SISTEMI DINAMICI

8 marzo 2021

Sistemi dinamici

$x \in M$ $\quad (\mathbb{R}^n, \; D \subset \mathbb{R}^n, \; \text{varietà})$

↑ spazio delle fasi

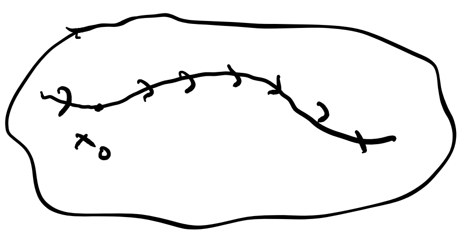
$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t))$$

$$x(t; x_0) = \varphi^t(x_0)$$

$$\varphi^t : M \longrightarrow M$$

$$x_0 \qquad\qquad x$$

M



$$\Gamma_{x_0} = \{ \varphi_t(x_0), \; \forall t \in \mathbb{R} \}$$

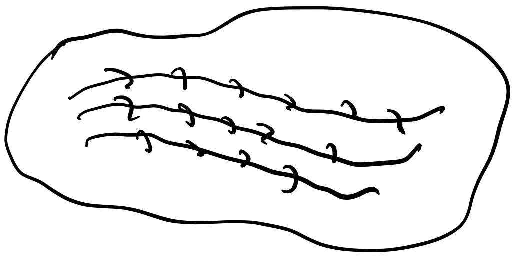
Risultati sulle eq. diff ordinarie

- Teorema di Cauchy: f è

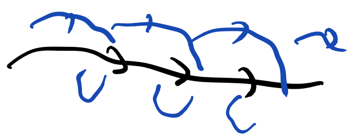
localmente lipschitziana

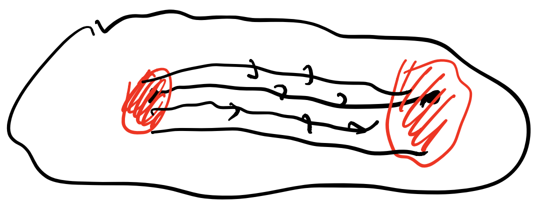
$\rightarrow (\tau_0, \tau_1)$ intervallo temporale

$\rightarrow \exists!$ la soluzione $x(t; x_0)$



Le traiettorie non si intersecano





$$\varphi^t(A) = \bigcup_{x \in A} \varphi^t(x) \qquad \left[\varphi^t(x_0) = x(t; x_0) \right]$$

- $\varphi^{-t}(\varphi^t(x)) = x$
- $\varphi^{t+s}(x) = \varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^s(\varphi^t(x))$

$\rightarrow \varphi$ definisce un gruppo commutativo ad un parametro

Dipendenza continua dai dati iniziali (e dai parametri)

<u>Teorema</u> $\dot{x} = f(x)$. Per ogni t fissato

la soluzione $\varphi^t(x)$ è una funzione regolare di x (stessa classe di regolarità di f). Se f almeno C^1, $\exists\ \alpha > 0,\ C > 0$ t.c.

$$\| \varphi^t(y) - \varphi^t(x) \| < C\, e^{\alpha |t|}\, \| y - x \|$$

<u>Proposizione</u> "lo stesso vale per dei parametri"

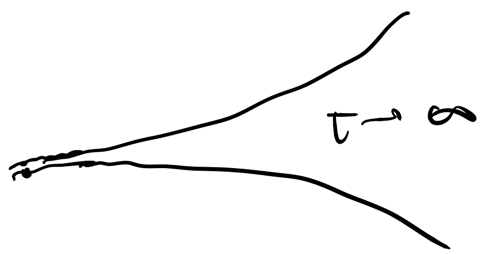
Consideriamo $\dot{x} = f(x; \alpha_1 \dots \alpha_k)$ dipendente da $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k \geq 1$. Le sol. per ogni t fissato $\varphi^t(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ è regolare nei $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (con la stessa classe di f).

Si riconduce al caso precedente, estendendo il sistema a $\mathbb{R}^{n+k}$, aggiungendo le eq. $\dot{\alpha}_i = 0$

Parametri & dati iniziali, per ogni t fissato

$$\| \varphi^t(y) - \varphi^t(x) \| < c\, e^{\lambda |t|} \| y - x \|$$

Per $t \to \infty$, diversi andamenti asintotici al variare dei dati iniziali o dei parametri



Commenti

- un'eq. differenziale di ordine $n \longrightarrow n$ eq. differenziali del 1° ordine

Ad esempio

$$\ddot{y} = f(y) \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = p \\ \dot{p} = f(y) \end{cases}$$

- $\dot{x} = f(x,t)$ non autonoma

si può sempre rendere autonoma

ponendo $\begin{cases} \dot{x} = f(x,s) \\ \dot{s} = 1 \end{cases}$

$s_0 = 0 \quad (\rightarrow s(t) = t)$

$D_{ext} = D \times \underset{\{s\}}{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Traiettorie non si intersecano in D_{ext}

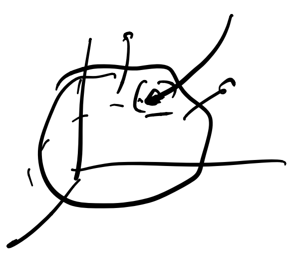
Varietà differenziabili

$\mathbb{R}^n \longrightarrow$ conviene avere una prospettiva più generale

Varietà : localmente assomiglia a $\mathbb{R}^n$

2-sfera S^2 : $x^2+y^2+z^2=1$

localmente $\mathbb{R}^2$



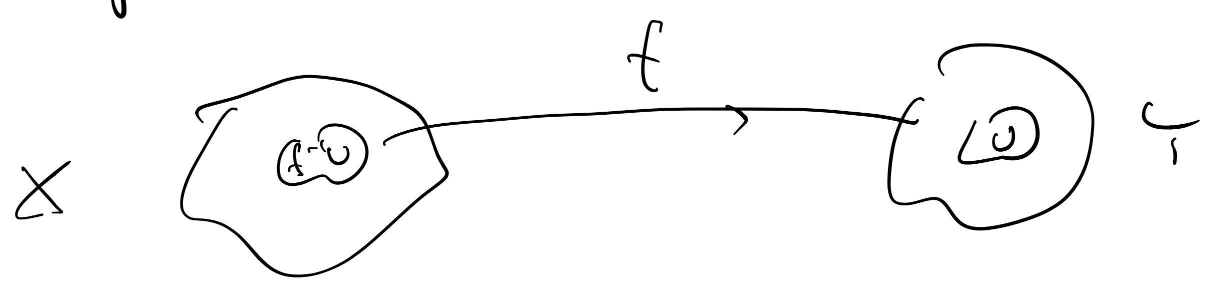
Spazio Topologico : insieme X e

una famiglia di sottoinsiemi aperti U tali che

- X, $\emptyset$ (insieme vuoto) sono aperti
- $U, V \subseteq X$ aperti, $U \cap V$ aperto
- $U_\alpha \subseteq X$ aperti, $\bigcup_\alpha U_\alpha$ aperti

Perché? possiamo definire funzioni continue (mandano punti "vicini" in punti "vicini")

Una funzione è continua $f: X \to Y$ se $\forall\, U \subseteq Y$ aperto, anche $f^{-1}U \subseteq X$ è aperto



Collezione di aperti U_α tali che $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$ è detto un ricoprimento

Chiamiamo carte una funzione continua $\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con inversa continua

In U il nostro spazio "sembra" $\mathbb{R}^n$

nel senso che una funzione

$f: U \to \mathbb{R}$ definisce una funzione

$f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>Varietà differenziabile</u> (n-dim):

è uno spazio topologico M, con delle

carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tali che

le <u>funzioni di transizione</u> $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$

sono C^∞ ove definite $(U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset)$

Questa collezione di carte si chiama

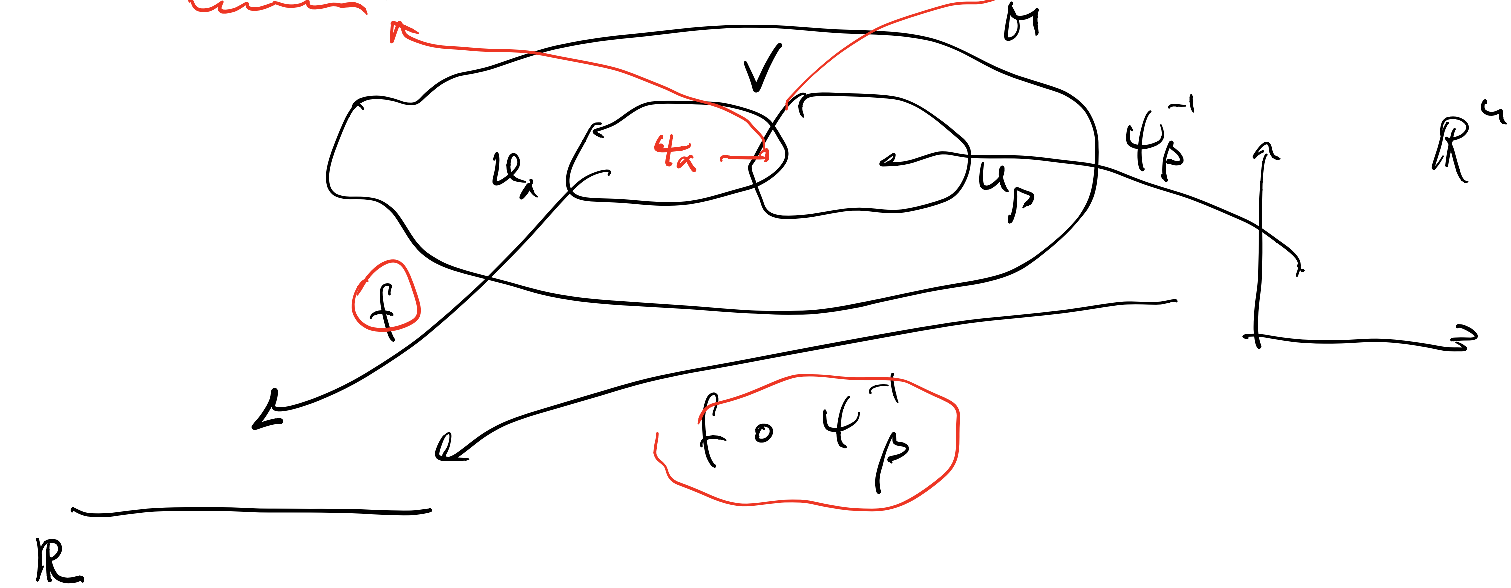
<u>atlante</u>

$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\varphi_\beta : U_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^n$

possiamo comparare i loro risultati su $V = U_\alpha \cap U_\beta$

$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$$



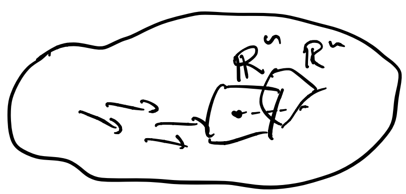
Risultati locali su $\mathbb{R}^n$ si estendono alle varietà localmente

$\mathcal{U}_\alpha$ $\quad f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

U_β $\quad f \circ \varphi_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

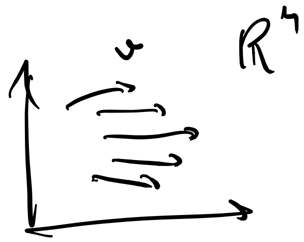
Seconda parte



M varietà differenziabile

Campo vettoriale : su $\mathbb{R}^n$ una legge che ad un punto associa un vettore

Possiamo pensare a un campo vettoriale attraverso la derivata direzionale di una funzione f in direzione di v



$v = (v^1, \dots, v^n)$

$$v \cdot f = v(f) =$$

$$= v^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \dots + v^n \frac{\partial f}{\partial x^n}$$

$$= v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f$$

ometto Σ_μ quando ci sono indici ripetuti

$$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = v^\mu \partial_\mu$$

Questo secondo punto di vista è più utile su varietà

Prendiamo la varietà M e consideriamo $C^\infty(M)$: algebra delle funzioni C^∞ su M. (a valori reali)

$+ \quad \times \qquad \alpha f(x) + \beta g(x), \quad f(x) \cdot g(x)$

Campo vettoriale una funzione

$$C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

Tale che

- $v(f+g) = v(f) + v(g)$
- $v(\alpha f) = \alpha\, v(f) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$\Big\}$ lineari

- $v(fg) = v(f)\, g + f\, v(g)$ Leibniz

$\rightarrow$ definizione indipendente dalle coordinate

Campi vettoriali $\in \mathrm{Vect}(M)$

definiamo: $(v+w)(f) = v(f) + w(f)$

$$(gv)(f) = g\, v(f)$$

dove $v, w \in \mathrm{Vect}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$

- $f\cdot(v+w) = f\cdot v + f\cdot w$

$(f+g)v = fv + gv$

$(fg)v = f(gv)$

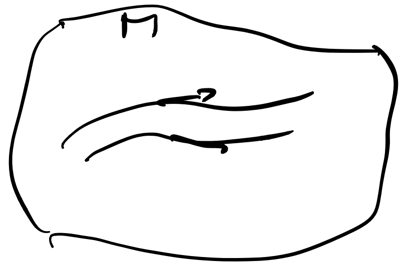
$1 \cdot v = v$

$\mathrm{Vect}(M)$ è un modulo su $C^\infty(M)$

• si può dimostrare che $Vect(\mathbb{R}^n)$ è generato da $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}$

$\Rightarrow$ ogni vettore $v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$

Possiamo usare questo formalismo per definire vettori tangenti:



Un vettore tangente a $p \in M$ dovrebbe darci la derivata direzionale al punto p

Definiamo $v_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$

da $v_p(f) = v(f)(p)$

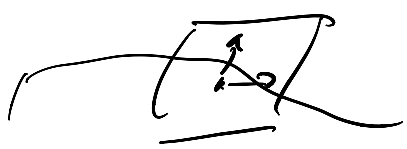
↑ derivata direzionale calcolata in p

Dalla definizione di campo vettoriale

$$v_p(f+g) = v_p(f) + v_p(g)$$
$$v_p(\alpha f) = \alpha\, v_p(f)$$
$$v_p(fg) = v_p(f)\, g(p) + f(p)\, v_p(g)$$

Allora possiamo definire un vettore tangente a $p \in M$ come una funzione $C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa queste proprietà

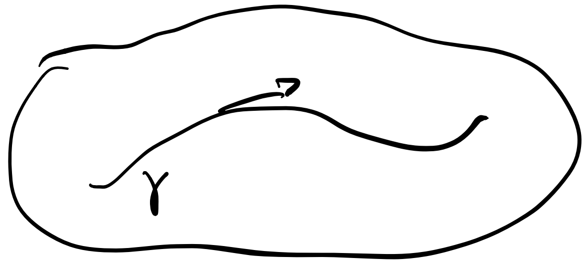
L'insieme di tutti i vettori tangenti a $p \in M$ è detto lo spazio tangente $T_p M$



Quindi $\forall p \in M$, un campo vettoriale $v \in Vect(M)$ determina un vettore tangente $v_p \in T_p M$

Si può dimostrare che $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$

Guardiamo una curva



$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$

vettore tangente $\dot{\gamma}(t)$

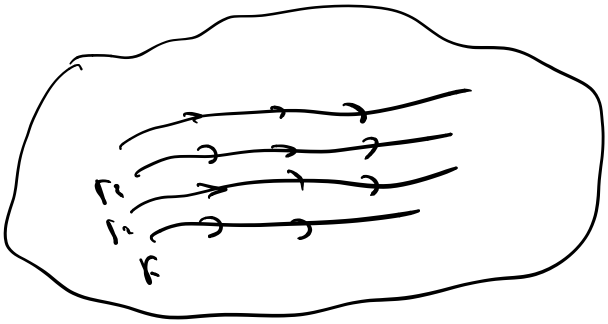
vettore $T_{\gamma(t)} M$

è quella funzione $C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$

che a f associa $\frac{d}{d\tau} f(\gamma(\tau))$

→ deriva le funzioni nella direzione in cui $\gamma(\tau)$ si muove nel tempo

$\frac{d}{d\tau}\gamma(\tau)$, $\dot{\gamma}(\tau)$

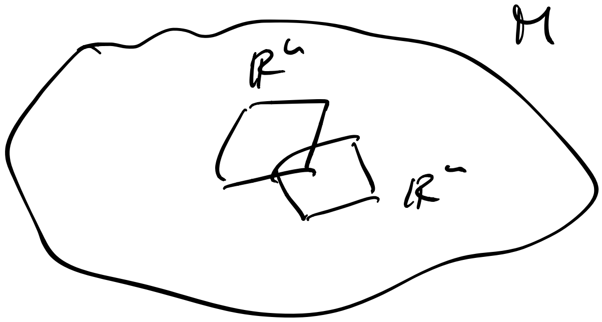


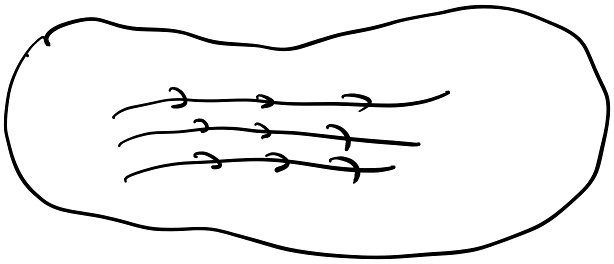
v nel punto $\gamma(\tau)$

$$\frac{d}{d\tau}\gamma(\tau) = v_{\gamma(\tau)}$$

Spazio delle fasi

M localmente $\sim \mathbb{R}^n$





Traiettorie

$\updownarrow$

campo vettoriale

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f(x(\tau))$$