MECCANICA RAZIONALE

Ing. Civile & Ambientale
Nautica

9 - marzo 2021

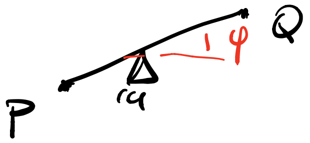
Principio dei lavori virtuali

- condizione per l'equilibrio
- olonomo, vincolo fissi
- L.V. ≤ 0 $\forall$ spostamento virtuale

Spostamento virtuale : $\delta \underline{x}_B(\tau)$

$$\delta \underline{x}_Q = \boxed{\frac{d}{d\varphi} \underline{x}_Q} \delta\varphi$$

nell' esempio



1 coord libera : $\underline{x}_Q = \underline{x}_Q(\varphi)$

$\underline{x}_P = \underline{x}_P(\varphi)$

Prendi $\underline{x}_Q$ come funzione di φ

e $\delta \underline{x}_Q = \frac{d \underline{x}_Q}{d\varphi} \delta\varphi$

$\underline{x}_Q(\varphi + \delta\varphi)$

In particolare se $\delta\underline{x}_Q$, $-\delta\underline{x}_Q$ esistono entrambi → invertibili

$\underline{F}_B$ forza attiva applicata in B

$$L.V. = \sum_{B \in S} \underline{F}_B \cdot \delta\underline{x}_B \leq 0$$

S sistema olonomo

B punti di applicazione delle forze attive $\underline{F}_B^{\text{attive}}$

$\delta\underline{x}_B$ spostamenti virtuali (= spostamenti linearizzati concessi dai vincoli)

$$\left[\text{Equilibrio di } S \iff \sum_{B \in S} \underline{F}_B^{\text{attive}} \cdot \delta\underline{x}_B \leq 0 \right]$$

se tutti gli spostamenti virtuali sono invertibili : $\sum_{B \in S} \underline{F}_B^{\text{attive}} \cdot \delta\underline{x}_B = 0$

Sistemi materiali soggetti al solo peso

S sistema di punti materiali (anche vincolato) e soggetto alla forza peso

Corpo materiale costituito solo un insieme di punti B.

$$\forall B \qquad m_B\, \underline{g}$$

$$\text{L.V. forza peso} = \sum_{B\in S}{}' \, m_B\, \underline{g}\cdot d\underline{x}_B$$

$$= \underline{g}\cdot\left(\sum_{B\in S}{}' \, m_B\, \delta\underline{x}_B\right) =$$

uso m_B costante

$$= \underline{g}\cdot \sum_{B\in S}{}' \, \delta\left(m_B\, \underline{x}_B\right)$$

$$= \boxed{\underline{g}\cdot \delta\left(\underbrace{\sum_{B\in S}{}' \, m_B\, \underline{x}_B}\right)}$$

δ lineare ("infinitesimi")

Ricordiamo: B punti di massa m_B in $\underline{x}_B$

$$M = \sum_{B \in S}' m_B$$ massa totale

$$\boxed{\underline{x}_G = \frac{\sum_{B \in S} m_B \underline{x}_B}{M}} \quad \left(\frac{\int \rho(\underline{x}) \underline{x} \, d\underline{x}}{\int \rho(\underline{x}) \, d\underline{x}} \right)$$

$$= \underline{g} \cdot \delta \left(\sum_{B \in S} m_B \underline{x}_B \right) =$$

$$= \underline{g} \cdot \delta \left(M \underline{x}_G \right) = M \underline{g} \cdot \delta \underline{x}_G$$

Abbiamo visto: il lavoro virtuale totale della forza peso è pari a $M\underline{g}$ per lo spostamento virtuale del centro di massa.

→ possiamo calcolare il lavoro virtuale come se il peso complessivo fosse applicato al centro di massa.

(ricordiamo: la forza peso è una forza distribuita)

PLV per sistemi a un grado di libertà

Sistema olonomo (bilateri, fissi, lisci)

→ 1 grado di libertà → 1 coordinata libera q.

Allora $\forall B \in S$, $\underline{x}_B = \underline{x}_B(q)$

è una funzione di q

Funzione regolare => allora

$$\delta \underline{x}_B = \frac{d\underline{x}_B}{dq}\,\delta q$$

$$q \longrightarrow q + \underline{\underline{\delta q}}$$

$$\underline{x}_B(q+\delta q) = \underline{\underline{x}_B(q)} + \boxed{\frac{d\underline{x}_B}{dq}}\,\underline{\underline{\delta q}} +$$

+ Termini di ordine più alto $\delta q^2, dq^3$ --

$$\to \delta\underline{x}_B := \frac{d\underline{x}_B}{dq}\,\delta q$$

Chiamiamo $\underline{F}_B^a$ risultante forze attive che agiscono su B

$$L.V. = \sum_{B\in S}{}' \underline{F}_B^a \cdot \delta \underline{x}_B =$$

$$= \sum_{B\in S}{}' \underline{F}_B^a \cdot \left(\frac{d\underline{x}_B}{dq} \delta q \right) =$$

$$= \left(\sum_{B\in S}{}' \underline{F}_B^a \cdot \frac{d}{dq} \underline{x}_{B(q)} \right) \delta q$$

$$= Q \, \delta q$$

Def $$Q := \sum_{B\in S}{}' \underset{\uparrow}{\underline{F}_B^a} \cdot \frac{d}{dq} \underset{\uparrow}{\underline{x}_B(q)}$$

forza (attiva) generalizzata relativa a q

$$\text{Equilibrio}: \quad L.V. = \sum{}' \underline{\underline{F}_B^a} \cdot \overset{\substack{\text{funzioni di } q \\ \downarrow}}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{non sono indipendenti}}}{\underline{\delta \underline{x}_B}}} = 0$$

$$= Q \, \underline{\underline{\delta q}}$$

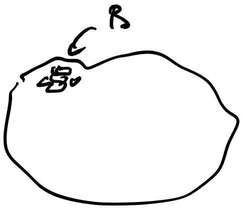
$Q\,\delta q = 0 \longrightarrow Q = 0$ condizione di equilibrio

(ad esempio $Q = p\,\underline{a \cos\varphi} - q\,\underline{b \cos\varphi}$
nel caso della leva)

Seconda parte

Sistemi 1 grado di libertà : q

$$LV = \sum_{B \in S}{}' \underline{F}^e_B \cdot \underline{\delta \underline{x}_B} = Q \boxed{\delta q}$$



$$Q = \sum \underline{F}^e_B \cdot \frac{d}{dq}\underline{x}_B$$

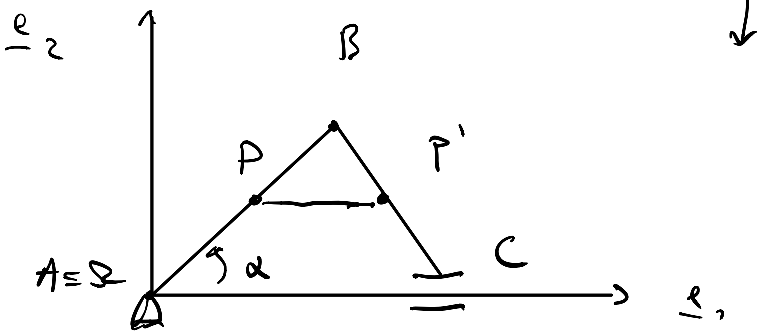
$\uparrow$ forze attive

$\uparrow$ geometria del sistema

$$\delta \underline{x}_B = \frac{d\underline{x}_B}{dq}\,\delta q$$

Esempio Problema diretto di statica :
dato l'equilibrio, determinare le forze che lo mantengono.

$\downarrow \underline{g}$



due aste rigide $\overline{AB} = \overline{BC}$, soggette al peso mantenute all'equilibrio da una fune tra P e P'. L'angolo α è dato. Quale è la tensione della fune?

Cosa fa la fune? Nel punto P

$$\underline{T} = \tau (\underline{x}_{P'} - \underline{x}_P) \qquad \tau > 0$$

→ diretta PP', ed è di trazione

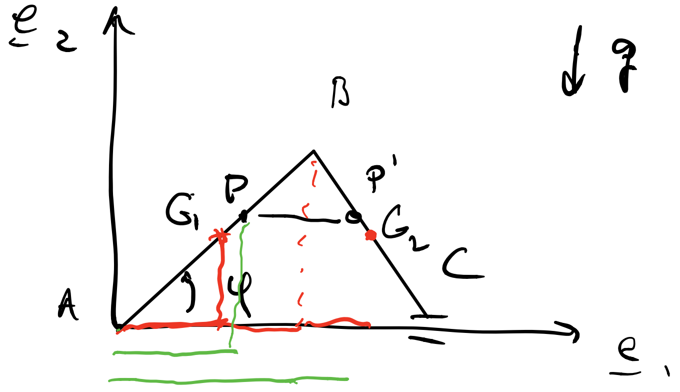
Per il principio di azione e reazione in P', abbiamo $-\underline{T}$

Alcuni dati: $\overline{AB} = \overline{BC} = \ell$, omogenee

$$m_{AB} = 2\, m_{BC} = 2m$$

$$P, P' \longrightarrow \overline{BP} = \overline{BP'} = \frac{2}{3}\ell$$

$$\alpha = B\hat{A}C = \frac{\pi}{3} \text{ all'equilibrio}$$



φ coordinata libera

(φ deve essere = α all'equilibrio)

LV = LV peso + LV fune

centro di massa : $AB \to 1 \quad G_1$
$BC \to 2 \quad G_2$

$$\underline{x}_{G_1} = x_{G_1} \underline{e}_1 + y_{G_1} \underline{e}_2$$

$$\underline{x}_{G_2} = x_{G_2} \underline{e}_1 + y_{G_2} \underline{e}_2$$

$$\underline{x}_{G_1} = \frac{\ell}{2} \cos\varphi \, \underline{e}_1 + \frac{\ell}{2} \sin\varphi \, \underline{e}_2$$

$$\underline{x}_{G_2} = \underbrace{\left(\ell \cos\varphi + \frac{\ell}{2} \cos\varphi \right)}_{\frac{3}{2}\ell\cos\varphi} \underline{e}_1 + \frac{\ell}{2} \sin\varphi \, \underline{e}_2$$

Posizioni di P, P' $\qquad \overline{BP} = \overline{BP'} = \frac{2}{3}\ell$

$\overline{AP} = \overline{P'C} = \frac{1}{3}\ell$

$$\underline{x}_P = \frac{1}{3}\ell \cos\varphi \, \underline{e}_1 + \frac{1}{3}\ell \sin\varphi \, \underline{e}_2$$

$$\underline{x}_{P'} = \left(\ell + \frac{2}{3}\ell \right) \cos\varphi \, \underline{e}_1 + \frac{1}{3}\ell \sin\varphi \, \underline{e}_2$$

Abbiamo $\underline{x}_{G_1}(\varphi)$, $\underline{x}_{G_2}(\varphi)$, $\underline{x}_P(\varphi)$, $\underline{x}_{P'}(\varphi)$

LV peso $\qquad \underline{g} = -g \, \underline{e}_2$

$$LV_{peso} = m_{AB} \, \underline{g} \cdot \delta \underline{x}_{G_1} + m_{BC} \, \underline{g} \cdot \delta \underline{x}_{G_2}$$

$$= m_{AB} \left(-g \, \underline{e}_2 \right) \cdot \left(\delta x_{G_1} \underline{e}_1 + \delta y_{G_1} \underline{e}_2 \right) +$$

$$+ m_{BC} (-g\, \underline{e}_2)\cdot \left(\delta x_{G_2}\, \underline{e}_1 + \delta y_{G_2}\, \underline{e}_2 \right)$$

$$= m_{AB} (-g\, \delta y_{G_1}) + m_{BC} (-g\, \delta y_{G_2})$$

$$= -g (m_{AB} + m_{BC})\, \delta \left(\frac{\ell}{2} \sin\varphi \right) =$$

$$= -g (m_{AB} + m_{BC})\, \frac{\ell}{2} \cos\varphi\, \delta\varphi$$

$$= \boxed{-g\, 3m\, \frac{\ell}{2} \cos\varphi\, \delta\varphi}$$

Lavoro virtuale fune

$$LV = \underline{T} \cdot \delta \underline{x}_P + (-\underline{T})\, \delta \underline{x}_{P'}$$

$$= \underline{T} \cdot (\delta \underline{x}_P - \delta \underline{x}_{P'}) =$$

$$= \tau\, \underbrace{(\underline{x}_{P'} - \underline{x}_P)}_{\text{definizione di } T} \cdot (\delta \underline{x}_P - \delta \underline{x}_{P'})$$

$$\underline{x}_P = \frac{1}{3} \ell \cos\varphi\, \underline{e}_1 + \frac{1}{3} \ell \sin\varphi\, \underline{e}_2$$

$$\rightarrow \underline{x}_{P'} = \underbrace{\left(\ell + \frac{2}{3} \ell \right)}_{\frac{5}{3}\ell} \cos\varphi\, \underline{e}_1 + \frac{1}{3} \ell \sin\varphi\, \underline{e}_2$$

$$\rightarrow \delta \underline{x}_P = -\frac{1}{3}\,\underline{\ell \sin\varphi\, \delta\varphi}\, \underline{e}_1 + \frac{1}{3}\,\underline{\ell \cos\varphi\, \delta\varphi}\, \underline{e}_2$$

$$\delta \underline{x}_{P'} = \boxed{-\frac{5}{3}}\,\ell \sin\varphi\, \delta\varphi\, \underline{e}_1 + \boxed{\frac{1}{3}\,\ell}\cos\varphi\, \delta\varphi\, \underline{e}_2$$

$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0$

$$\underline{x}_{P'} \cdot \delta \underline{x}_P = -\frac{5}{9}\,\ell^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \delta\varphi + \frac{1}{9}\,\ell^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \delta\varphi$$

$$= -\frac{4}{9}\,\ell^2 \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi$$

$$\underline{x}_{P'} \cdot \delta \underline{x}_{P'} = \left(\underline{-\frac{25}{9} + \frac{1}{9}} \right) \ell^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \delta\varphi$$

$$\underline{x}_P \cdot \delta \underline{x}_P = \left(\underline{-\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} \right) \ell^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \delta\varphi$$

$$\underline{x}_P \cdot \delta \underline{x}_{P'} = \left(\underline{-\frac{5}{9} + \frac{1}{9}} \right) \ell^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \delta\varphi$$

Tutto insieme: $\tau \left(\underline{x}_{P'} - \underline{x}_P \right) \cdot \left(\delta \underline{x}_P - d \underline{x}_{P'} \right)$

$$= \tau \left(-\frac{4}{9} + \frac{24}{9} + 0 - \frac{4}{9} \right) \ell^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \delta\varphi$$

$$= \tau\, \frac{16}{9}\, \ell^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \delta\varphi$$

Allora il LV totale, peso + fune

$$LV = \left(-\frac{3}{2}\, mg\ell \cos\varphi + \frac{16}{9}\, \tau \ell^2 \cos\varphi \sin\varphi \right) \delta\varphi$$

$$= \underline{Q(\varphi)}\ \underline{\delta\varphi}$$

$$Q(\varphi) = \left(-\frac{3}{2} mg + \frac{16}{9}\tau l \sin\varphi\right) l\cos\varphi$$

Problema: se l'equilibrio è per $\varphi = \alpha = \frac{\pi}{3}$, quanto vale τ?

$$Q\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 = \left(-\frac{3}{2} mg + \frac{16}{9}\tau l \sin\frac{\pi}{3}\right) l\cos\frac{\pi}{3}$$

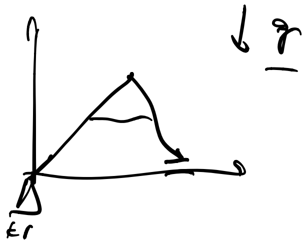
$$\to \frac{16}{9}\tau l \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} mg \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{9}{16}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{3}{2}\,\frac{mg}{l}}$$

Terza parte

Sistema 1 grado di libertà q

$$LV = Q\,\underline{\underline{\delta q}} \qquad Q = \sum_{P\in S} \underline{F}_P \cdot \frac{d\underline{x}_P}{dq}$$

esempio



$$Q(\varphi) = \left(-\frac{3}{2} \underline{\underline{ml}} + \frac{16}{9} \underline{\underline{\tau}}\, l \sin\varphi\right) l\cos\varphi$$

$\underline{\text{PLV}}$ per $\underline{\text{sistemi a } l \text{ gradi di libertà}}$

l gradi di libertà $= \underline{q} = (q_1, \dots, q_l)$

vogliamo $\delta \underline{x}_B (q_1, \dots, q_\ell)$

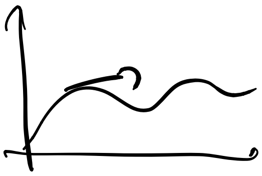
Siccome $(q_1, \dots, q_\ell)$ sono coordinate libere, otteniamo tutte le variazioni di $\underline{x}_B$ facendo variare le q_i indipendentemente

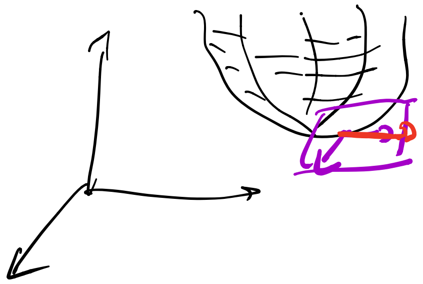
$q_1 \cdots q_\ell$: prendiamo q_1

$q_1 \to q_1 + \delta q_1$

$$\underline{x}_B (q_1 + \delta q_1, q_2, \dots, q_\ell) = \underline{x}_B(q_1, \dots, q_\ell) + \frac{\partial}{\partial q_1} \underline{x}_B(q_1, \dots, q_\ell)\, \delta q_1 + o(\delta q_1^2)$$

→ ripetere per $q_2 \cdots q_\ell$



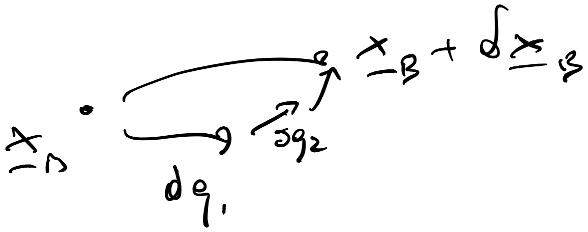


Per ottenere $\delta \underline{x}_B$, dobbiamo espandere in serie e prendere la parte lineare

$$\underline{x}_B(\underline{q} + \delta \underline{q}) = \underline{x}_B(\underline{q}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \underline{x}_B(\underline{q}) \right) \delta q_i}_{\frac{\partial}{\partial q_1} \underline{x}_B \delta q_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} \underline{x}_B \cdot \delta q_2 + \cdots} + O(\delta \underline{q}^2)$$

Coordinate libere sono indipendenti

→ spostamento virtuale generico $\delta \underline{x}_B$ è la somma degli spostamenti virtuali parziali $\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial q_i} \underline{x}_B(\underline{q}) \, \delta q_i$



Lavoro virtuale : $LV = \sum'_{B \in S} \underline{F}_B^a \cdot \delta \underline{x}_B$

$$= \sum'_{B \in S} \underline{F}_B^a \left(\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum'_{B \in S} \underline{F}_B^a \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \underline{x}_B(\underline{q}) \right) \delta q_i$$

Def : $Q_i = \sum'_{B \in S} \underline{F}_B^a \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \underline{x}_B(q)$

forza generalizzata relativa a q_i

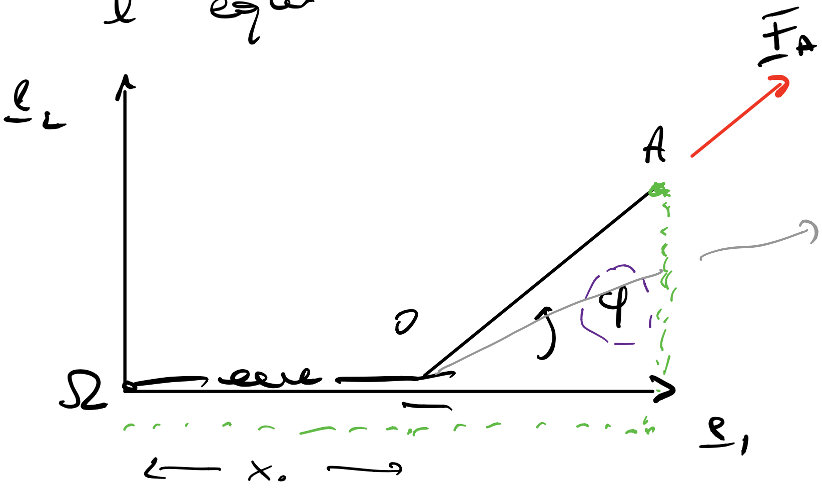
PLV : all' equilibrio $\boxed{\sum'_{B \in S} \underline{F}_B^a \cdot \delta \underline{x}_B = 0 \quad \forall \delta \underline{x}_B}$

$$\iff \sum_{i=1}^{\ell} Q_i \, \delta q_i = 0 \qquad \forall \, \delta q_1, \dots, \delta q_\ell$$

$$\iff \boxed{Q_i = 0} \qquad i = 1, \dots, \ell$$

ℓ eq. di equilibrio per ℓ gradi di libertà

Esempio Problema inverso in statica: date le forze agenti, determinare l'equilibrio



OA = ℓ

2 gradi di libertà

(x_0, φ)

Piano orizzontale

1) forza elastica in O $\quad \underline{F}_0 = -c\, x_0 \, \underline{e}_1$

2) forza "follower" in A

$$\underline{F}_A = f \operatorname{vers}(\underline{x}_A - \underline{x}_0) = f \frac{\underline{x}_A - \underline{x}_0}{\|\underline{x}_A - \underline{x}_0\|}$$

$$LV = \underline{F}_0 \cdot \delta \underline{x}_0 + \underline{F}_A \cdot \delta \underline{x}_A$$

$$\boxed{\underline{x}_0} = \underset{\uparrow}{x_0}\,\underline{e}_1 \longrightarrow \underline{\delta \underline{x}_0 = \delta x_0}\,\underline{e}_1$$

$$\boxed{\underline{x}_A} = (\underset{\uparrow}{x_0} + l\cos\varphi)\,\underline{e}_1 + l\sin\varphi\,\underline{e}_2$$

$$\delta\underline{x}_A = (\delta x_0 - l\sin\varphi\,\delta\varphi)\,\underline{e}_1 + l\cos\varphi\,\delta\varphi\,\underline{e}_2$$

$$= \underline{\delta x_0\,\underline{e}_1 + \delta\varphi(-l\sin\varphi\,\underline{e}_1 + l\cos\varphi\,\underline{e}_2)}$$

mettiamo tutto insieme

$$LV = (-c x_0\,\underline{e}_1)\cdot(\delta x_0\,\underline{e}_1)$$

$$+ \underbrace{f\,\frac{\underline{x}_A - \underline{x}_0}{\|\underline{x}_A - \underline{x}_0\|}}_{\underline{F}_A} \cdot \left[\delta x_0\,\underline{e}_1 + \delta\varphi\,(-l\sin\varphi\,\underline{e}_1 + l\cos\varphi\,\underline{e}_2)\right]$$

$$= -c x_0\,\delta x_0 + \left[f\,\boxed{\frac{l\cos\varphi\,\underline{e}_1 + l\sin\varphi\,\underline{e}_2}{l}}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\delta x_0\,\underline{e}_1 + \delta\varphi\,(-l\sin\varphi\,\underline{e}_1 + l\cos\varphi\,\underline{e}_1)\right)$$

$$= -c x_0\,\underline{\underline{\delta x_0}} + f\cos\varphi\,(\underline{\underline{\delta x_0}} - l\,\underset{\uparrow}{\delta\varphi}\,\sin\varphi)$$

$$+ f\sin\varphi\,l\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$= \underbrace{(-c x_0 + f\cos\varphi)}_{Q_x}\,\delta x_0 + \delta\varphi\,\underbrace{(-fl + fl)\cos\varphi\sin\varphi}_{Q_\varphi}$$

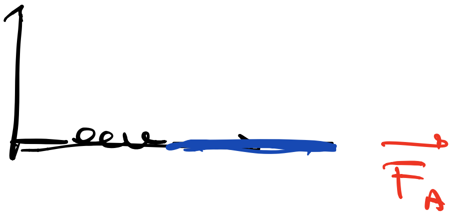
$$\begin{cases} Q_x = -c x_0 + f\cos\varphi \\ Q_\varphi = 0 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{matrix} Q_x = 0 \\ Q_\varphi = 0 \end{matrix} \qquad x_0 = \frac{f}{c}\cos\varphi \quad \text{sempre}$$

condizioni di equilibrio

Configurazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \varphi = \alpha \\ x_0 = \frac{f}{c}\cos\alpha \end{cases} \qquad \forall \alpha$$

caso particolare $\alpha = 0$



dinamometro: misura f sapendo c