spazio vettoriale normato****.*

Definizione 1.5 (Prodotto scalare)**.** *Dato uno spazio vettoriale* V *su* $\mathbb{R}$*, si dice prodotto scalare* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *un'applicazione bilineare simmetrica definita positiva (si rimanda al corso di geometria per questa definizione). La coppia* $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *denota uno* ***spazio euclideo****.*

Osservazione 1.6. *Uno spazio euclideo è anche uno spazio normato in quanto possiamo definire canonicamente una norma a partire dal prodotto scalare:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x\,,\,x\rangle}\,.$$

Inoltre uno spazio normato è anche uno spazio metrico in quanto possiamo definire canonicamente una metrica a partire dalla norma:

$$d(x, y) = \|x - y\|\,.$$

Esempio 1.7. *Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^N$ possiamo definire il prodotto scalare canonico*

$$\langle x\,,\,y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k\,,$$

da cui si definisce la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}$. Ad essa è associata canonicamente la distanza euclidea.

Esempio 1.8. *In $\mathbb{R}^N$ possiamo definire anche altre norme: per ogni $p \geq 1$ la norma*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p}\,,$$

ha associata canonicamente la distanza d_p vista nell'Esempio 1.3. Inoltre la norma

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1,\ldots,N} |x_k|\,,$$

ha associata canonicamente la distanza d_∞ vista nell'Esempio 1.3. Esse non provengono da alcun prodotto scalare. Solo la distanza euclidea d_2 ha questo privilegio.

Osservazione 1.9. *Nel semplice caso unidimensionale $V = \mathbb{R}$ tutte le norme si riducono alla definizione del valore assoluto. Il prodotto scalare su $\mathbb{R}$ si riduce al semplice prodotto di numeri reali: $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\langle x\,,\,y\rangle = xy$. La distanza associata è quindi quella usuale $d(x, y) = |x - y|$.*

Ricordiamo inoltre la nota **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz** che vale in ogni spazio vettoriale euclideo:

$$|\langle x\,,\,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|\,, \qquad \forall x, y \in V$$

Inoltre, ricordiamo che data una matrice quadrata in $\mathbb{R}^{N\times N}$ vale

$$\langle Ax\,,\,y\rangle = \left\langle x\,,\,A^t y\right\rangle\,, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N\,,$$

dove abbiamo usato il simbolo "^{t}" per la trasposizione.

Tra le varie applicazioni lineari ricordiamo l'applicazione che ad ogni vettore associa la sua k-esima coordinata rispetto ad una base. In questo corso consideriamo sempre il caso dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^N$ con associata la base canonica. L'applicazione lineare

$$\Pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\,, \qquad \Pi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k\,,$$

sarà detta *proiezione sulla i-esima coordinata.*

Nota 2. *Ufficialmente una proiezione su $\mathbb{R}^N$ è un'applicazione $P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tale che $P^2 = P$, quindi la precedente definizione non è a tutti gli effetti una proiezione come vista in un corso di geometria. Per essere chiamata proiezione dovrebbe essere definita così: $\widetilde{\Pi}_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\widetilde{\Pi}_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k e_k$. Nel seguito tuttavia l'uso di $\widetilde{\Pi}_k$ risulterebbe scomodo, quindi chiediamo scusa al lettore per questo abuso di terminologia.*

Ricordiamo che ad ogni applicazione lineare è sempre associata una matrice, nel caso dell'applicazione Π_k si tratta di un vettore, infatti essa è un elemento dello spazio duale di $\mathbb{R}^N$.

Osservazione 1.10. *Lo spazio duale di $\mathbb{R}^N$ ha dimensione N ed è generato dalle proiezioni Π_k:*

$$(\mathbb{R}^N)^* = Span\{\Pi_1, \ldots, \Pi_N\} = \langle\Pi_1, \ldots, \Pi_N\rangle\,.$$

Con la notazione $Span\{...\}$ si intende "spazio vettoriale generato da". Inoltre le proiezioni Π_k sono spesso anche denotate con dx_k oppure e_k^*.

Definizione 1.11. *Dato $y^0 \in \mathbb{R}^M$, definiamo* applicazione costante *l'applicazione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tale che $f(x) = y^0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.*

Definizione 1.12. *Dato $y^0 \in \mathbb{R}^M$, definiamo* applicazione affine *l'applicazione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ data dalla somma di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con una funzione costante, ovvero $f(x) = L(x) + y^0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.*

2 Topologia

In questa sezione vedremo come si adattano definizioni come chiusura, intorno, punto di applicazione, per generici spazi metrici (e quindi in particolare in $\mathbb{R}^N$). Le definizioni sono molto simili a quelle già viste nell'ambito dello studio della topologia su $\mathbb{R}$ indotta dalla usuale distanza data dal valore assoluto.

Definizione 2.1 (Topologia). *Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $x_0 \in X$,*

- *diremo che $U \subseteq X$ è un intorno di x_0 se $\exists r > 0 \mid B_r(x_0) \subseteq U$;*
- *diremo che $A \subseteq X$ è un aperto di X se A è intorno di ogni suo punto, ovvero se $\forall x_0 \in A, \exists r > 0 \mid B_r(x_0) \subseteq A$;*
- *diremo che $C \subseteq X$ è un chiuso di X se il suo complementare C^c è aperto;*
- *definiamo* ***topologia*** *di X associata alla distanza d l'insieme di tutti gli aperti di X.*

Osservazione 2.2. *Le palle $B_r(x_0)$ sono aperti di X, infatti per ogni $x \in B_r(x_0)$ ponendo $d = r - d(x, x_0)$ abbiamo che $B_d(x) \subseteq B_r(x_0)$.*

Osservazione 2.3. *L'insieme $U \subseteq X$ è un intorno di $x_0 \in X$ se e solo se esiste un aperto $A \subseteq X$ tale che $x_0 \in A$ e $A \subseteq U$.*

Osservazione 2.4. *L'insieme vuoto e l'insieme X sono sia aperti che chiusi.*

Proposizione 2.5. *Consideriamo (X, d) spazio metrico.*

1. *Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia (eventualmente infinita) di aperti, ovvero ogni elemento A_i è un aperto di X per ogni indice $i \in I$, allora l'insieme*
$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$
è un aperto di X.

2. *Siano $A_1, \dots, A_n$ un insieme* FINITO *di aperti di X allora l'insieme*
$$A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$
è un aperto di X.

3. *Siano $C_1, \dots, C_n$ un insieme* FINITO *di chiusi di X allora l'insieme*
$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$$
è un chiuso di X.

4. *Sia $\{C_i\}_{i \in I}$ una famiglia (eventualmente infinita) di chiusi, ovvero ogni elemento C_i è un chiuso di X per ogni indice $i \in I$, allora l'insieme*
$$C = \bigcap_{i \in I} C_i$$
è un chiuso di X.

Dimostrazione. Dimostriamo il primo punto.
$$x_0 \in A \Rightarrow \exists i \in I \mid x_0 \in A_i \Rightarrow \exists r \mid B_r(x_0) \subseteq A_i \subseteq A\,.$$
Con questo ragionamento mostro che A è aperto. Il secondo punto è leggeremente differente:
$$x_0 \in A \Rightarrow \forall i \in I\, x_0 \in A_i \Rightarrow \forall i \in I\, \exists r_i \mid B_{r_i}(x_0) \subseteq A_i\,.$$
Poniamo $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. [1]
$$\Rightarrow \forall i\,, B_r(x_0) \subseteq B_{r_i}(x_0) \subseteq A_i \Rightarrow B_r(x_0) \subseteq A\,.$$

[1] In questo punto è cruciale il fatto che essi siano in numero finito. Se avessi infiniti aperti da intersecare dovrei considerare l'estremo inferiore dell'insieme dei raggi. Tale valore potrebbe essere zero: si pensi ad una successione di intervalli inscatolati in $\mathbb{R}$: l'intersezione degli aperti $A_i = (-1/n, 1/n)$, $i \in \mathbb{N}^+$, ha il solo elemento zero che non è un aperto.

Per i punti tre e quattro usando le proprietà del complementare ottengo

$$C^c = C_1^c \cap \cdots \cap C_n^c\,, \qquad C^c = \bigcup_{i \in I} C_i^c\,.$$

Usando i punti due e uno rispettivamente possiamo dimostrare che C^c è aperto, quindi C risulta chiuso. □

Definizione 2.6 (Interno di un insieme)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico. Dato un insieme $S \subseteq X$, diremo che $x \in X$ è un **punto interno** ad S se S è un intorno di x.*

Diremo interno di S, denotato con $\mathring{S}$ oppure $Int(S)$, l'insieme dei punti interni di S, ovvero

$$\mathring{S} = \{x \in X \mid \exists r\,, B_r(x) \subseteq S\}\,.$$

Proposizione 2.7. *Sia (X, d) uno spazio metrico.*

- *$\mathring{S} \subseteq S$;*
- *Per ogni aperto $A \subseteq S$ vale $A \subseteq \mathring{S}$;*
- *$\mathring{S}$ è aperto;*
- *$\mathring{S} = \bigcup\{A \text{ aperti } \mid A \subseteq S\}$.*

Dimostrazione. La prima proprietà segue immediatamente dalla definizione. Vediamo la seconda:

$$A \subseteq S\,, A \text{ aperto } \Rightarrow \forall x \in A\ \exists r \mid B_r(x) \subseteq A \subseteq S \Rightarrow x \in \mathring{S}\,.$$

Usiamo il secondo punto per dimostrare il terzo: per ogni $x \in \mathring{S}$ trovo r tale che $B_r(x) \subseteq S$. Considerando nel secondo punto l'aperto $A = B_r(x)$ trovo immediatamente $B_r(x) \subseteq \mathring{S}$, da cui concludo che $\mathring{S}$ è aperto. Resta da dimostrare il quarto punto. Dimostriamo "$\subseteq$". Prendendo $x \in \mathring{S}$ trovo come prima un aperto $A = B_r(x)$ che soddisfa $A \subseteq S$, quindi il punto x appartiene ad uno degli aperti A della famiglia di cui calcoliamo l'unione. Dimostriamo "$\supseteq$". Ogni aperto $A \subseteq S$, usando il punto due, è anche tale che $A \subseteq \mathring{S}$, quindi anche l'unione di tutti questi insiemi sarà contenuta in $\mathring{S}$. □

Proposizione 2.8. *Sia (X, d) uno spazio metrico e un sottinsieme $A \subseteq X$. A è aperto se e solo se $\mathring{A} = A$.*

Dimostrazione. Dimostriamo "$\Rightarrow$". Dal secondo punto della proposizione precedente, prendendo come aperto proprio l'insieme A giungiamo alla conclusione che $A \subseteq \mathring{A}$, dal primo punto invece abbiamo l'altra inclusione.

L'implicazione "$\Leftarrow$" segue dal terzo punto della proposizione precedente. □

Definizione 2.9 (Successione convergente)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione di punti di X. Diremo che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è **successione convergente** se esiste $x \in X$ tale che $\lim_n d(x_n, x) = 0$. Scriveremo semplicemente $\lim_n x_n = x$, dove x sarà detto **limite** della successione.*

Possiamo riscrivere la definizione di limite come vista in Analisi 1:

$$\lim_n x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n}\,,\, d(x_n, x) < \varepsilon\,.$$

Proposizione 2.10. *Il limite di una successione, se esiste, è unico.*

La dimostrazione di questa proposizione è lasciata per esercizio, ci si ispiri al corso di Analisi 1 per la dimostrazione.

Definizione 2.11 (Punti aderenti e chiusura)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico, consideriamo un suo sottinsieme $S \subseteq X$. Un elemento $x \in X$ si dice **punto aderente** di S se esiste una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tale che $\lim_n y_n = x$.*

*Diremo **chiusura** di S, denotata con $\overline{S}$ oppure $cl(S)$, l'insieme dei punti aderenti di S, ovvero*

$$\overline{S} = \left\{x \in X \mid \exists \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S \text{ tale che } \lim_n y_n = x\right\}\,.$$

Definizione 2.12 (Punti di accumulazione e derivato)**.** *Sia (X,d) uno spazio metrico, consideriamo un suo sottinsieme $S \subseteq X$. Un elemento $x \in X$ si dice **punto di accumulazione** di S se esiste una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S \setminus \{x\}$ tale che $\lim_n y_n = x$.*

*Diremo **derivato** di S, denotato con $\mathcal{D}(S)$, l'insieme dei punti di accumulazione di S, ovvero*

$$\mathcal{D}(S) = \left\{x \in X \mid \exists \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S \setminus \{x\} \textit{ tale che } \lim_n y_n = x\right\}.$$

La differenza tra le due definizioni sta nel fatto che la successione che definisce un punto di accumulazione non deve contenere l'elemento x. Invece, un punto $x \in S$ è automaticamente aderente: basta prendere la successione costante.

Proposizione 2.13. *Sia (X,d) uno spazio metrico, dato un sottinsieme $S \subseteq X$,*

$$x \in \overline{S} \iff \forall r > 0\, \exists y \in B_r(x) \cap S\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo "$\Rightarrow$". sappiamo che esiste una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tale che $\lim_n y_n = x$, quindi dalla definizione di limite abbiamo $\forall r > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n}\, d(y_n, x) < r$, quindi è proprio l'elemento $y_{\bar{n}}$ a dare la tesi.

Dimostriamo "$\Leftarrow$". Basta considerare per ogni intero $k \in \mathbb{N}^+$ il valore $r = 1/k$ che ci dà l'esistenza di un $y_k \in B_r(x) \cap S$. In questo modo possiamo costruire la successione richiesta. □

In modo analogo si dimostra quanto segue.

Proposizione 2.14. *Sia (X,d) uno spazio metrico, dato un sottinsieme $S \subseteq X$,*

$$x \in \mathcal{D}(S) \iff \forall r > 0\, \exists y \in B_r(x) \cap (S \setminus \{x\})\,.$$

Esercizio 2.15. *Sia (X,d) uno spazio metrico, dato un sottinsieme $S \subseteq X$,*

- $\mathcal{D}(S) \subseteq \overline{S}$*;*
- *se* $x \in \overline{S} \setminus S \Rightarrow x \in \mathcal{D}(S)$*;*
- $S \subseteq \overline{S}$*;*
- *La relazione* $\mathring{S} \subseteq \mathcal{D}(S)$ *vale per* $(X,d) = (\mathbb{R}^N, |\cdot|)$*, non vale per* $(X,d) = (\mathbb{Z}, |\cdot|)$

Osservazione 2.16. *Sia (X,d) uno spazio metrico, dato un sottinsieme $S \subseteq X$, se $x \in S \setminus \mathcal{D}(S)$ allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap S = \{x\}$. In questo caso x è detto **punto isolato** di S.*

Proposizione 2.17. *Sia (X,d) uno spazio metrico, dato un sottinsieme $S \subseteq X$,*

- *per ogni insieme chiuso* $C \supseteq S$ *vale* $C \supseteq \overline{S}$*;*
- $\overline{S}$ *è chiuso;*
- $\overline{S} = \bigcap\{C \textit{ chiusi } \mid C \supseteq S\}$.

Dimostrazione. Dimostriamo il primo punto. Dato il chiuso $C \supseteq S$, abbiamo che $A = C^c$ è un aperto tale che $A \cap S = \varnothing$. In particolare vale $A \cap \overline{S} = \varnothing$, infatti $\forall x \in A\, \exists r > 0 \mid B_r(x) \subseteq A$, quindi $B_r(x) \cap S = \varnothing$. Segue quindi che $\overline{S} \subseteq A^c = C$.

Dimostriamo il secondo punto provando che $A = (\overline{S})^c$ è aperto. Se A è vuoto, allora è aperto. Supponiamo quindi non sia vuoto, abbiamo

$$x \in A (x \notin \overline{S}) \Rightarrow \exists r > 0 \mid B_r(x) \cap S = \varnothing \Rightarrow \exists r > 0 \mid B_r(x) \subseteq S^c\,.$$

Vogliamo mostrare che vale $B_r(x) \subseteq (\overline{S})^c$. Prendiamo quindi un generico $y \in B_r(x)$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(y) \subseteq B_r(x) \subseteq S^c$. Ne consegue che $y \notin \overline{S}$ e quindi che $y \in (\overline{S})^c$. Quindi $B_r(x) \subseteq (\overline{S})^c$.

Per il terzo punto l'inclusione "$\subseteq$" segue dal primo punto di questa proposizione. L'inclusione "$\supseteq$" segue osservando che al membro destro possiamo prendere il chiuso $C = \overline{S}$ usando il terzo punto della proposizione precedente. □

Proposizione 2.18. *Sia (X, d) uno spazio metrico e un sottinsieme $C \subseteq X$. C è chiuso se e solo se $C = \overline{C}$.*

Dimostrazione. L'implicazione "$\Rightarrow$" sfrutta il primo punto della proposizione precedente, mentre per dimostrare "$\Leftarrow$" sfrutto il secondo punto. $\square$

Corollario 2.19. *Sia (X, d) uno spazio metrico, l'insieme $C \subseteq X$ è chiuso se e solo se ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ di punti di C convergente in X, converge a un punto di C.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Consideriamo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tale che $\lim_n x_n = x \in X$ allora dalla definizione di chiusura trovo che $x \in \overline{C} = C$ e ho la tesi.

"$\Leftarrow$" Prendiamo un punto $x \in \overline{C}$ allora esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tale che $\lim_n x_n = x$, usando l'ipotesi ho che in realtà vale $x \in C$. Ottengo $\overline{C} \subseteq C$, da cui segue immediatamente la tesi essendo l'altra inclusione sempre valida come già visto nell'Esercizio 2.15. $\square$

Definizione 2.20. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia dato un sottinsieme $S \subseteq X$. Diremo **frontiera** o **bordo** di S, denotato con ∂S, l'insieme dei punti (detti di frontiera) $x \in X$ tali che $x \in \overline{S} \cap \overline{S^c}$ ovvero tali che esistono due successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S^c$ tali che $\lim_n x_n = x$ e $\lim_n y_n = x$.*

Proposizione 2.21. *Sia (X, d) uno spazio metrico, dato un sottinsieme $S \subseteq X$,*

$$x \in \partial S \iff \forall r > 0\, B_r(x) \cap S \neq \varnothing \wedge B_r(x) \cap S^c \neq \varnothing\,.$$

Esercizio 2.22. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia dato un sottinsieme $S \subseteq X$. Provare che*

- *∂S è chiuso e vale $\partial S \subseteq \overline{S}$ e $\partial S \subseteq \overline{S^c}$;*
- *$S \cup \partial S = \overline{S}$, $\mathring{S} \cup \partial S = \overline{S}$*
- *$\partial S = \partial(S^c)$;*
- *gli insiemi $Int(S)$, $Int(S^c)$ e ∂S sono a due a due disgiunti e vale*

$$Int(S) \cup Int(S^c) \cup \partial S = X\,.$$

- *C è chiuso se e solo se $\partial C \subseteq C$;*
- *C è chiuso se e solo se $\mathcal{D}(C) \subseteq C$.*

Definizione 2.23. *Sia (X, d) uno spazio metrico, un sottinsieme $S \subseteq X$ si dice limitato se*

$$\exists x_0 \in X\,, \exists r > 0 \mid S \subseteq B_r(x_0)\,.$$

Osservazione 2.24. *Sia (X, d) uno spazio metrico,*

- *Se S è un insieme limitato allora $\forall x \in X\,, \exists r > 0 \mid S \subseteq B_r(x)$. Quindi la scelta del punto x_0 nella definizione non è restrittiva;*
- *Se X è spazio normato e $S \subseteq X$ è limitato allora*

$$\exists r > 0 \mid \|y\| < r\, \forall y \in S\,,$$

  prendendo $x = 0$ nel punto precedente;
- *Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ successione convergente allora l'insieme $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitato.*

2.1 Sottoinsiemi di spazi metrici e metrica indotta

La prossima osservazione è basilare per gli argomenti trattati in questa sezione.

Osservazione 2.25 (Metrica indotta su sottinsiemi)**.** *Dato uno spazio metrico (X, d) e un sottinsieme $S \subseteq X$, possiamo definire lo spazio metrico (S, d) usando la distanza indotta dalla metrica su X:*

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \qquad \hookrightarrow \qquad d : S \times S \to \mathbb{R}\,.$$

Da questa nuova metrica introdotta su S possiamo definire aperti e chiusi rispetto a questa metrica.

Nota 3. *Per definire la palla di raggio r centrata in $x \in S$ è importante specificare quale spazio metrico consideriamo:*

$$\begin{aligned} \textit{se consideriamo } (X, d) \Rightarrow \quad & B_r^X(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}\,, \\ \textit{se consideriamo } (S, d) \Rightarrow \quad & B_r^S(x) = \{y \in S \mid d(x, y) < r\}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto gli apici per distinguere i due insiemi. Notiamo che $B_r^S(x) = B_r^X(x) \cap S$.

Nota 4. *La metrica indotta ci permette di dimenticare che S è un sottinsieme di uno spazio più grande X. La cosa può sembrare un po' strana, specie se si volesse considerare $S = \mathbb{Q}$ come sottinsieme di $X = \mathbb{R}$ con la distanza usuale $d(x, y) = |x - y|$ e indagare come sono fatti aperti e chiuso dello spazio metrico $(\mathbb{Q}, d)$. Tuttavia è quello che si fa automaticamente in Analisi 1: in fondo $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, ma per calcolare gli intorni su $\mathbb{R}$ mica si va a vedere come sono fatti gli intorni in $\mathbb{C}$! Se ci fossero dei dubbi nel leggere questa sottosezione, forse può essere utile leggere l'Esempio 2.27 qui sotto prima di leggere la proposizione.*

Proposizione 2.26. *Siano (X, d) uno spazio metrico e dato $S \subseteq X$ consideriamo lo spazio metrico (S, d) ottenuto con la metrica indotta.*

- *Sia $S_1 \subseteq S$, avremo che*
$$S_1 \textit{ è aperto in } S \iff \exists A \subseteq X \textit{ aperto di } X \ \mid S_1 = A \cap S\,;$$
- *Sia $S_1 \subseteq S$, avremo che*
$$S_1 \textit{ è chiuso in } S \iff \exists C \subseteq X \textit{ chiuso di } X \ \mid S_1 = C \cap S\,;$$
- *Se S è aperto di X allora*
$$S_1 \textit{ è aperto in } S \iff S_1 \textit{ è aperto in } X;$$
- *Se S è chiuso di X allora*
$$S_1 \textit{ è chiuso in } S \iff S_1 \textit{ è chiuso in } X.$$

Esempio 2.27. *Consideriamo lo spazio metrico $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, e il sottinsieme $S = [0, 1]$. Alcuni esempi di aperti di S gli insiemi del tipo*

$$\begin{array}{ll} (a, b) & \textit{con } 0 < a < b < 1\,, \\ (a, 1] & \textit{con } 0 < a < 1\,, \\ [0, b) & \textit{con } 0 < b < 1\,. \end{array}$$

Guardando al primo punto della proposizione precedente, notiamo che essi si ottengono intersecando intervalli aperti A di $\mathbb{R}$ con l'intervallo chiuso $S = [0, 1]$ (nell'ordine dobbiamo prendere $A = (a, b)$ nel primo caso e possiamo scegliere ad esempio $A = (a, 2)$ e $A = (-1, b)$ nei due casi restanti). Per quanto riguarda i chiusi di S la cosa invece è molto semplice, come segue dal quarto punto della proposizione: sono chiusi gli intervalli $[a, b]$ con $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Similmente se consideriamo $S' = (0, 1)$, usando il terzo punto della proposizione, è facile vedere che intervalli del tipo (a, b) con $0 \leq a < b \leq 1$, sono aperti di S', mentre un po' più interessante è notare che sono esempi di chiusi di S' intervalli come

$$\begin{array}{ll} [a, b] & \textit{con } 0 < a < b < 1 \\ [a, 1) & \textit{con } 0 < a < 1 \\ (0, b] & \textit{con } 0 < b < 1\,. \end{array}$$

In questo caso è obbligata la scelta $C = [a, b]$ nel primo caso, mentre possiamo scegliere ad esempio $C = [a, 2]$ e $C = [-1, b]$ negli altri due.

Come ultimo esempio ancora più strano prendiamo $S'' = \{0, 1/2, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ costituito da soli tre punti. Sono sia aperti che chiusi tutti i possibili sottoinsiemi di S''.

3 Spazi metrici completi

Definizione 3.1 (Successione di Cauchy)**.** *Sia (X,d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ si dice **successione di Cauchy** se*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall m,n \geq \bar{n}\, d(x_m, x_n) < \varepsilon\,.$$

La dimostrazione della seguente osservazione è lasciata per esercizio.

Osservazione 3.2. *Ogni successione convergente è una successione di Cauchy.*

Definizione 3.3 (Spazio metrico completo)**.** *Uno spazio metrico (X,d) si dice completo se ogni successione di Cauchy in X è convergente.*

Proposizione 3.4. *Sia (X,d) uno spazio metrico completo. Consideriamo un suo sottinsieme $S \subseteq X$ e la sua struttura indotta (S,d) di spazio metrico. Allora*

$$(S,d) \text{ è completo} \iff S \text{ è chiuso in } X\,.$$

Dimostrazione. "$\Leftarrow$" Consideriamo una successione di Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$, allora essa è anche successione di Cauchy in X. Essendo (X,d) completo allora vale $\lim_n x_n = x \in X$, ma poiché S è chiuso allora $x \in \overline{S} = S$. Quindi la successione è convergente in S.

"$\Rightarrow$" Mostriamo che vale $\overline{S} \subseteq S$. Sia $x \in \overline{S}$, allora esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S \subseteq X$ tale che $\lim_n x_n = x$. Poiché la successione converge in X allora è di Cauchy in X. Quindi è di Cauchy in S. La completezza di (S,d) mi dà che la successione converge ad un punto di S. Per l'unicità del limite tale punto deve essere x, quindi $x \in S$. □

Nella dimostrazione, nella parte "$\Rightarrow$", non usiamo la completezza di (X,d) quindi vale la seguente osservazione.

Osservazione 3.5. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Consideriamo un suo sottinsieme $S \subseteq X$ e la sua struttura indotta (S,d) di spazio metrico.*

Se (S,d) è completo allora S è chiuso in X.

Dimostrare per esercizio il seguente risultato.

Lemma 3.6. *Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^N$ e le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ da cui sono indotte dalle distanze d_1, d_2, d_∞. Allora*

$$\begin{array}{l} \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{N}\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq N\|x\|_\infty \end{array} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Definizione 3.7. *Due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ su uno spazio vettoriale V si dicono equivalenti se esistono due constanti c_1 e c_2 positive tali che*

$$c_1\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq c_2\|v\|_a\,, \forall v \in V\,.$$

Dimostrare che "essere norme equivalenti" costituisce una relazione di equivalenza. In particolare le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ su $\mathbb{R}^N$ sono equivalenti. Per una successione, la convergenza, o l'essere di Cauchy, è una proprietà legata alla norma scelta. Tuttavia se ho delle norme equivalenti possiamo scegliere la norma che preferiamo per valutarne queste proprietà. In particolare vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.8. *La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ è convergente in norma $\|\cdot\|_2$ se e solo se la successione è convergente in norma $\|\cdot\|_\infty$.*

La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ è di Cauchy in norma $\|\cdot\|_2$ se e solo se la successione è di Cauchy in norma $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 3.9. *Lo spazio $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio metrico completo.*

Corollario 3.10. *Lo spazio $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. La dimostrazione per $N = 1$ è stata data nel corso precedente. Poniamo quindi $N > 1$. Consideriamo una successione di Cauchy $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$, dotato della norma euclidea, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \geq \bar{n}\, \|x^m - x^n\|_2 < \varepsilon\,.$$

In particolare, usando la prima disequazione in Lemma 3.6,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \geq \bar{n}\, \|x^m - x^n\|_\infty < \varepsilon\,.$$

Ne consegue che la successione delle componenti $\{x^n_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $k = 1, \ldots, N$. Sfruttiamo ora che $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio metrico completo: ognuna di queste successioni converge ad un punto $\overline{x}_k \in \mathbb{R}$. In particolare, per ogni k,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \hat{n}_k \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \hat{n}_k\, |x^n_k - \overline{x}_k| < \varepsilon\,.$$

Sia $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N) \in \mathbb{R}^N$ e ponendo $\hat{n} = \max\{\hat{n}_1, \ldots, \hat{n}_N\}$, troviamo che

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \hat{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \hat{n}\, \|x^n - \overline{x}\|_\infty < \varepsilon\,.$$

Usando le stime del Lemma 3.6, troviamo anche

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \hat{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \hat{n}\, \|x^n - \overline{x}\|_2 < \varepsilon\sqrt{N}\,,$$

quindi $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ converge a $\overline{x} \in R^N$, rispetto alla norma euclidea. □

Nella precedente proposizione, si noti, è fondamentale che stiamo lavorando su $\mathbb{R}^N$ con $N < \infty$.

Inoltre si nota che possiamo ottenere la dimostrazione senza introdurre la norma euclidea e usare la Proposizione 3.8. Sostanzialmente, è più facile dimostrare il corollario, occorrono meno passaggi.

Definizione 3.11 (Spazio metrico compatto). *Uno spazio metrico (X, d) si dice compatto se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente in X.*

Un sottoinsieme $S \subseteq X$ di uno spazio metrico (X, d) si dice compatto se (S, d) è spazio metrico compatto, ovvero se ogni successione in S ammette sottosuccessione convergente in S.

Proposizione 3.12. *Se un sottinsieme $S \subseteq X$ è compatto allora è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Mostro che $\overline{S} \subseteq S$. Consideriamo $x \in \overline{S}$, allora esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ tale che $\lim_n x_n = x$. Essendo S compatto allora esiste una sottosuccessione convergente ad un punto $y \in S$. Per unicità del limite deve essere $x = y$ e quindi $x \in S$.

Mostro ora che S è limitato. Supponiamo che S non sia limitato e cerchiamo una contraddizione. Allora fissato un generico $x_0 \in S$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in S \mid d(x_n, x_0) > n\,.$$

Ho costruito una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ che per compattezza deve ammettere una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq S$ convergente ad un punto $x \in S$. Quindi dalla definizione di limite (fissato $\varepsilon = 1$)

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq k_0 \quad d(x_{n_k}, x) < 1\,,$$

da cui segue che, per ogni $k \geq k_0$,

$$n_k < d(x_{n_k}, x_0) < d(x, x_0) + d(x, x_{n_k}) < d(x, x_0) + 1\,,$$

portando ad una contraddizione essendo $n_k \nearrow \infty$. □

Teorema 3.13. *Sia $(\mathbb{R}^N, d)$, con la distanza euclidea e un suo sottinsieme K.*

$$K \text{ è compatto} \iff K \text{ è chiuso e limitato.}$$

Dimostrazione. Basta dimostrare l'implicazione "$\Leftarrow$". Poiché K è limitato allora

$$\begin{aligned} \exists M > 0 \mid \|x\|_2 \leq M\,, \forall x \in K \quad &\Rightarrow \quad \|x\|_\infty \leq M\,, \forall x \in K \\ &\Rightarrow \quad |x_k| \leq M\,, \forall x \in K\,, \forall k = 1, \ldots, N\,. \end{aligned}$$

Consideriamo una successione $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K \subset \mathbb{R}^N$, di cui consideriamo la successione $\{x_1^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ dei valori della prima componente. Allora questa successione è limitata in $[-M, M]$ dal ragionamento precedente e quindi ammette una sottosuccessione $\{x_1^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ convergente ad un certo $\overline{x}_1 \in \mathbb{R}$. A questo punto consideriamo la successione $\{x^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K \subset \mathbb{R}^N$ ottenuta scegliendo gli indici n_k suggeriti dal ragionamento precedente.

Consideriamo quindi i valori della seconda componente $\{x_2^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, anch'essa limitata in $[-M, M]$. Quindi passando ulteriormente ad una sottosuccessione troviamo che ammette limite $\overline{x}_2 \in \mathbb{R}$.

Continuando il ragionamento, dopo aver trovato l'N-esima sottosuccessione avremo ottenuto una sottosuccesione $\{x^j\}_{j\in I} \subseteq K \subset \mathbb{R}^N$ tale che per ogni componente vale $\lim_j x_k^j = \overline{x}_k$. Quindi avremo $\lim_j x^j = \overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N) \in K$, (il limite sta in K perché K è chiuso!) completando la dimostrazione. $\square$

Il punto chiave della dimostrazione è che lavoriamo in $\mathbb{R}^N$ con $N < \infty$. Possiamo estrarre un numero finito di sottosuccessioni e ottenere ancora una sottosuccessione. Anche se N fosse molto grande riusciremo sempre ad ottenere una sottosuccessione di indici che va a infinito. Invece non è possibile ripetere il ragionamento per uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ a dimensione infinita. Estraendo infatti iterativamente infinite sottosuccessioni da una successione di naturali, non otteniamo necessariamente un insieme infinito: ad esempio notiamo che

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq k\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \cap [k, +\infty) = \varnothing \,.$$

4 Funzioni continue

Definizione 4.1. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Sia $S \subseteq X$, $S \neq \varnothing$ e una funzione $f : S \to Y$. La funzione f si dice continua in un punto $x_0 \in S$ se*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in S \,:\, d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \,.$$

La funzione si dice continua in S, se è continua in x_0 per ogni $x_0 \in S$.

Dimostrare per esercizio la seguente proposizione.

Osservazione 4.2. *Data la funzione $f : S \subseteq X \to Y$, f è continua in $x_0 \in S$*

$$\iff \forall V \text{ intorno di } f(x_0)\, \exists U \text{ intorno di } x_0 \mid x \in U \cap S \Rightarrow f(x) \in V \,,$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \mid x \in B_\delta(x_0) \cap S \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \,.$$

Proposizione 4.3. *Data la funzione $f : S \subseteq X \to Y$, f è continua in S*

$$\iff f^{-1}(A) \text{ è aperto di } S \text{ per ogni aperto } A \subseteq Y \,,$$
$$\iff f^{-1}(C) \text{ è chiuso di } S \text{ per ogni chiuso } C \subseteq Y \,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà sugli aperti.
"$\Rightarrow$" L'obiettivo è dimostrare che per ogni $x_0 \in f^{-1}(A)$ esiste un intorno di x_0 (nella topologia di S) tutto contenuto in $f^{-1}(A)$, in particolare mostreremo che:

$$\forall x_0 \in f^{-1}(A)\; \exists \delta > 0 \mid B_\delta(x_0) \cap S \subseteq f^{-1}(A) \,.$$

A questo scopo consideriamo $x_0 \in f^{-1}(A)$ e notiamo che $f(x_0) \in A$ che è aperto quindi $\exists \varepsilon > 0 \mid B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq A$. Usando questo ε nella definizione di continuità troviamo che $\exists \delta > 0 \mid x \in B_\delta(x_0) \cap S \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq A$. Ne consegue quindi che $\forall x \in B_\delta(x_0) \cap S \,, x \in f^{-1}(A)$ e quindi che $B_\delta(x_0) \cap S \subseteq f^{-1}(A)$.
"$\Leftarrow$" Prendiamo un generico $x_0 \in S$ e un certo $\varepsilon > 0$. L'insieme $B_\varepsilon(f(x_0))$ è un aperto di Y essendo una palla. Allora per ipotesi $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ è aperto di S, ovvero esiste un aperto U di X tale che $U \cap S = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$. Si noti che $x_0 \in U$. Poiché U è aperto possiamo trovare un $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subseteq U$. Per ogni $x \in B_\delta(x_0) \cap S$ vale $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$. Quindi ho provato che f è continua in x_0, per ogni scelta di $x_0 \in S$.

Dimostriamo la proprietà sui chiusi ricordando la seguente proprietà che vale per ogni generico insieme $C \subseteq Y$:

$$S = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(C^c) \,, \qquad f^{-1}(C) \cap f^{-1}(C^c) = \varnothing \,.$$

"$\Rightarrow$" Dato C chiuso, allora C^c è aperto, allora dalla continuità, usando la proprietà sugli aperti appena dimostrata, segue che $f^{-1}(C^c)$ aperto in S. Ciò significa che esiste un aperto U di X tale che $U \cap S = f^{-1}(C^c)$. Segue quindi che che U^c è chiuso di X tale che $U^c \cap S = f^{-1}(C)$.
"$\Leftarrow$" Dimostriamo il fatto che f è continua sfruttando la proprietà degli aperti. Quindi il nostro intento ora è dimostrare che la controimmagine di un aperto è un aperto. Consideriamo quindi un qualsiasi aperto A di Y, allora A^c è chiuso e quindi $f^{-1}(A^c)$ è chiuso di S, quindi esiste un chiuso V di X tale che $V \cap S = f^{-1}(A^c)$. Segue quindi che che V^c è aperto di X tale che $V^c \cap S = f^{-1}(A)$. Quindi ho dimostrato che $f^{-1}(A)$ è un aperto di S e quindi f è continua. □

Osservazione 4.4. *La continuità di una funzione $f : S \subseteq X \to Y$ è strettamente legata alle topologie (e alle metriche) scelte su X e Y.*

Proposizione 4.5 (Continuità della funzione composta)**.** *Prendiamo (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) tre spazi metrici. Consideriamo due funzioni componibili: ovvero sia $S \subseteq X$, $S \neq \varnothing$, $f : S \to Y$; sia $S_1 \subseteq Y$ tale che $f(S) \subseteq S_1$ e la funzione $g : S_1 \to Z$. Consideriamo $x_0 \in S$ e $f(x_0) \in S_1$.*

Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$ allora la funzione composta $g \circ f : S \to Z$ è continua in x_0.

Lasciamo per esercizio la dimostrazione.

Nota 5. *Finora enfatizzavamo la condizione $S \neq \varnothing$ per dare un senso alla funzione introdotta, in quanto sarebbe del tutto inutile considerare una funzione avente come dominio l'insieme vuoto, da qui in avanti eviteremo di precisare questa condizione. Inoltre useremo spesso per le funzioni la notazione $f : S \subseteq X \to Y$ in cui specifichiamo che il dominio S della funzione f è contenuto in un insieme X su cui solitamente avremo la struttura di spazio metrico. Ovviamente Y è il codominio.*

4.1 Limiti

Definizione 4.6 (Limite di una funzione)**.** *Sia $f : S \subseteq X \to Y$, sia $x_0 \in \mathcal{D}(S)$ e $y_0 \in Y$, diremo che*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = y_0$$

se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in S \, , 0 < d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon \, .$$

Osservazione 4.7. *Notiamo che*

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = y_0 \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} d_Y(f(x), y_0) = 0 \, , \\ \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \mid x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap S \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(y_0) \, , \\ \iff \forall V_{y_0} \, \exists U_{x_0} \mid x \in (U_{x_0} \setminus \{x_0\}) \cap S \Rightarrow f(x) \in V_{y_0} \, , \end{aligned}$$

dove U_{x_0} e V_{y_0} sono intorni rispettivamente di x_0 e y_0.

Nota 6. *Abbiamo enfatizzato la condizione $x \in S$ all'interno del limite in quanto, in un generico spazio metrico (X, d) diverso da $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ il concetto di limite presenta maggiori difficoltà. Se consideriamo una funzione $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e colcoliamo un limite in un punto $x_0 \in (a, b)$ ad esso possiamo arrivate da sole due direzioni (una se scegliamo $x_0 = a$ o $x_0 = b$), mentre se trattiamo una funzione $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e vogliamo calcolare il limite in un punto $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, a questo punto possiamo arrivare da molte direzioni, mentre altre potrebbero essere negate dalla conformazione di A. Per farsi un'idea A potrebbe assumere un aspetto orrendo come in Figura 2.*

Definizione 4.8. *Sia $f : S \subseteq X \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathcal{D}(S)$ diremo che*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

se vale

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in S \, , x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap S \Rightarrow \begin{cases} f(x) > K \\ f(x) < K \, . \end{cases}$$

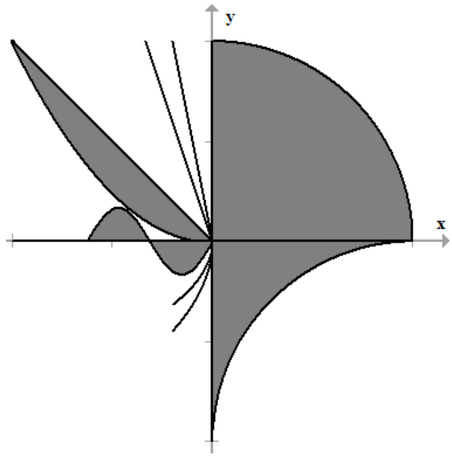

Figura 2: Un possibile insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ dall'aspetto *bizzarro* avente l'origine come punto d'accumulazione. Se vogliamo calcolare il limite di una funzione in $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ dobbiamo avvicinarci all'origine restando all'interno dell'insieme, ovvero $(x,y) \to (0,0)$, $(x,y) \in S$. Naturalmente non ci possiamo avvicinare all'origine in qualunque modo vogliamo.

Osservazione 4.9. *Come per la continuità, anche la definizione di limite è strettamente legata alla topologia (e quindi alla metrica) scelta per gli insiemi X e Y.*

Osservazione 4.10. *Come nel primo corso di analisi, per le funzioni $f : S \subseteq X \to \mathbb{R}$ valgono molti teoremi già visti: linearità dei limiti, teorema della somma, del prodotto, del quoziente, teorema del confronto, dei carabinieri, della permanenza del segno, teorema delle restrizioni.*

Proposizione 4.11. *Sia $f : S \subseteq X \to Y$, sia $x_0 \in S$ allora*

- *se $x_0 \notin \mathcal{D}(S) \Rightarrow x_0$ è punto isolato $\Rightarrow f$ è continua in x_0,*
- *se $x_0 \in \mathcal{D}(S)$ allora f è continua in $x_0 \iff \displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = f(x_0)$.*

Teorema 4.12. *Sia $f : S \subseteq X \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathcal{D}(S)$ e $y_0 \in Y$.*

- *Vale $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = y_0$ se e solo se*
$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \setminus \{x_0\} \mid \lim_n x_n = x_0 \Rightarrow \lim_n f(x_n) = y_0 \,.$$
- *Se $Y = \mathbb{R}$ allora vale $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$ se e solo se*
$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \setminus \{x_0\} \mid \lim_n x_n = x_0 \Rightarrow \lim_n f(x_n) = +\infty \quad (-\infty) \,.$$
- *f è continua in x_0 se e solo se*
$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \mid \lim_n x_n = x_0 \Rightarrow \lim_n f(x_n) = f(x_0) \,.$$

Lasciamo per esercizio la dimostrazione, ci si ispiri ai teoremi analoghi visti in Analisi 1. Anche in presenza di spazi metrici compatti, vale l'analogo del teorema di Weierstrass.

Teorema 4.13 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia (K,d) spazio metrico compatto, sia $f : K \to \mathbb{R}$ continua allora f ammette massimo e minimo su K.*

Per la dimostrazione, si prenda ispirazione dal teorema già visto su $\mathbb{R}$, che ora ne diventa un facile corollario.

Corollario 4.14. *Sia $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua dove $[a,b]$ è un intervallo limitato allora f ammette massimo e minimo su $[a,b]$.*

4.2 Funzioni a valori vettoriali

Consideriamo ora (X, d) spazio metrico, un insieme $S \subseteq X$, e un intero $M \geq 1$. Consideriamo una funzione $f : S \to \mathbb{R}^M$, avente componenti $f_k : S \to \mathbb{R}$ per ogni intero $k = 1, \dots, M$. Quindi possiamo scrivere $f(x) = (f_1(x), \dots, f_M(x))$.

Proposizione 4.15. *Siano $x_0 \in \mathcal{D}(S)$ e $y^0 = (y_1^0, \dots, y_M^0) \in \mathbb{R}^M$ allora*

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = y^0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} d(f(x), y^0) = 0 \in \mathbb{R}\,, \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} \|f(x) - y^0\| = 0 \in \mathbb{R}\,, \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) - y^0 = 0 \in \mathbb{R}^M\,, \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f_k(x) - y_k^0 = 0 \in \mathbb{R}\,, \qquad \forall k = 1, \dots, M\,.
\end{aligned}$$

Ne consegue che f è continua in x_0 se e solo se ogni componente f_k è continua in x_0 per ogni $k = 1, \dots, M$.

Per questo motivo possiamo limitarci a studiare le proprietà legate alla continuità di funzioni $f : S \subset X \to \mathbb{R}$. Per la continuità di funzioni $f : S \subset X \to \mathbb{R}^M$ sarà sufficiente studiare la continuità delle loro componenti.

5 Proprietà delle funzioni continue

Si noterà qui di seguito un elenco familiare di proprietà già viste in Analisi 1.

Linearità Date due funzioni $f, g : S \subseteq X \to \mathbb{R}^M$ con $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$. Se entrambe sono continue in $x_0 \in S$, allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la funzione $\lambda f + \mu g$ è continua in x_0.

Analogamente se entrambe le funzioni sono continue in S, allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la funzione $\lambda f + \mu g$ è continua in S. Quindi l'insieme delle funzioni continue in un certo insieme S ha la struttura di **spazio vettoriale**.

Prodotto e quoziente Date due funzioni $f, g : S \subseteq X \to \mathbb{R}$. Se entrambe sono continue in $x_0 \in S$, allora la funzione $f \cdot g$ è continua in x_0 e, se $g(x_0) \neq 0$, f/g è continua in x_0.

Composizione Data una funzione $f : S \subseteq X \to \mathbb{R}$ e una funzione $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(S) \subseteq D$ allora possiamo considerare la funzione composta $h : g \circ f : S \subseteq X \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $x_0 \in S$ e g è continua in $f(x_0)$ allora h è continua in x_0.

Ne consegue che il valore assoluto di f

$$|f| : S \subseteq X \to \mathbb{R}\,, \qquad |f|(x) := |f(x)|$$

è una funzione continua. Similmente se le funzioni $f, g : S \subseteq X \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0 allora le funzioni

$$\max(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}\,,$$

$$\min(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

sono continue in $x_0 \in S$.

Esempio 5.1. *Consideriamo due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) allora le funzioni costanti $f : X \to Y$, $f(x) = y_0 \in Y$, $\forall x \in X$, sono continue.*

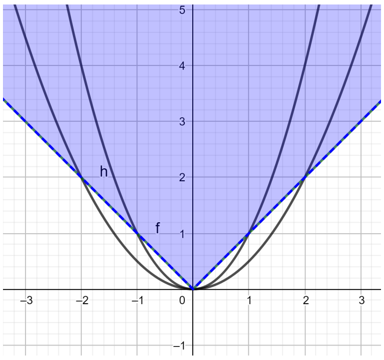

Figura 3: vedi Esercizio 5.5.

Esempio 5.2. *Per ogni $k = 1, \ldots, N$, la proiezione sulla k-esima coordinata $\Pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\Pi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k$, è continua. Quindi le applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sono continue, usando la proprietà di linearità:*

$$L(x) = a_1 x_1 + \ldots a_N x_N = a_1 \Pi_1 x + \ldots a_N \Pi_N x\,.$$

Quindi, ragionando per componenti anche le applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ sono continue.

Esempio 5.3. *Usando le proprietà viste, possiamo vedere che anche le seguenti funzioni sono continue:*

$$f; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) := \sin(xy) + e^{x^2+y^2}\,;$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \quad g(x,y,z) := \left(\frac{\log(1+x^2)}{y^2+z^2+1}\,, \sin\left(\frac{xy}{y^2+1}\right)\right)\,.$$

Esempio 5.4. *Consideriamo la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Notiamo immediatamente che $f(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(0,y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Inoltre se ci avviciniamo all'origine lungo la retta $y = mx$, troviamo $f(t, mt) = \frac{mt^3}{t^4+t^2}$ per ogni $t \neq 0$ e osserviamo che

$$\lim_{t\to 0} f(t, mt) = \lim_{t\to 0} \frac{mt^3}{t^4+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{mt}{t^2+1} = 0\,, \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{R}.$$

Tuttavia, nonostante ogni restrizione di f lungo una qualsiasi retta passante per l'origine sia una funzione continua, questo non è sufficiente a garantire la continuità di f. Infatti f non è continua in $(0,0)$: se prendiamo la restrizione di f lungo una parabola del tipo $y = ax^2$ troviamo, per ogni $t \neq 0$,

$$f(t, at^2) = \frac{at^4}{t^4 + a^2 t^4} = \frac{a}{1+a^2}\,.$$

Quindi le restrizioni di f lungo parabole del tipo $y = ax^2$ (con $a \neq 0$) sono funzioni costanti non nulle. Quindi

$$\lim_{t\to 0} f(t, at^2) = \frac{a}{1+a^2} \neq 0\,.$$

In particolare, tutti i punti della parabola $y = x^2$ hanno valore $\frac{1}{2}$, quindi $\exists \epsilon = \frac{1}{4} > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ esistono infiniti punti nella palla di raggio δ centrata nell'origine (quelli della parabola) tali che $|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{1}{2} > \epsilon$. Abbiamo quindi dimostrato che f non è continua in $(0,0)$.

Esempio 5.5. *Consideriamo la funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita come nell'esercizio precedente, ma avente dominio differente:*

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\right\}.$$

In questo caso, essendo $x^2 < y^2$ su E possiamo ottenere le seguenti maggiorazioni per ogni $(x, y) \in E \setminus \{0\}$:

$$0 \leq \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \leq \frac{y^3}{y^2} = y\,,$$

dove, per $(x, y) \to (0, 0)$ possiamo usare il teorema dei carabinieri. Quindi $f : E \to \mathbb{R}$ è continua.

Esercizio 5.6. *Dimostriamo la continuità della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

Cerchiamo anche in questo caso di utilizzare il teorema dei carabinieri. A questo scopo è utile ricordare che $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Supponendo $x^2 + y^2 \leq 1$, troviamo

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}\right| &\leq \frac{|x|^3 + |y|^4}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} + (x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} + (x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

dove il termine a destra va a zero per $(x, y) \to (0, 0)$.