SISTEMI DINAMICI

10 marzo 2021

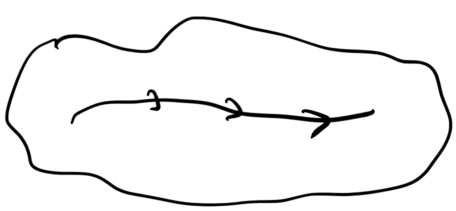
Sistema dinamico

M spazio delle fasi

(spazio delle posizioni di un sistema meccanico $\rightarrow$ coordinate libere)

$x \in M$ stato di un sistema

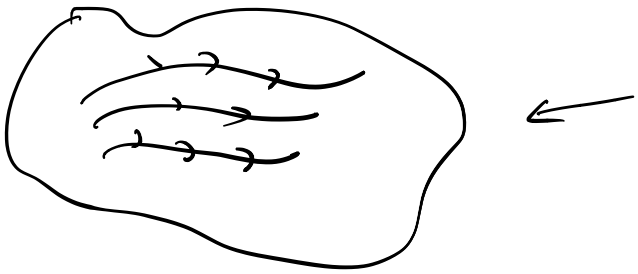
$$\varphi^t : M \longrightarrow M$$
$$x_0 \dashrightarrow x(t)$$



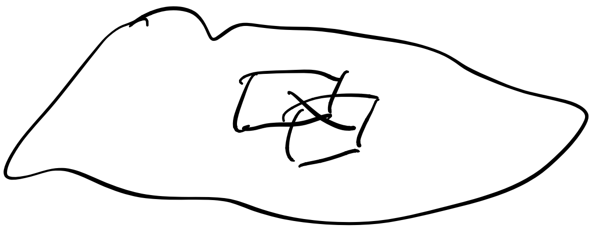
$$\frac{d}{dt} x(t) = f_\mu(x(t))$$

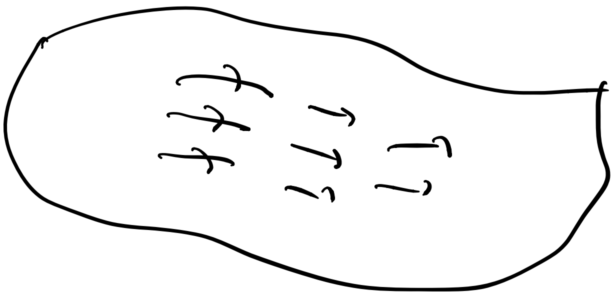
$$\longrightarrow \quad x(t; x_0, \mu_0)$$

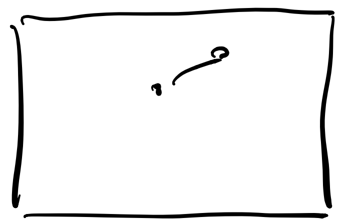
esiste, è unica, dipende in modo continuo dai dati iniziali



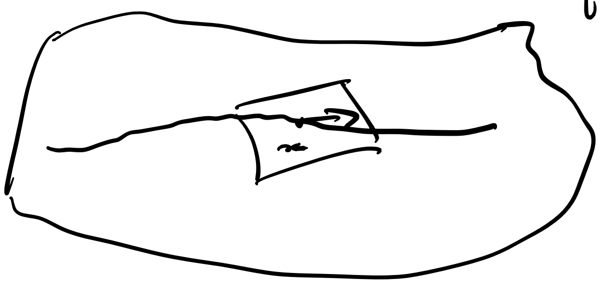
M varietà diff.
(localmente $\simeq \mathbb{R}^n$)







Su una varietà M possiamo parlare di campi vettoriali



M $\quad T_x M \simeq \mathbb{R}^n$

Sistemi dinamici 1-dimensionali

continui

$\dot{x} = f(t)$

$x(t)$ funzione di una variabile reale a valori in $\mathbb{R}$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ liscia

$\hookrightarrow$ eventualmente sono tutto $\mathbb{R}$

<u>Esempio</u>

$\dot{x} = \sin x$

come si risolve? separazione delle variabili: $dt = \dfrac{dx}{\sin x}$

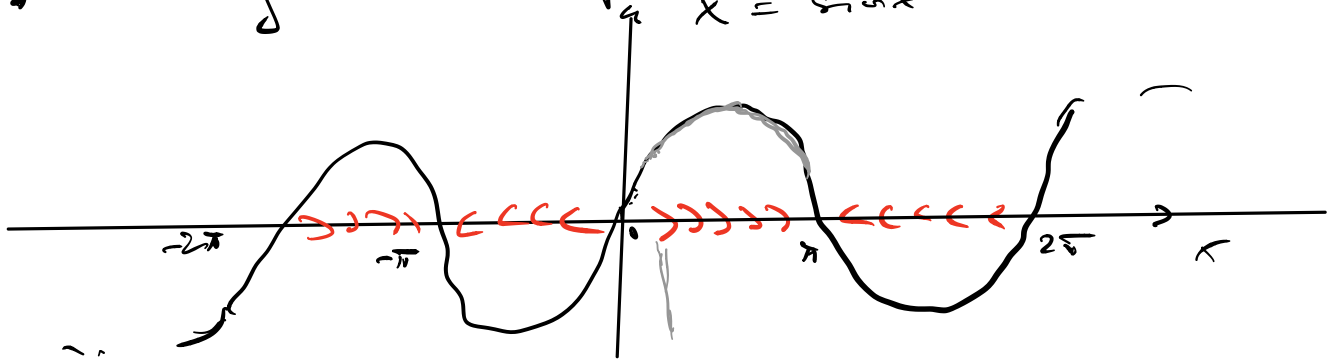
$\rightarrow \quad t = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{1}{\sin x} + \cot x \right| + \text{cost}$

C fissiamo $x = x_0$ per $t = 0$

? quale è l'andamento di $x(t)$?

<u>Analisi qualitativa</u>

- campo vettoriale su $\mathbb{R}$: ad ogni punto x associa il vettore $\dot{x}$
- disegnare esplicitamente $\dot{x} = \sin x$



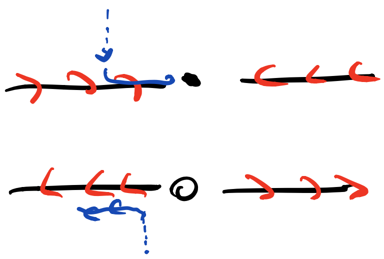
campo vettoriale $\rightarrow\rightarrow$ quando $\dot{x} > 0$

$\leftarrow\leftarrow$ quando $\dot{x} < 0$

Rappresentazione grafica del flusso (derivata: rapidità con cui x varia)

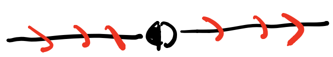
Ai punti $\dot{x} = 0$ non c'è nessun "movimento" $\rightarrow$ punti fissi / critici / equilibrio

$\dot{x} = 0 \rightarrow x^*$

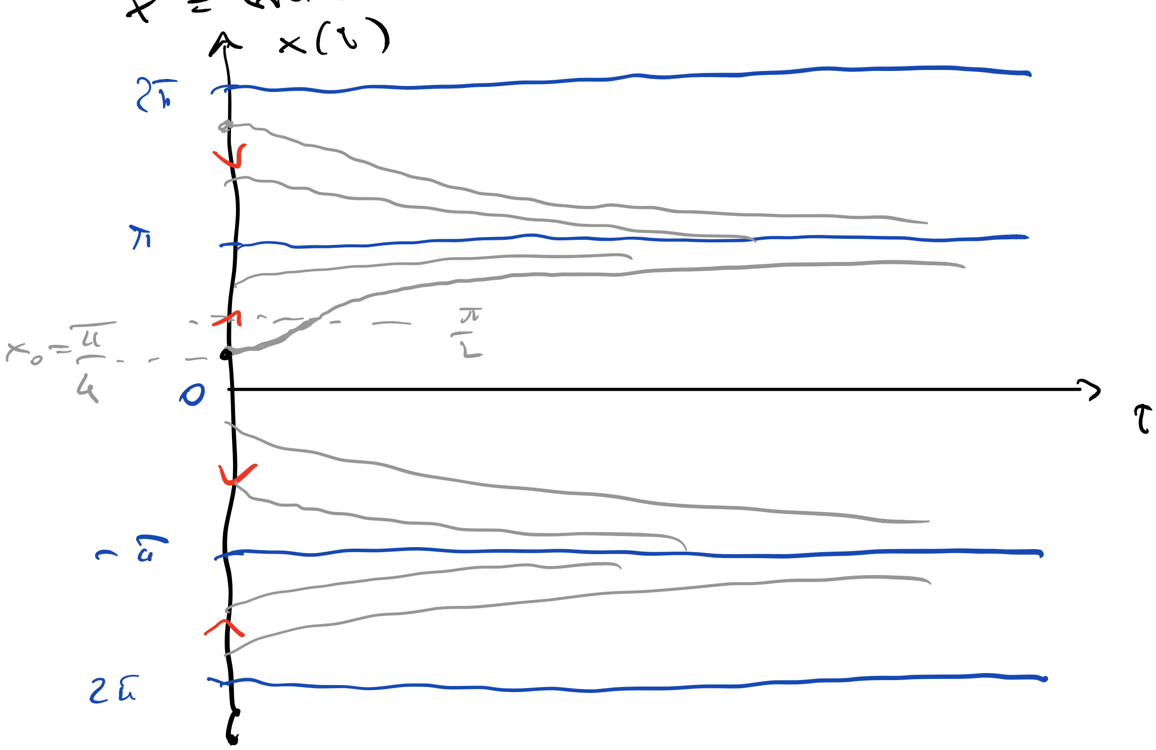


stabile / attrattivo / pozzo

instabile / repulsivo / sorgente

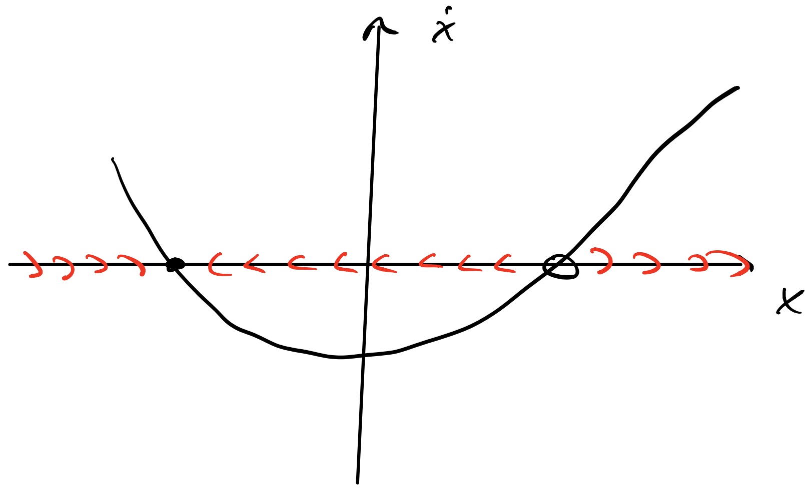


$\dot{x} = \sin x$



Esempio di analisi qualitativa per $\dot{x} = \sin x$

Ritratto di fase (Phase portrait)



$\dot{x} = f(x)$

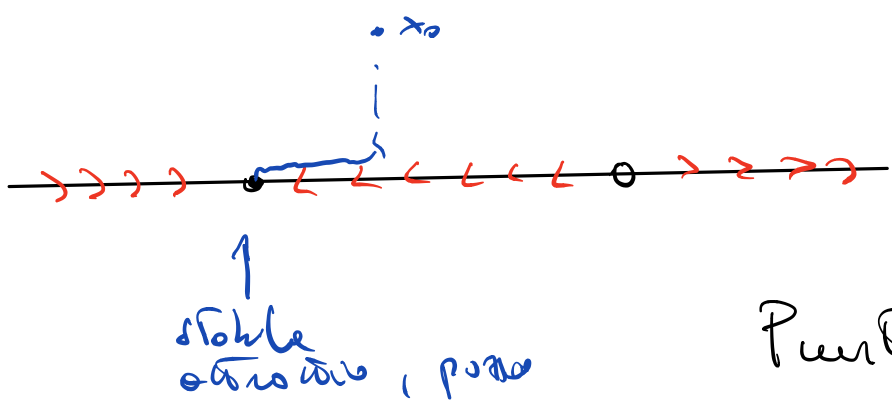
Asse reale (della x) → spazio delle fasi

$f(x)$: velocità (locale) del flusso

se $f(x) > 0$

se $f(x) < 0$

Per risolvere qualitativamente $\dot{x} = f(x)$, prendiamo una condizione iniziale x_0 e seguiamo la sua evoluzione lungo il flusso



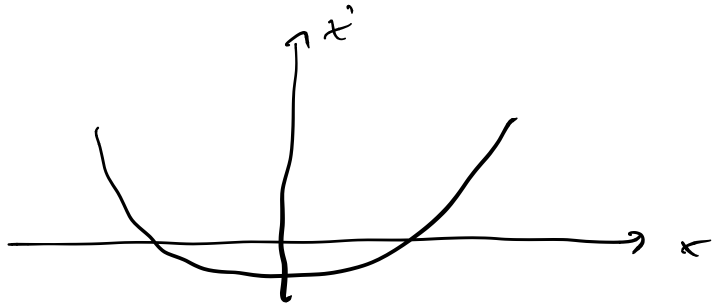
ritratto di fase

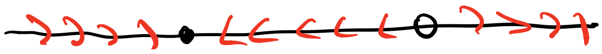
Punti critici sono

$x^* : f(x^*) = 0$

Esempio

$\dot{x} = x^2 - 1$





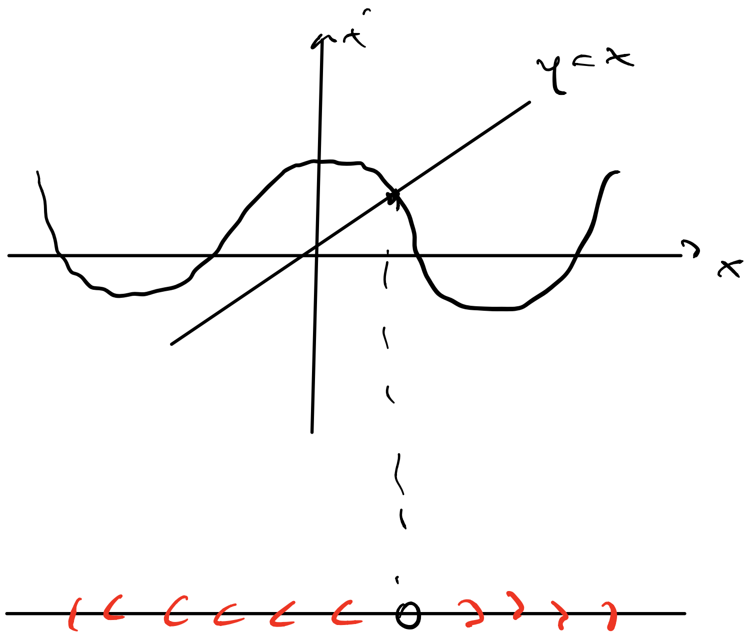
pti critici
$f(x) = 0$

Esercizio

$\dot{x} = x - \cos x$

Trovare pto critico

$\begin{cases} y = x \\ y = \cos x \end{cases}$



Seconda parte

Esempio : dinamica delle popolazioni

N individui $\longrightarrow$ N funzione continua

Malthus : $\dot{N} = rN \qquad r > 0$

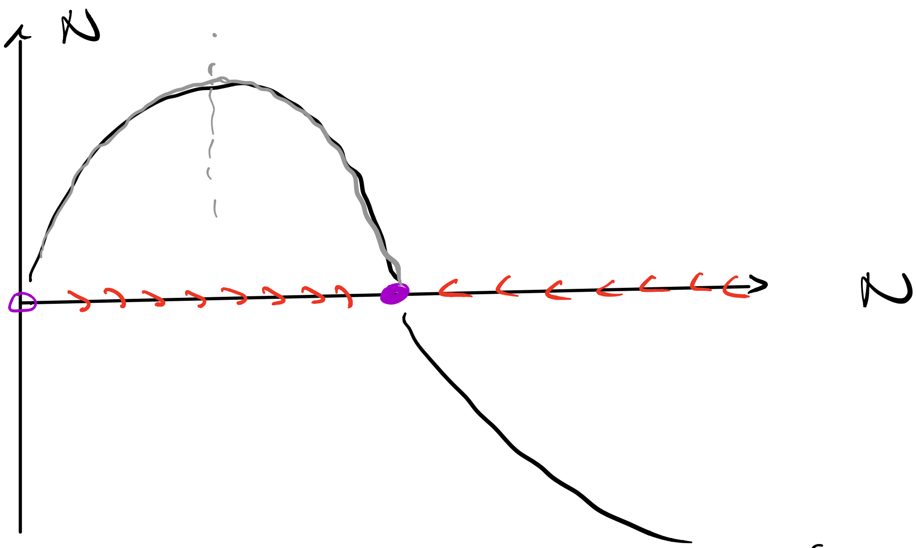
$N = N(t)$ $\qquad \hookrightarrow$ crescita esponenziale

Modello logistico : le risorse sono

limitata : il tasso di crescita per persona $\left(\frac{\dot N}{N}\right)$ diminuisce linearmente con N (Verhulst 1838) $k > 0$

↳ $$\dot N = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$N > 0$

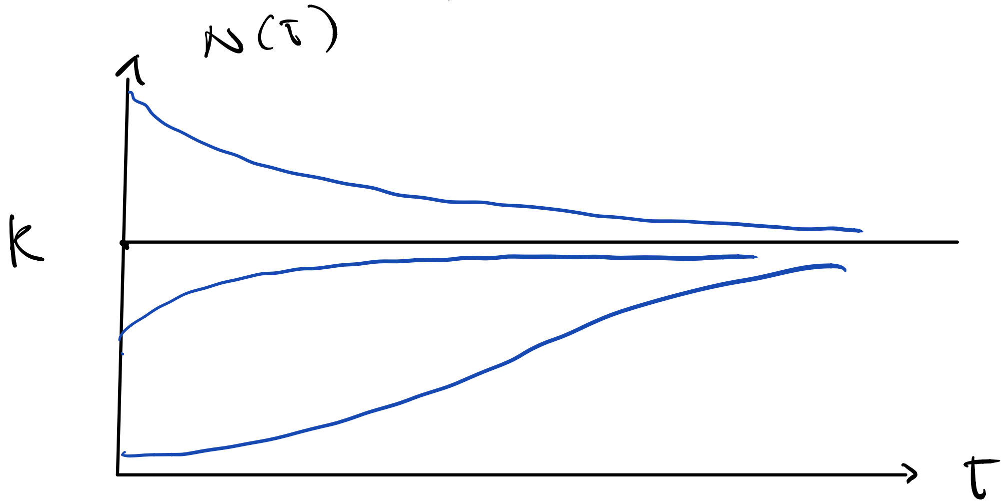


Punti critici : $rN\left(1 - \frac{N}{k}\right) = 0$

→ $N^* = 0$, $N^* = K$

$0 < r\underset{\vee\, 0}{N}\left(1 - \frac{N}{k}\right)$ $\qquad 1 - \frac{N}{k} > 0 \qquad N < k$

Predizione : per $N_0 \neq 0$, $N(t) \longrightarrow k$
$t \longrightarrow \infty$



capacità portante

Analisi lineare

Se abbiamo un punto fisso x^* possiamo ottenere un'idea più precisa sulla struttura locale del flusso linearizzando il sistema

$x(\tau) = x^* + \eta(\tau)$ $\qquad$ $\eta(\tau)$ è una perturbazione

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(x^* + \eta(\tau)\right) = \frac{d}{d\tau}\eta(\tau)$$

$$\parallel$$

$$f(x(\tau)) = f(x^* + \eta(\tau)) = \underline{f(x^*)} + \eta\, \underline{f'(x^*)} + O(\eta^2)$$

- x^* punto fisso $\longrightarrow$ $f(x^*) = 0$
- η perturbazione "piccola" = lavoriamo al primo ordine
- $f'(x^*) \neq 0$

Allora : $\quad \dfrac{d}{d\tau}\eta(\tau) = \eta(\tau)\, \underline{f'(x^*)}$

$\Rightarrow$ la perturbazione cresce esponenzialmente se $f'(x^*) > 0$, decade exp se $f'(x^*) < 0$

Nel caso $f'(x^*) \neq 0$, è il segno della derivata al punto fisso a determinare la stabilità localmente.

<u>Commento</u> siccome le sol sono esponenziali $\left(\sim e^{f'(x^*) \cdot t}\right)$ la quantità $\dfrac{1}{|f'(x^*)|}$ fissa la "scala temporale", cioè determina il tempo nel quale la soluzione varia in modo significativo, vicino a x^*.

<u>Def</u> Un punto di equilibrio x^* t.c. $f'(x^*) \neq 0$, è detto IPERBOLICO (non-degenere)

Def Un sistema dinamico si dice iperbolico se tutti i suoi punti critici sono iperbolici

Esempio eq. logistica $\dot{N} = f(N) = r N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$

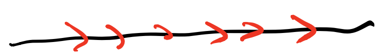
$$f'(N) = r - 2\frac{r}{K} N \rightarrow \begin{array}{ll} f'(0) = r > 0 & \text{instabile} \\ f'(K) = -r < 0 & \text{stabile} \end{array}$$

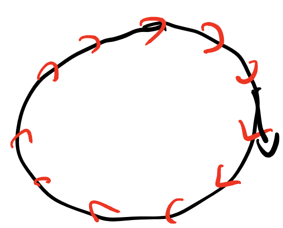
Alcuni commenti:

1) $\dot{x} = f(x) \rightarrow$ le traiettorie sono monotone (o costanti)

Visto che siamo su $\mathbb{R}$, non ci sono oscillazioni

Questo sarà diverso se lavoriamo su S^1





localmente $\sim \mathbb{R}$

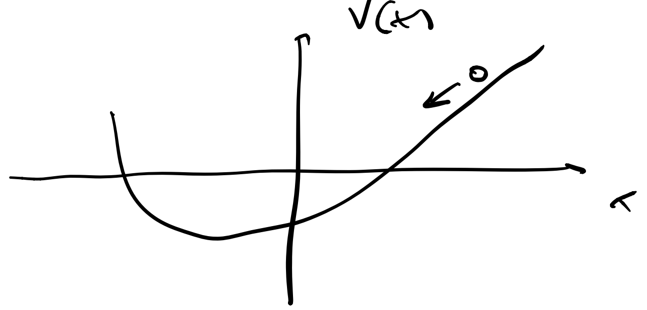
2) Può darsi il caso in cui

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} \qquad V = V(x(t))$$

$$\frac{d\,V(x(\tau))}{d\tau} = \frac{dx(\tau)}{d\tau}\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 \leq 0$$

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x) = -\frac{dU}{dx}$$

→ il potenziale decresce lungo le traiettorie



inoltre i punti di equilibrio sono per

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

i minimi locali di U sono equilibri stabili.

Biforcazioni

Supponiamo di introdurre un parametro

$$\frac{d}{d\tau}x(\tau) = f_\mu(x(\tau))$$

μ parametro di controllo ; vogliamo capire come cambia l'analisi qualitativa al variare di μ

Biforcazione : cambio qualitativo

della dinamica

Al variare di μ

- crearsi o essere distrutti dei punti critici
- carattere dei punti di equilibrio può cambiare

Quando il sistema NON cambia

$\longrightarrow$ μ^* t.c. $f_{\mu^*}(x^*) = 0$ e

$f'_{\mu^*}(x^*) \neq 0$ (x^* punto critico iperbolico)