MECCANICA RAZIONALE

Ing. Civile & Ambientale
Navale

10 marzo 2021

Corpo rigido → gradi di libertà
coordinate libere

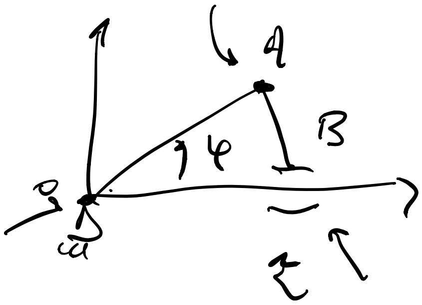
$\underline{q} = (q_1, \dots, q_\ell)$ $\quad \underline{x}_B(\underline{q})$

rigido 3D → 6 gradi di libertà
rigido 2D → 3 gradi di libertà

→ generalizzo a rigidi vincolati 2D

vincolare due corpi rigidi (o più)

costruendo strutture articolate



OA ⇝ AB

struttura (olonomi, fissi, lisci)

all'equilibrio → PLV

sistema a ℓ gradi di libertà

$$\underline{q} = (q_1, \ldots, q_\ell)$$

$\underline{x}_B = \underline{x}_B(\underline{q})$ $\qquad$ $\delta \underline{x}_B$ è indotto da uno spostamento virtuale $\delta \underline{q}$

$\underline{q} \to \underline{q} + \delta \underline{q}$ $\qquad$ $\underline{x}_B \to \underline{x}_B + \delta \underline{x}_B$

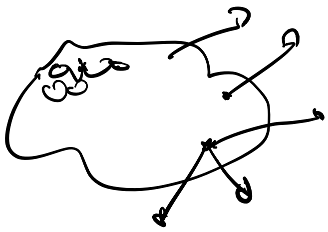
$$\delta \underline{x}_B(\underline{q}) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial}{\partial q_1} \underline{x}_B \, \delta q_1 +$$

$$+ \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial q_\ell} \underline{x}_B \, \delta q_\ell$$

PLV : calcolo il lavoro virtuale

$$\sum_{B\in S}{}' \underline{F}_B^{a} \cdot \delta \underline{x}_B = 0$$

all' equilibrio (spostamenti virtuali invertibili)



$$\delta \underline{x}_B = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i}\, \delta q_i$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\left(\sum_{B\in S}{}' \underline{F}_B^{a} \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right)}_{Q_i \text{ forza generalizzata}} \delta q_i$$

$$LV = \sum_i Q_i\, \delta q_i = 0 \quad \forall\, \delta q$$

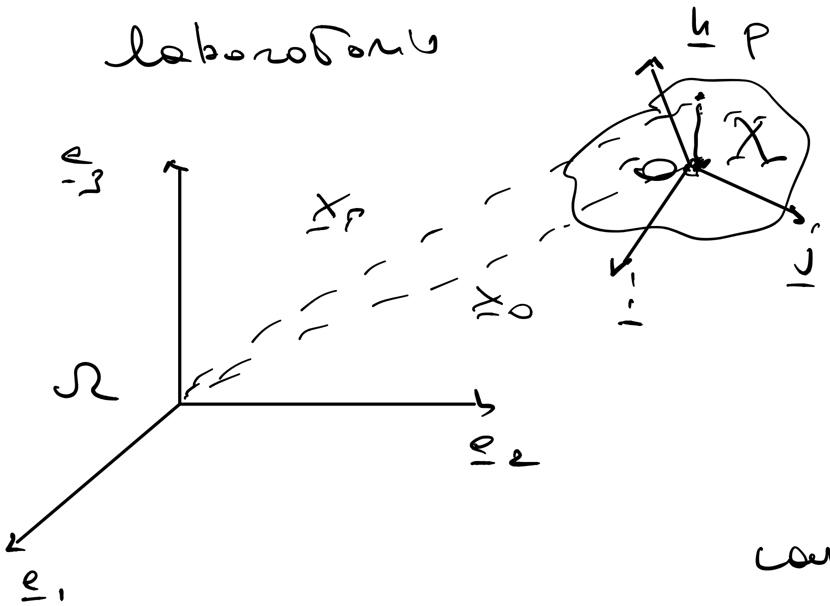
$$\hookrightarrow Q_i = 0$$

CINEMATICA DEI RIGIDI

→ Teorema di Poisson

$\Sigma(\Omega; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ osservatore del laboratorio

$S(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$



Introduciamo un parametro τ, che caratterizza uno spostamento $(\tau \longrightarrow \tau + d\tau, \ \underline{x} \longrightarrow \underline{x} + d\underline{x})$

Possiamo pensare a τ come al tempo, o come un parametro virtuale

<u>Teorema</u> di Poisson: fissato uno spostamento di R, esiste un unico vettore $\underline{\omega}(\tau)$ tale che per ogni coppia di punti O e P di R

Formule di Poisson

$$\longrightarrow \frac{d}{d\tau}\underline{x}_P = \frac{d}{d\tau}\underline{x}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$$

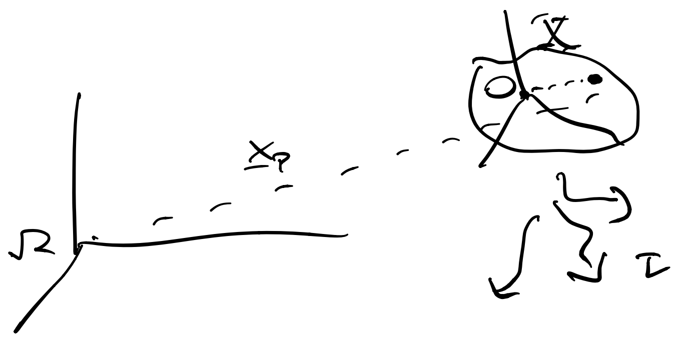
$$\left(\frac{d}{d\tau}(\underline{x}_P - \underline{x}_O) = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \right)$$

__Dim__ $\quad S(O;\ \underline{i},\ \underline{j},\ \underline{k})$ solidale

$P \in \mathcal{R}$, ho posizione $\underline{x}_P$ in Σ'

$\underline{X}$ in S

$\underline{x}_P = \underline{x}_P(\tau)$, $\quad \underline{X}$ è indipendente da τ perché S è solidale



$$\underline{x}_P(\tau) = \underline{x}_O(\tau) + R(\tau) \cdot \underline{X}$$

matrice di trasf. tra S e Σ'

→ matrice ortogonale

$$\frac{d}{d\tau}\underline{x}_P(\tau) = \frac{d}{d\tau}\underline{x}_O(\tau) + \frac{d}{d\tau}R(\tau)\cdot\underline{X}$$

Ricordiamo la def. di matrice

ortogonale :

$$R^{-1} = R^T \qquad (R R^T = I)$$

↑ matrice identità

[in geometria

$$v^T v = (Rv)^T (Rv) = v^T (R^T R) v = v^T v$$

↑ $R^T R = I$

$(1\ -1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$]

Se $\underline{x}_{p}(t) = \underline{x}_{0}(t) + R(t) \cdot \underline{X}$, R ortogonale

→ allora $\boxed{\underline{X} = R^T \cdot (\underline{x}_p - \underline{x}_0)}$

$$\frac{d}{dt}\underline{x}_p(t) = \frac{d}{dt}\underline{x}_0(t) + \underbrace{\left(\frac{d}{dt}R(t)\right) \cdot R^T}_{A} \cdot \underbrace{(\underline{x}_p - \underline{x}_0)}_{\underline{X}}$$

Proprietà :

definiamo $A := \frac{d}{dt} R(t) \cdot R^T(t) = \dot{R} R^T$

• Risultato tecnico : $A(t) + A^T(t) = 0$

→ A è antisimmetrica

Infatti, siccome $RR^T = I$

$$\frac{d}{dt}(RR^T) = \underbrace{\frac{dR}{dt}R^T}_{= A} + \underbrace{R\frac{d}{dt}R^T}_{= A^T} = \frac{dI}{dt} = 0$$

$$A^T = (\dot{R}R^T)^T = (R^T)^T \dot{R}^T = R\frac{d}{dt}R^T$$

quindi $A + A^T = 0$, A antisimmetrica

- Secondo risultato tecnico

se A è una matrice 3×3 antisimmetrica, $\exists!\ \underline{\omega} \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$A\underline{y} = \underline{\omega} \wedge \underline{y} \quad \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^3$$

$$A\underline{y} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Prendiamo un vettore $\underline{\omega}$

$$\underline{\omega} \wedge \underline{y} = \begin{Vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega_3 y_2 + \omega_2 y_3 \\ \omega_3 y_1 - \omega_1 y_3 \\ -\omega_2 y_1 + \omega_1 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

abbiamo appena dimostrato che

$$\omega_3 = - A_{12}$$

$$\omega_2 = A_{13}$$

$$\omega_1 = - A_{23}$$

quindi

$$\frac{d}{dt} \underline{x}_p(t) = \frac{d}{dt} \underline{x}_0(t) + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} R(t) \right) R^T}_{A} \cdot (\underline{x}_p - \underline{x})$$

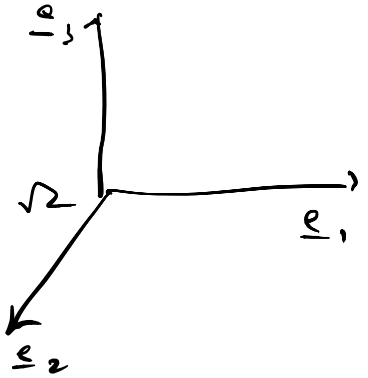
$$= \frac{d}{dt} \underline{x}_0(t) + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0)$$

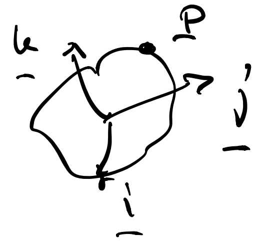
∎

Seconda parte

Teorema di Poisson

$$\frac{d}{dt} \underline{x}_p(t) = \frac{d}{dt} \underline{x}_0(t) + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0)$$





$\Sigma \qquad \Sigma \qquad S$

$$\underline{x}_P(t) = \underline{x}_O(t) + R(t) \cdot \underline{X}$$

$$R R^T = \underline{I}$$

→ $\underline{\omega}$ in termini degli elementi della matrice di $A = \dot{R}\, R^T$

- Traslazioni: gli assi di S non cambiano orientazione rispetto a Σ

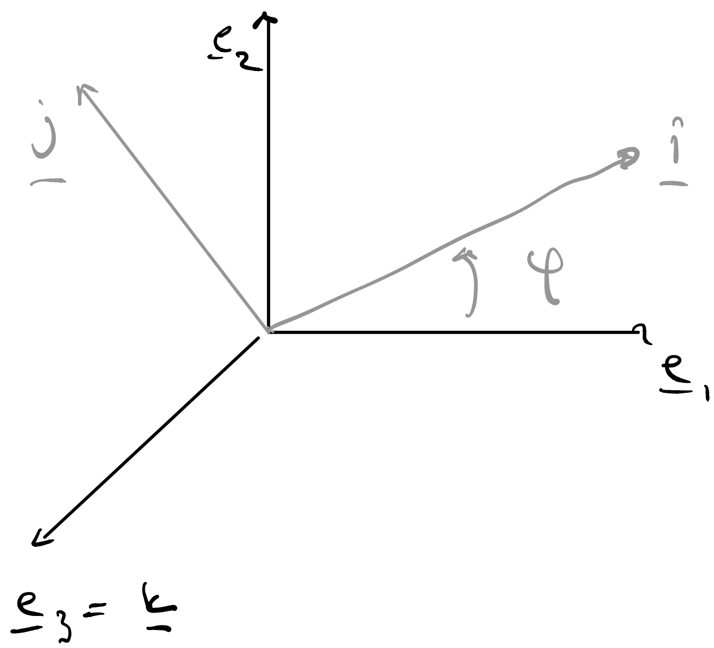
$$\frac{d}{dt} R(t) = 0 \quad \to \quad A = \frac{dR}{dt} R^T = 0$$

$$\to \quad \underline{\omega} = \underline{0}$$

Per traslazioni tutti i punti del rigido hanno la stessa velocità → possiamo parlare di velocità del rigido

- Rotazione di un rigido attorno

ad un asse fisso



Scegliamo Σ' e S in modo che

- $O \equiv \Omega$
- $\underline{e}_3 = \underline{k}$

φ verso positivo antiorario

Dare la rotazione vuol dire dare $\varphi(\tau)$

$\Omega = O \longrightarrow \underline{x}_0 = \underline{0}$

Quindi $\boxed{\underline{x}_P(\tau) = R_{(\varphi(\tau))} \cdot \underline{X}}$

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi = \varphi(\tau)$$

$\uparrow \underline{e}_3$

Vogliamo $\frac{d}{d\tau} R(\varphi(\tau))$

$$A = \dot{R} R^T = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\, \dot{\varphi} & -\dot{\varphi}\cos\varphi & 0 \\ \dot{\varphi}\cos\varphi & -\dot{\varphi}\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
-\dot\varphi \sin\varphi\cos\varphi + \dot\varphi \sin\varphi\cos\varphi & -\dot\varphi \sin^2\varphi - \dot\varphi\cos^2\varphi & 0 \\
\dot\varphi\cos^2\varphi + \dot\varphi\sin^2\varphi & \dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi - \dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
= \dot\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\omega} = \begin{array}{c} (0, & 0, & \dot\varphi) \\ -A_{23} & A_{13} & -A_{12} \end{array}
$$

$$
\underline{\omega} = \dot\varphi \, \underline{e}_3 = \dot\varphi \, \underline{k}
$$

$$
\frac{d\underline{x}_P}{dt} = \underbrace{\dot\varphi \, \underline{e}_3}_{\text{velocità angolare}} \wedge \underline{x}_P
\qquad
\left[\frac{d\underline{x}_P}{dt} = \frac{d\underline{x}_O}{dt} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \right]
$$

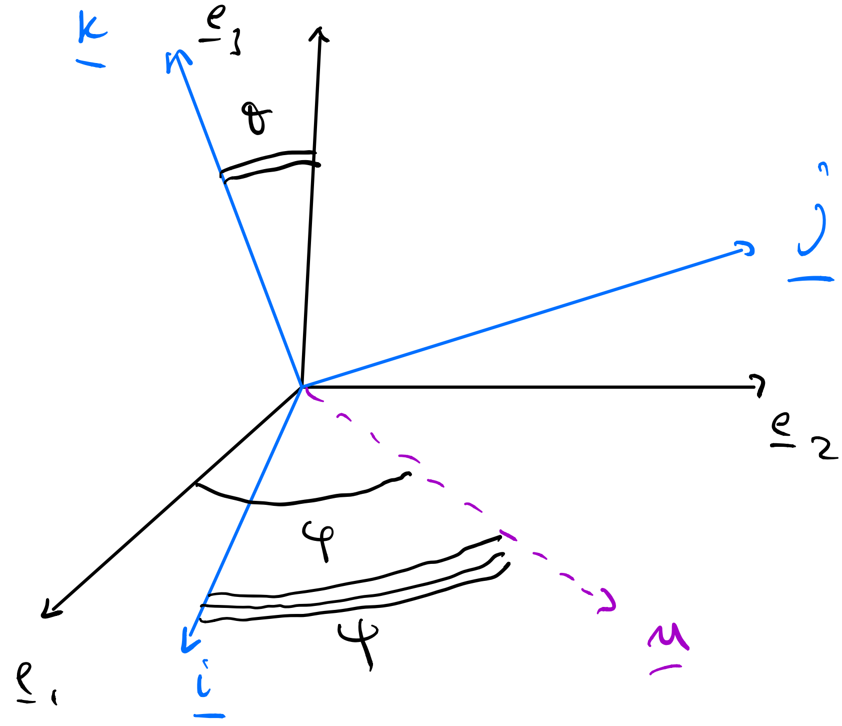
Poisson

- moto con un punto fisso (precessione)

Prendiamo Σ', S con $\Omega \equiv 0$

3 gradi di libertà $\rightarrow$ 3 coordinate libere

Angoli di Eulero

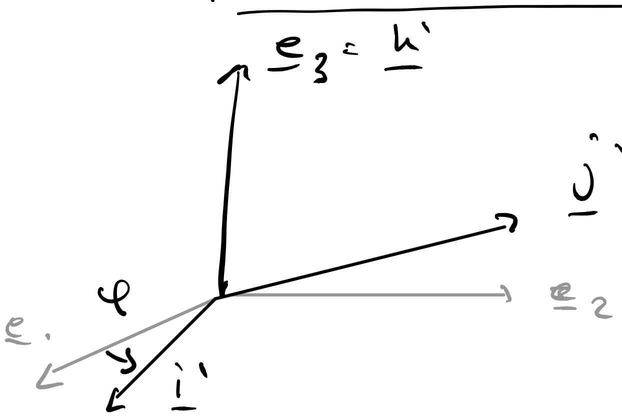


$\underline{n} = \underline{e}_3 \wedge \underline{k}$

- φ angolo di precessione (tra $\underline{e}_1$ e $\underline{n}$)
- θ angolo di nutazione (tra $\underline{k}$ e $\underline{e}_3$)
- ψ angolo di rotazione proprio ($\underline{i}$ e $\underline{n}$)

Costruiremo la matrice di trasformazione da S a Σ' come la successione di tre rotazioni indipendenti

1. Rotazione intorno ad $\underline{e}_3$ di un angolo φ



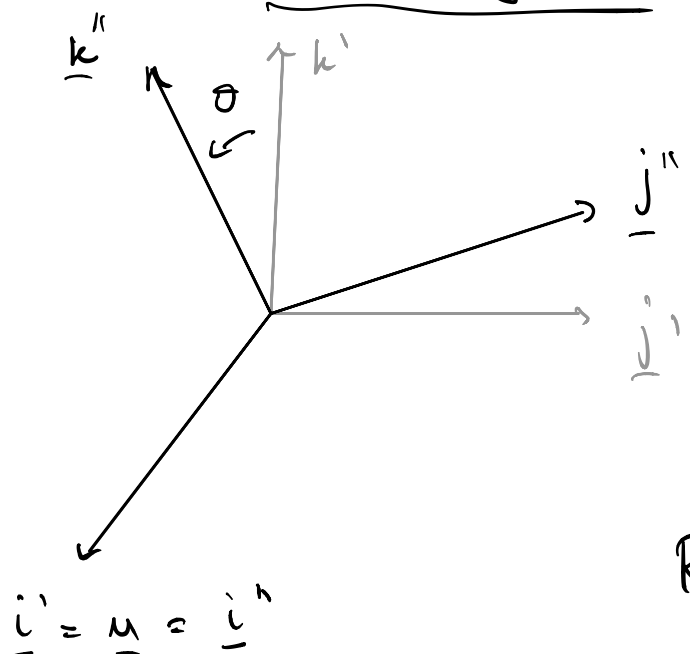
$\Sigma_1' \to S'(\Omega; \underline{i}', \underline{j}', \underline{k}' \equiv \underline{e}_3)$

$$\boxed{(\underline{x})_\Sigma = R_1(\varphi) \cdot (\underline{x})_{S'}}$$

$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adesso $\underline{i}' = \underline{u}$

2. <u>Rotazione intorno a $\underline{i}' = \underline{u}$ di un angolo θ</u>

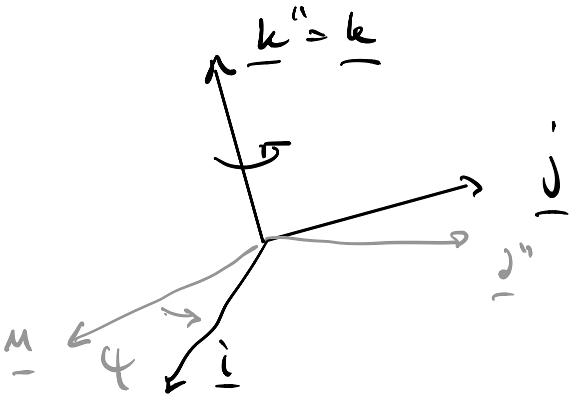


$S' \to S''(\Omega;\ \underline{i}'' = \underline{i}' = \underline{u},\ \underline{j}'',\ \underline{k}'')$

$$(\underline{x})_{S'} = R_2(\theta)\,(\underline{x})_{S''}$$

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3 <u>Rotazione intorno a $\underline{k}''$ di un angolo ψ</u>



$S'' \to S(\Omega;\ \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$

$$(\underline{x})_{S''} = R_3(\psi)\,(\underline{x}_S)$$

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{x})_\Sigma = R_1(\varphi)\,(\underline{x}_{S'}) = R_1(\varphi)\, R_2(\theta)\,(\underline{x})_{S''}$$

$$= \underbrace{R_1(\varphi)\, R_2(\theta)\, R_3(\psi)}_{R}\,(\underline{x}_S)$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dovremmo $A = \dot{R} R^T$ e trovare $\underline{\omega}$

Terza parte

Abbiamo derivato $R = R(\varphi, \theta, \psi)$

$\rightarrow$ rotazione di un rigido con un punto fisso $(\Omega = 0)$

$$A = \dot{R} R^T \longrightarrow \underline{\omega}$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}\left(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)\right)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{x} \, \dot{\varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \underline{x} \, \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \psi} \underline{x} \, \dot{\psi}$$

- $\frac{\partial}{\partial \psi} \underline{x} \cdot \dot{\varphi}$: θ e ψ sono fissati e φ corrisponde ad una rotazione intorno ad $\underline{e}_3$

Per Poisson : $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{x} \cdot \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \, \underline{e}_3 \wedge \underline{x}$

- $\frac{\partial}{\partial \theta} \underline{x} \, \dot{\theta}$: φ e ψ sono fissati mentre θ ruota intorno ad $\underline{n}$

Per Poisson : $\frac{\partial}{\partial \theta} \underline{x} \, \dot{\theta} = \dot{\theta} \, \underline{n} \wedge \underline{x}$

- $\frac{\partial}{\partial \psi} \underline{x} \, \dot{\psi}$: φ e θ fissati, ψ ruota intorno ad $\underline{k}$

Per Poisson $\frac{\partial}{\partial\psi}\underline{x} \;\dot\psi = \dot\psi\, \underline{k} \wedge \underline{x}$

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \left(\dot\varphi\, \underline{e}_3 + \dot\theta\, \underline{u} + \dot\psi\, \underline{k}\right) \wedge \underline{x}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{\omega} = \dot\varphi\, \underline{e}_3 + \dot\theta\, \underline{u} + \dot\psi\, \underline{k}}$$

Quindi $\underline{\omega}$ è la somma delle velocità angolari relative a 3 rotazioni indipendenti intorno a $\underline{e}_3$, $\underline{u}$, $\underline{k}$

Vediamo di $\underline{e}_3$ e $\underline{u}$ in $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$

Ricordiamo $\Sigma \longrightarrow S' \longrightarrow S'' \longrightarrow S$

$$(\underline{u})_S = R_3^T(\psi)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\psi\\-\sin\psi\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[\quad \underline{x}_{S''} = R_3(\psi)(\underline{x})_S \rightarrow (\underline{u})_S = R_3^T(\psi)(\underline{x})_{S''}\right.$$

$$\left. R_3(\psi) = \begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$(\underline{m})_S = \cos\psi \, \underline{i} - \sin\psi \, \underline{j}$$

$$(\underline{e}_3)_S = (R_2 R_3)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\psi \\ \sin\theta \cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \sin\theta \sin\psi \, \underline{i} + \sin\theta \cos\psi \, \underline{j} + \cos\theta \, \underline{k}$$

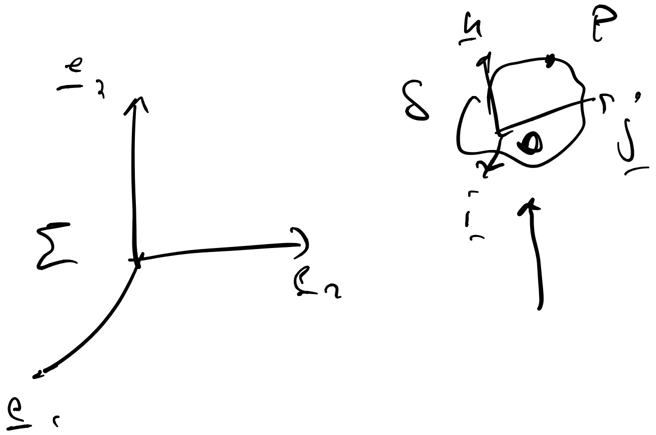
$$(\underline{\omega})_S = (\dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi)\, \underline{i}$$

$$+ (\dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi)\, \underline{j} +$$

$$+ (\dot\varphi \cos\theta + \dot\psi)\, \underline{k}$$

Poisson

$$\frac{d}{dt} \underline{x}_P = \frac{d}{dt} \underline{x}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$$



t parametro

sappiamo come costruire $\underline{\omega}$

vogliamo scrivere $\delta \underline{x}_P$

$$\delta \underline{x}_p = \frac{d \underline{x}_p}{d\tau}\, \delta\tau = \underbrace{\frac{d \underline{x}_0}{d\tau}\, \delta\tau}_{\delta \underline{x}_0} + \underbrace{\underline{\omega}\, \delta\tau}_{\chi} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0)$$

$$t \rightarrow \tau + \delta\tau$$

$$\delta \underline{x}_p = \delta \underline{x}_0 + \chi \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0)$$