Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
CdS Sviluppo Economico e Cooperazione Internazionale

Appunti del corso di Matematica

09 - Funzioni reali di due variabili reali

Anno Accademico 2013/2014

D. Provenzano, M. Tumminello e A. Consiglio

1. Introduzione

Finora ci siamo occupati di funzioni reali di una sola variabile reale, cioé di funzioni il cui dominio e il cui codominio sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
Nella pratica capita peró di dover operare con funzioni in cui il valore di una variabile dipende da piú variabili fra loro indipendenti; parleremo allora di *funzione reale di piú variabili reali.*
Una funzione reale di n variabili reali é una relazione che ad ogni n-pla ordinata di numeri reali $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ associa uno ed un solo numero reale.
Nella nostra breve trattazione ci occuperemo di alcuni aspetti delle *funzioni reali di due variabili reali*, ossia di funzioni che trasformano vettori di $\mathbb{R}^2$ in scalari di $\mathbb{R}$.
Una funzione $f : A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si rappresenta con un grafico 3D, il cui dominio è un sottoinsieme del piano coordinato xy e il codominio un sottoinsieme dell'asse z. x e y sono le variabili indipendenti, z la variabile dipendente e scriveremo la funzione nella forma

$$z = f(x, y)$$

Nella figura 1 sono mostrate le funzioni $z = 2\,x + 3\,y - 1$ e $z = 2\,x - y$.

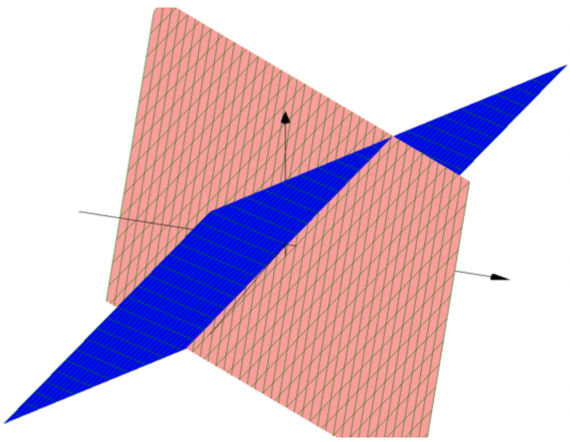

FIGURA 1. Funzioni $z = 2\,x + 3\,y - 1$ e $z = 2\,x - y$.

La funzione $z = f(x, y) = 2\,x + 3\,y - 1$ definisce un piano la cui equazione è $z - 2\,x - 3\,y + 1 = 0$. In altre parole, la funzione $f(x, y)$ definisce in forma esplicita il piano di equazione data.
Nella Figura 2 sono invece rappresentate le funzioni $z = -2\,x^2 + x\,y - 3\,y^2$ e $z = 2\,x + 3\,y - 1$.

2. Dominio di una funzione reale di due variabili reali

Come nel caso delle funzioni d'una sola variabile reale, la prima cosa da fare quando si deve studiare una funzione di piú variabili é

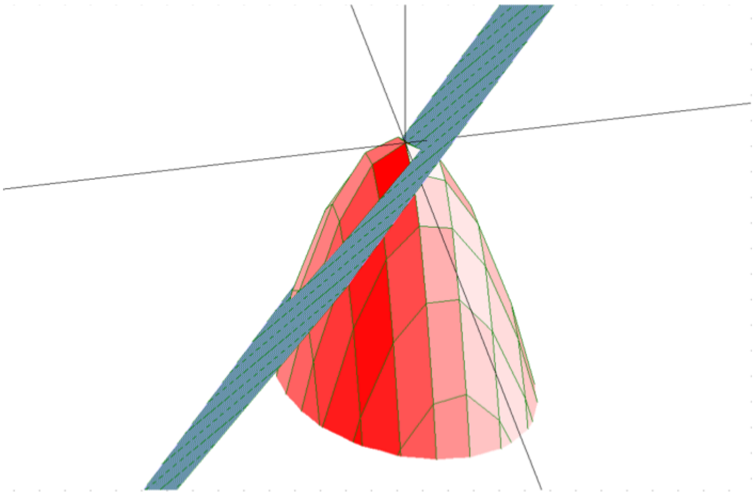

FIGURA 2. Funzioni $z = -2\,x^2 + x\,y - 3\,y^2$ e $z = 2\,x + 3\,y - 1$.

determinarne il dominio. Analogamente al caso delle funzioni di una variabile, il dominio della funzione é il piú grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ nel quale ha significato l'espressione $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Il dominio della funzione sará quindi l'insieme delle n-ple ordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che hanno come corrispondente un solo numero reale z; l'insieme delle immagini delle n-ple ordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definisce il codominio della funzione.
Per calcolare il dominio di una funzione di due variabili dobbiamo tenere presente le consuete regole di esistenza legate alla sua specifica forma algebrica: un polinomio esiste sempre, una frazione esiste se il suo denominatore diverso da zero; un radicale d'indice pari esiste se il suo argomento é positivo o nullo; e cosí via. In tutti i casi di funzione reale di due variabili reali, il dominio della funzione é una regione del piano xy.

Esercizio 2.1
Calcoliamo e rappresentiamo graficamente il dominio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

La condizione da porre, visto che operiamo con una radice di ordine pari, é $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ che possiamo riscrivere nella forma $x^2 + y^2 \leq 1$
Quindi $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
La disequazione $x^2 + y^2 \leq 1$ risulta soddisfatta da tutti i punti del piano sulla circonferenza di centro $C(0, 0)$ e raggio $r = 1$ o interni alla stessa. La figura 3 fornisce la rappresentazione grafica del dominio della funzione.

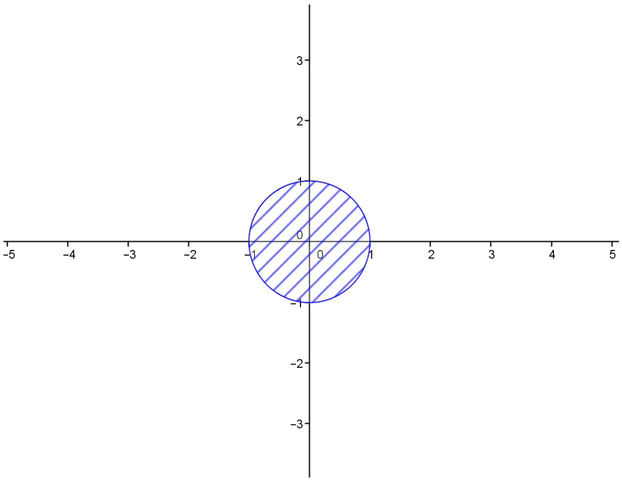

Figura 3. Dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

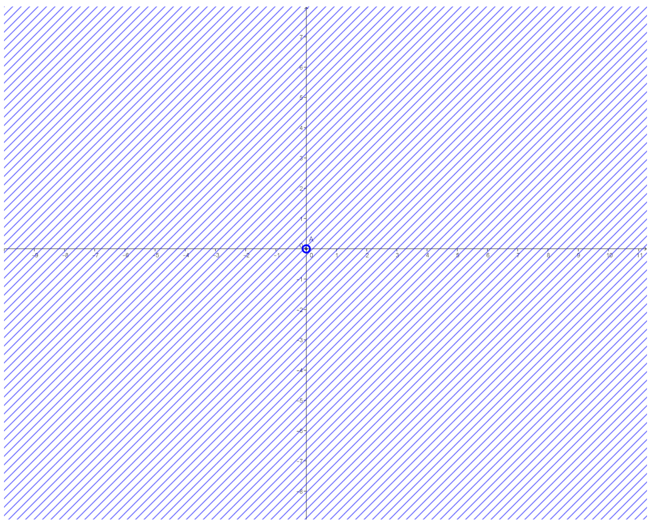

Figura 4. Dominio della funzione $f(x,y) = lg(x^2 + y^2)$.

Esercizio 2.2

Calcoliamo e rappresentiamo graficamente il dominio della funzione

$$f(x,y) = lg(x^2 + y^2).$$

La condizione da porre, visto che operiamo con una funzione logaritmo, é $x^2 + y^2 > 0$. Tale disequazione risulta verificata da tutti i punti del piano xy tranne l'origine degli assi $(0,0)$.
Quindi $D = \mathbb{R}^2 - (0,0)$.
La figura 4 fornisce la rappresenta grafica del dominio della funzione.

Esercizio 2.3
Calcoliamo e rappresentiamo graficamente il dominio della funzione
$$f(x,y)=\sqrt{x+y^2+1}.$$
Visto che operiamo con una radice di ordine pari dobbiamo porre $x+y^2+1 \geq 0$ che possiamo riscrivere nella forma $x \geq -y^2-1$
Quindi $\mathrm{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq -y^2-1\}$.
La disequazione $x \geq -y^2-1$ definisce la porzione di piano esterna alla parabola avente come asse di simmetria l'asse delle x e con la concavitá rivolta verso sinistra.
La figura 5 fornisce la rappresenta grafica del dominio della funzione.

Esercizio 2.4
Calcoliamo e rappresentiamo graficamente il dominio della funzione
$$f(x,y)=\sqrt{x(y+1)}.$$
Visto che operiamo con una radice di ordine pari dobbiamo porre $x(y+1)\geq 0$. Quindi $\mathrm{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x(y+1)\geq 0\}$.
La figura 6 fornisce la rappresenta grafica del dominio della funzione.

Esercizio 2.5
Calcolare e rappresentare graficamente il dominio della funzione
$$f(x,y)=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x-y}.$$
Per trovare il dominio della funzione si deve risolvere il sistema
$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 1-x-y\geq 0 \end{cases}$$
Quindi $\mathrm{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq -1 \text{ e } y\leq -x+1\}$.
L'area col doppio tratteggio della figura 7 fornisce la rappresenta grafica del dominio della funzione.

Esercizio 2.6
Calcoliamo e rappresentiamo graficamente il dominio della funzione
$$f(x,y)=lg(\frac{y-x^2+1}{2-x-y})$$
La condizione da porre, visto che operiamo con un logaritmo é che il suo argomento sia positivo. Ció comporta la soluzione della disequazione razionale fratta $\frac{y-x^2+1}{2-x-y}>0$.

Quindi $\mathrm{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{y-x^2+1}{2-x-y}>0\}$.

L'area col doppio tratteggio della figura 8 fornisce la rappresenta grafica del dominio della funzione.

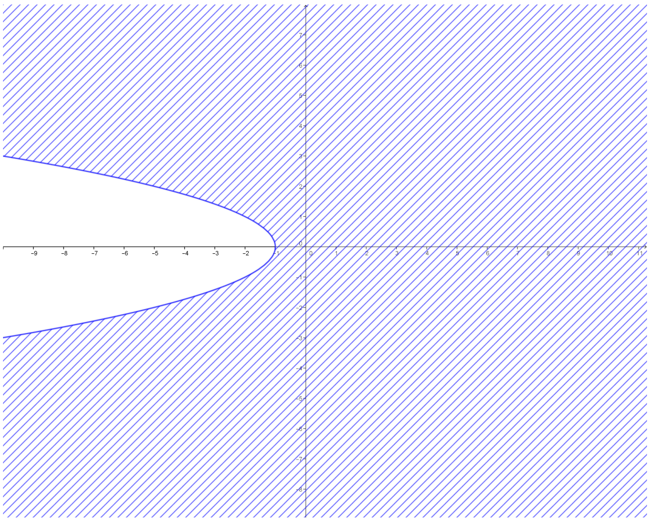

Figura 5. Dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{x+y^2+1}$.

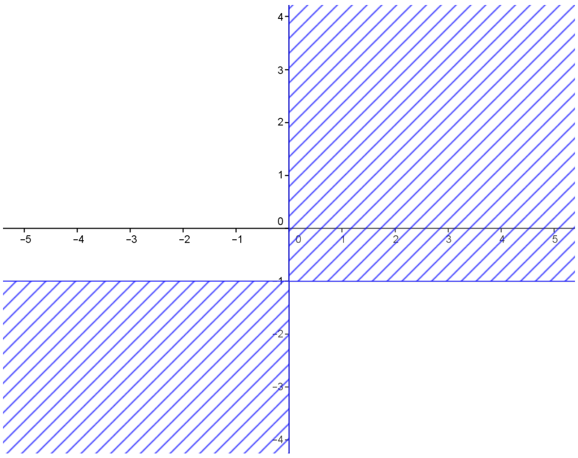

Figura 6. Dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{x(y+1)}$.

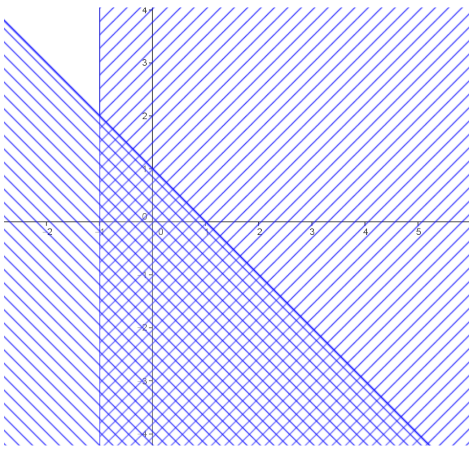

Figura 7. Dominio della funzione $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x-y}$.

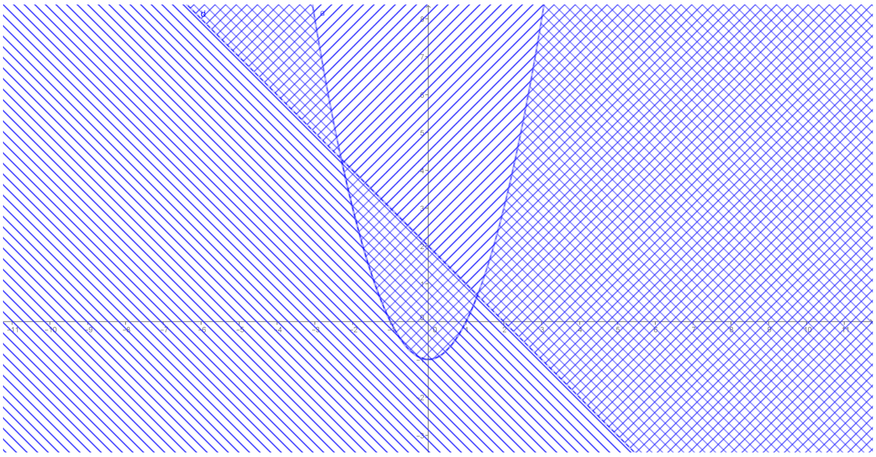

FIGURA 8. Dominio della funzione $f(x,y) = lg(\frac{y-x^2+1}{2-x-y})$.

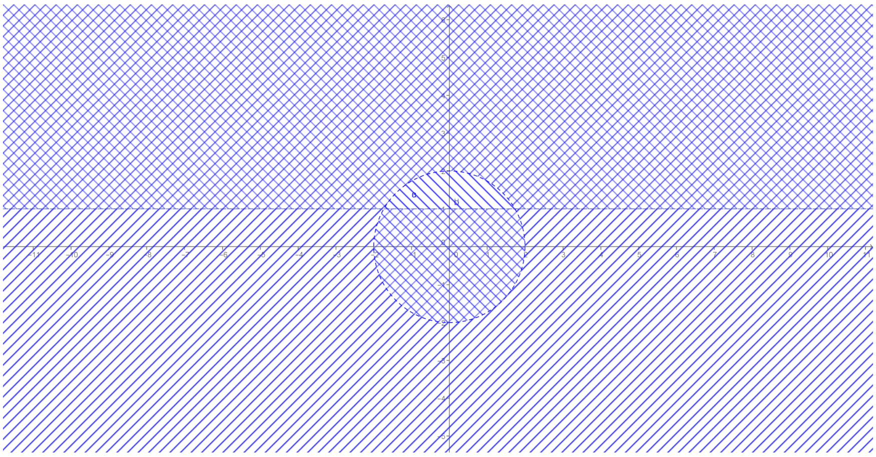

FIGURA 9. Dominio della funzione $f(x,y) = lg(\frac{y-x^2+1}{2-x-y})$.

Esercizio 2.7
Calcolare e rappresentare graficamente il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-4}{y-1}}$$

In questo caso il dominio della funzoine é dato dai valori di x e y per cui risulta soddisfatta la disequazione razionale fratta $\frac{x^2+y^2-4}{y-1} \geq 0$. Quindi D $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2+y^2-4}{y-1} \geq 0\}$.
L'area col doppio tratteggio della figura 9 fornisce la rappresenta grafica del dominio della funzione.

3. Le linee (o curve) di livello

Costruire il grafico d'una superficie nello spazio é semplice se si ha a disposizione un software adeguato.
Spesso peró, nelle applicazioni, non serve il grafico tridimensionale della funzione ed é sufficiente determinare l'andamento delle linee che si ottengono sezionando la superficie della funzione con un piano particolare.
Consideriamo la funzione $z = f(x, y)$ e le intersezioni della sua superficie con i piani paralleli al piano xy. Tali piani hanno equazione $z = k$ e quindi l'intersezione fra la superficie data ed il piano é la soluzione del sistema

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = k \end{cases}$$

Sostituendo la costante k al posto della variabile z si ottiene la linea o curva di livello di equazione $f(x, y) = k$.
Anche la funzione che si ottiene con una proiezione ortogonale sul piano xy prende lo stesso nome. In sostanza con il nome di linea di livello si indica sia la curva intersezionale della $f(x, y)$ con il piano, sia la sua proiezione sul piano xy.
Le linee di livello forniscono una rappresentazione dell'immagine della funzione alla quota k.
Le linee di livello non si intersecano mai l'una con l'altra.

Esercizio 3.1
Determiniamo le linee di livello della superficie d'equazione

$$z = f(x, y) = 3x + 3y.$$

La funzione ha per dominio $\mathbb{R}^2$ e le sue linee di livello si ottengono dall'intersezione della funzione con il piano $z = k$, cioé dalla risoluzione delle equazioni $3x + 3y = k$, al variare di k.
Al crescere di k le linee di livello si spostano verso destra e verso l'alto.
La figura 10 mostra le linee di livello della funzione $z = f(x, y) = 3x + 3y$.

Esercizio 3.2
Determiniamo le linee di livello della superficie d'equazione

$$z = f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2.$$

La funzione ha per dominio $\mathbb{R}^2$ e le sue linee di livello sono le intersezioni con il piano $z = k$, cioé la soluzione delle equazioni $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = k$, al variare di k.
Al crescere di k otteniamo circonferenze di raggio crescente. La figura 11 mostra le linee di livello della funzione $z = f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2$.

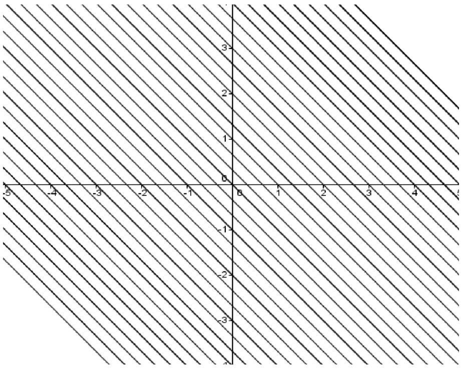

FIGURA 10. Linee di livello della funzione $z = f(x, y) = 3x + 3y$

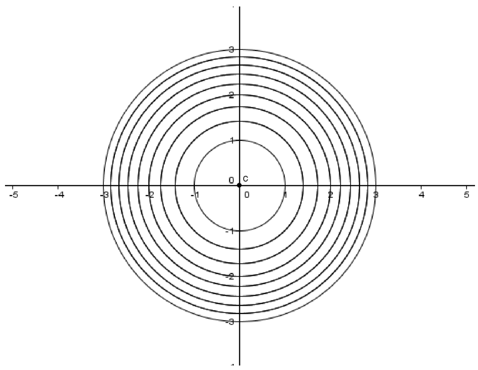

FIGURA 11. Linee di livello della funzione $z = f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2$.

Nella figura 12 di seguito riportata è mostrata la funzione $z = -2\,x^2 + x\,y - 3\,y^2$ e le funzioni $z = -2$, $z = -4$ e $z = -6$, ovvero le equazioni di tre piani paralleli al piano coordinato xy (di equazione $z = 0$).
Le tre sezioni individuate in figura descrivono il luogo dei punti (x, y) tale che $-2\,x^2 + x\,y - 3\,y^2 = k$ con $k = -2, -4, -6$.
Formalmente, fissato un certo k, il luogo dei punti (x, y) individuato si scrive:

$$c(k) = \{(x, y) : \; f(x, y) = k\}\,.$$

Queste coppie di valori (x, y) descrivono delle curve sul piano xy.
Ciascuna di esse è una *curva di livello*.
Nelle figure 13 e 14 sono riportate le curve di livello di $f(x, y) = -2\,x^2 + x\,y - 3\,y^2$ e $g(x, y) = 2\,x\,y\,e^{x-y}$.
Si noti che maggiore è la vicinanza fra curve di livello, maggiore sarà la pendenza in quell'area.

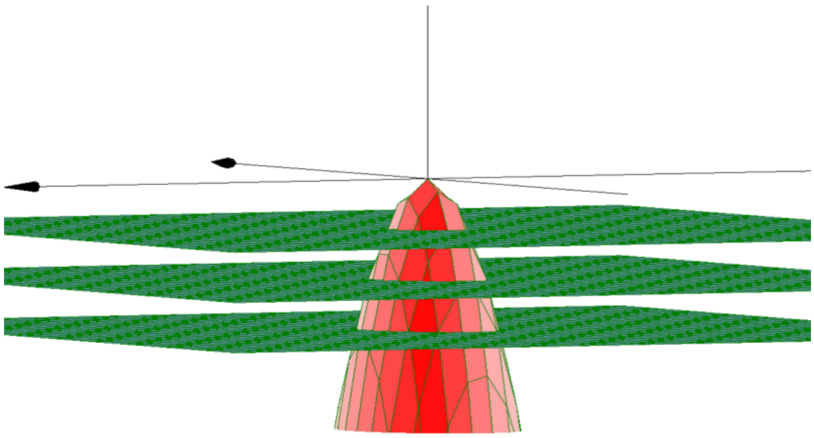

FIGURA 12. Rappresentazione delle funzioni $z = -2\,x^2 + x\,y - 3\,y^2$, $z = -2$, $z = -4$ e $z = -6$.

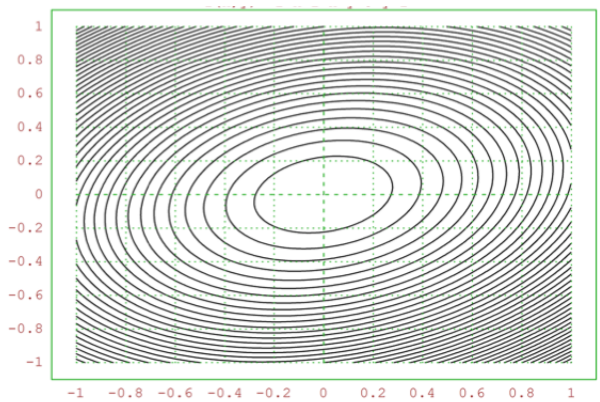

FIGURA 13. Curve di livello della funzione $f(x, y) = -2\,x^2 + x\,y - 3\,y^2$.

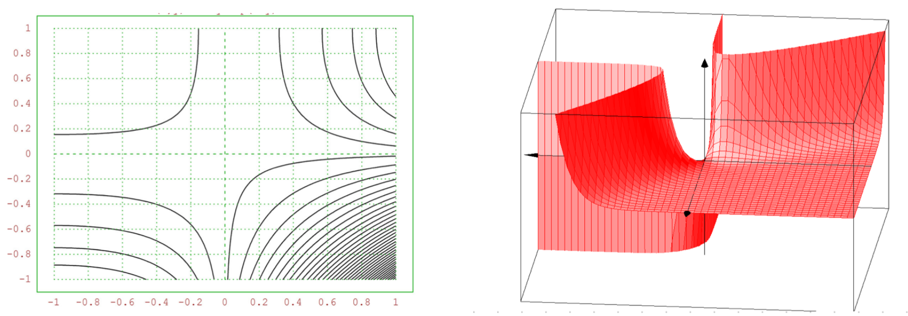

FIGURA 14. Pannello di sinistra: curve di livello della funzione $h(x, y) = 2\,x\,y\,e^{x-y}$. Pannello di destra: Rappresentazione della funzione $h(x, y) = 2\,x\,y\,e^{x-y}$.

4. Limiti e continuitá delle funzioni di due variabili

Prima di affrontare il concetto di limite di una funzione reale di due variabili reali, dobbiamo premettere alcune definizioni relative ai punti del piano.

Definizione Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ed un numero reale $r \in \mathbb{R}^+$, si definisce *intorno circolare* di (x_0, y_0) l'insieme dei punti (x, y) del piano la cui distanza da P_0 é minore di r.
L'insieme di tali punti é quello dei punti del cerchio di centro P_0 e raggio r, che soddisfano la relazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r$$

Si parla *d'intorno d'infinito* quando si considerano i punti esterni ad un cerchio di raggio arbitrariamente grande.

Definizione Un punto (x_0, y_0) di un insieme $A \in \mathbb{R}^2$ si dice *interno* all'insieme se esiste un intorno circolare di centro (x_0, y_0) formato esclusivamente da punti di A.

Definizione Un punto (x_0, y_0) di un insieme $A \in \mathbb{R}^2$ si dice *esterno* all'insieme se esiste un intorno circolare di centro (x_0, y_0) che non contiene alcun punto di A.

Definizione Un punto $(x_0, y_0) \in A \in \mathbb{R}^2$ che non é né interno né esterno si dice di *frontiera.* Un punto $(x_0, y_0) \in A \in \mathbb{R}^2$ é di frontiera se ogni suo intorno contiene sia punti interni che punti esterni ad A.

Definizione Un insieme di punti del piano si dice *limitato* se esiste un intorno che lo contiene; si dice *aperto* se i suoi punti sono tutti interni; si dice *chiuso* se i punti della sua frontiera gli appartengono.

Definizione Dato un insieme $A \in \mathbb{R}^2$ di punti del piano, si dice che un punto (x_0, y_0) é d'accumulazione per A se, comunque venga fissato un intorno circolare di (x_0, y_0), in esso cadono infiniti punti di A.

Definizione Data una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ed un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ che sia d'accumulazione per A, si dice che la funzione f ha per limite l per $P = (x, y)$ che tende a P_0 e si scrive

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$$

se, $\forall I(l)$, $\exists I(x_0, y_0)$: $\forall (x, y) \in I(x_0, y_0) \cap A$, con $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, segue che

$$f(x, y) \in I(l)$$

E' evidente l'analogia con le definizioni di limite delle funzioni di una sola variabile. Come per per il caso unidimensionale, se esiste il limite di una funzione di due variabili esso unico.
Per le funzioni di due variabili valgono gli stessi teoremi che valgono per quelle di una sola variabile:
unicitá del limite, limite della somma, del prodotto, del quoziente, delle

funzioni composte e cosí via.

Alcune osservazioni:

- Nelle funzioni di una sola variabile sostenere che $x \to x_0$ significa che x si avvicina a x_0 muovendosi su una retta. Nel caso delle funzioni di due variabili, sostenere che $(x, y) \to (x_0, y_0)$ significa che P si avvicina a P_0 lungo un percorso qualunque (e sono infiniti) che collega P a P_0;
- Per calcolare il limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ dobbiamo far tendere contemporaneamente x a x_0 e y a y_0 in modo indipendente. E' quindi sbagliato calcolare tale limite facendo tendere x a x_0 pensando ad y come ad una costante e poi far tendere y a y_0 pensando ad x come una costante;
- Per il calcolo del limite di una funzione di due variabili si seguono gli stessi criteri per il calcolo del limite di una funzione di una sola variabile.

Definizione Data una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ed un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in A \cap A'$, cioé un punto che sia d'accumulazione per A ed appartenente ad A, si dice che la funzione f é continua in $P_0 = (x_0, y_0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Se la funzione f é continua in ogni punto $(x_0, y_0) \in A$, allora si dice che é continua in A.

5. Le derivate parziali

Sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e siano $\mathbf{x}^0$ un punto interno di A, $\mathbf{v}$ un vettore di $\mathbb{R}^n$ tale che $||\mathbf{v}|| = 1$, ($\mathbf{v}$ prende allora il nome di versore) e $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ un numero reale tale che $\mathbf{x}^0 + h\mathbf{v} \in A$.

Definizione Definiamo rapporto incrementale della funzione f nel punto $\mathbf{x}^0$ lungo la direzione $\mathbf{v}$ e relativamente all'incremento t la quantitá:

$$\frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)}{h}$$

Definizione Il limite per $h \to 0$ del precedente rapporto incrementale, se esiste finito, cioé:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)}{h}$$

definisce la derivata direzionale della funzione f in $\mathbf{x}^0$ lungo la direzione $\mathbf{v}$.

Si noti che per $n = 1$ e $\mathbf{v} = 1$, la derivata direzionale di f coincide con la nota derivata $f'(x)$ di una sola variabile.

Tra tutte le possibili direzioni $\mathbf{v}$ percorribili in $\mathbb{R}^n$ si possono seguire quelle individuate dai vettori della base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dello spazio $\mathbb{R}^n$, dove:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\
\mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0) \\
&\dots\dots\dots \\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1)
\end{aligned}$$

Ciascun vettore (che é anche un versore) $\mathbf{e}_k$, per $k = 1, 2, 3, \dots, n$, ci permette di definire lo spostamento lungo uno solo degli n assi dello spazio $\mathbb{R}^n$ in cui é definita la funzione (l'asse x_k nel caso di $\mathbf{e}_k$), lasciando tutte le restanti n-1 variabili indipendenti fisse.

Definizione Sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e siano $\mathbf{x}^0$ un punto interno di A, $\mathbf{e}_k$ il k-esimo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^n$ e $h \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Definiamo derivata parziale della funzione f nel punto $\mathbf{x}^0$ rispetto alla k-esima variabile, il limite, se esiste finito, del rapporto incrementale costruito a partire da $\mathbf{x}^0$ lungo la direzione $\mathbf{e}_k$.
Scriveremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}^0)}{h}$$

La derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0)$ é allora la derivata della funzione (di una sola variabile) $y = f(x_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$ nel punto $x_1 = x_1^0$

Definizione Una funsione $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é detta derivabile in un punto $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ quando in esso esistono finite le derivate parziali della funzione rispetto a tutte e variabili x_k, $\forall k = 1, 2, \dots, n$.

Definizione Una funsione $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é detta derivabile in un insieme quando in ogni punto di tale insieme ammette derivate parziali rispetto a ciascuna variabile.

Per indicare la derivata parziale di f rispsetto a x_k, oltre al simbolo $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0)$, useremo anche la notazione $f_{x_k}(\mathbf{x}^0)$.

Nel caso di $n = 2$, le derivate parziali nel punto (x^0, y^0) assumono la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h, y^0) - f(x^0, y^0)}{h} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x^0, y^0 + h) - f(x^0, y^0)}{h}
\end{aligned}$$

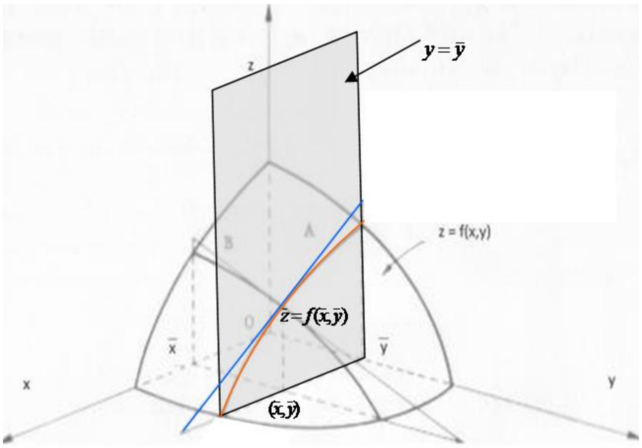

FIGURA 15. Rappresentazione geometrica delle derivate parziali. Caso $n = 2$.

Il caso $n = 2$ permette anche una rappresentazione del significato geometrico di derivata parziale. La Figura 15 fornisce tale rappresentazione nel punto di coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$.
Consideriamo, ad esempio, la derivata parziale rispetto a x. Essa si ottiene fissando $y = \bar{y}$ e derivando la funzione risultante (di una sola variabile), $g(x) = f(x, \bar{y})$, nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$. $g(x)$ rappresenta la curva sezione della superficie $z = f(x, y)$ con il piano $y = \bar{y}$ (la curva arancione in fig. 15). Dunque $f_x(\bar{x}, \bar{y})$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente a tale curva sezione (la retta blu in fig. 15) per $x = \bar{x}$, cioé nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
Un significato analogo si ha per $f_y(\bar{x}, \bar{y})$.
Dalla definizione di derivata parziale segue che le regole di calcolo conosciute per le funzioni di una variabile si estendono immediatamente al caso di funzioni definite in $\mathbb{R}^n$. É infatti sufficiente, quando si deriva rispetto a una variabile, considerare le altre come costanti.
A differenza peró di quanto accadeva per le funzioni di una variabile, la derivabilitá non é condizione sufficiente a garantire la continuitá della funzione.

Definizione Sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si definisce gradiente di f, ∇f o grad(f), la funzione a valori vettoriali che ha per componenti le derivate parziali prime della funzione. Per $n = 2$, il gradiente di f é;

$$\nabla f(x_1, x_2) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\Big)$$

Cosí come per le funzioni reali di una variabile reale é possibile calcolare la derivata seconda quando la derivata prima é una funzione a sua volta derivabile, analogamente si puó procedere per le funzioni di piú variabili al verificarsi delle necessarie condizioni.

Sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in A e $\mathbf{x} \in A$.
La derivata parziale prima $f_{x_i}(\mathbf{x})$, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$, é una funzione definita in $B \subseteq A$ e a valori in $\mathbb{R}$, che associa ad ogni $\mathbf{x}^0 \in B$ il numero reale $f_{x_k}(\mathbf{x}^0)$.
Se la derivata parziale prima $f_{x_i}(\mathbf{x})$, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$ é una funzione a sua volta derivabile, se ne puó calcolare la derivata parziale rispetto a ciascuna variabile $x_j \in \mathbf{x}$, $\forall j = 1, 2, 3, \ldots, n$.
Le derivate cosí ottenute si dicono derivate parziali seconde della funzione f e si indicano con:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Le derivate parziali seconde si distinguono in:

- derivate parziali seconde pure se $i = j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$, ottenute cioé calcolando la derivata parziale di f due volte rispetto alla stessa variabile x_i, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$;
- derivate parziali seconde miste se $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$, ottenute cioé calcolando la derivata parziale di f due volte, prima rispetto ad x_i e poi rispetto ad x_j, $\forall i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ e $i \neq j$.

Per indicare la derivata parziale seconda di f useremo anche la notazione $f_{x_i x_j}(\mathbf{x})$.

Teorema 5.1. *(di Schwarz) Sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $\boldsymbol{x}^0$ punto interno di A. Se le derivate parziali seconde miste $f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x})$ e $f_{x_j x_i}(\boldsymbol{x})$ esistono in un intorno di $\boldsymbol{x}^0$ e sono continue in $\boldsymbol{x}^0$, allora risulta:*

$$f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}^0) = f_{x_j x_i}(\boldsymbol{x}^0).$$

Poiché le funzioni elementari e tutte quelle che da esse si ottengono con operazioni algebriche e con le operazioni di composizione ammettono internamente al loro dominio derivate di qualsiasi ordine continue, il precedente teorema permette di affermare che per tutte queste funzioni le derivate parziali seconde miste sono uguali.

Definizione Sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}^0$ un punto interno di A. Chiamiamo matrice hessiana o hessiano di f nel punto $\mathbf{x}^0$ la matrice simmetrica H_f di dimensione $n \times n$ tale che:

$$(H_f(\mathbf{x}^0))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^0)$$

Esercizio 5.1
Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = e^{x/y}$.
$\nabla f(x, y) = (\frac{e^{x/y}}{y}, \frac{-xe^{x/y}}{y^2})$,

Esercizio 5.2
Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = x^2 + 2xy - xy^2$.
$\nabla f(x,y) = (2x + 2y - y^2, 2x - 2xy)$.

Esercizio 5.3
Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione $f(x,y) = ln(1 - x^2 - y^2)$, verificando la validitá del teorema di Schwarz.
$f_x(x,y) = \frac{-2x}{1-x^2-y^2}$, $f_y(x,y) = \frac{-2y}{1-x^2-y^2}$,
$f_{xx}(x,y) = -2\frac{1+x^2-y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$,
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$
$f_{xx}(x,y) = -2\frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$.

6. Il piano tangente ad una superficie

Sia $f : A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e (x^0, y^0) un punto interno di A. Per ció che abbiamo appena detto, la derivata parziale della funzione $z = f(x,y)$ rispetto a x nel punto (x^0, y^0) rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva sezione della superficie $z = f(x,y)$ con il piano $y = y_0$ nel punto (x^0, y^0, z^0). Analogamente, la derivata parziale della funzione $z = f(x,y)$ rispetto a y nel punto (x^0, y^0) rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva sezione della superficie $z = f(x,y)$ con il piano $x = x_0$ nel punto (x^0, y^0, z^0).
Se teniamo presente che due rette che si intersecano definiscono un piano, le due rette tangenti alle curve sezioni definiscono il piano tangente alla superficie nel punto (x^0, y^0, z^0).
Si dimostra che tale piano ha equazione:

$$z - z_0 = f_x(x^0, y^0)(x - x_0) + f_y(x^0, y^0)(y - y_0)$$

Puó chiaramente accadere che la superficie non abbia piano tangente in (x^0, y^0, z^0).Ció succede quando le curve sezioni non ammettono retta tangente in (x^0, y^0, z^0).

Esercizio 6.1
Determinare il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^3 - y^3$, nel punto $(0, 1, -1)$.

$f(0,1) = -1$;
$f_x(x,y) = 3x^2$, $f_x(0,1) = 0$;
$f_y(x,y) = -3y^2$, $f_y(0,1) = -3$;

Quindi l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto dato é:

$z = -1 + 0 * (x - 0) - 3 * (y - 1) = -1 - 3y + 3 = -3y + 2$

Esercizio 6.2
Determinare il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^y + y^x$, nel punto $(1,1,2)$.

$f(1,1) = 2;$
$f_x(x,y) = yx^{y-1} + y^x ln(y),\ f_x(1,1) = 1 * x^0 + 1 * 0 = 1;$
$f_y(x,y) = x^y ln(x) + xy^{x-1},\ f_y(1,1) = 1 * 0 + 1 * y^0 + = 1;$

Quindi l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto dato é:

$z = 2 + 1 * (x-1) + 1 * (y-1) = 2 + x - 1 + y - 1 = x + y$

7. Massimi e minimi di una funzione di due variabili

Come nel caso delle funzioni di una sola variabile reale, anche per le funzioni di due variabili é importante saper determinare i punti di massimo e minimo. Vediamo un esempio.

Esercizio 7.1
Calcolare e rappresentare graficamente il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-4}{y-1}}$$

In questo caso il dominio della funzoine é dato dai valori di x e y per cui risulta soddisfatta la disequazione razionale fratta $\frac{x^2+y^2-4}{y-1} \geq 0$.
Quindi D $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2+y^2-4}{y-1} \geq 0\}$.
L'area col doppio tratteggio della figura 9 fornisce la rappresenta grafica del dominio della funzione.

Example 7.1. *Si sa che la domanda di un bene dipende dal suo prezzo. Una fabbrica che produce televisori e videoregistratori ha rilevato che le relazioni fra i prezzi e le quantitá vendute sono le seguenti:*

- $x_1 = 8000 - 8 * p_1$
- $x_2 = 7200 - 10 * p_2$

dove x_1 rappresenta la domanda di televisori ed x_2 quella di videoregistratori e dove p_1 e p_2 sono i prezzi dei due beni.
Supponiamo che il costo per la produzione sia dato da $C_1 = 400 * x_1 + 0.5 * x_1^2$ e $C_2 = 600 * x_2 + 0.4 * x_2^2$, per cui il costo totale di produzione sará:

$$C = C_1 + C_2 = 400 * x_1 + 0.5 * x_1^2 + 500 * x_2 + 0.4 * x_2^2.$$

Il ricavo dell'azienda é dato dalla somma dei prodotti del prezzo di vendita di ciascun bene, il tutto moltiplicato per la quantitá venduta, *vale a dire:*

$$
\begin{aligned}
R =&p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = \big(1000 - 1/8 * x_1\big) * x_1 + \big(720 - 1/10 * x_2\big) * x_2 = \\
=&1000 * x_1 - 1/8 * x_1^2 + 720 * x_2 - 1/10 * x_2^2.
\end{aligned}
$$

Il profitto dell'azienda é espresso dalla seguente relazione:

$$
\begin{aligned}
P =&R - C = \\
=&1000 * x_1 - 1/8 * x_1^2 + 720 * x_2 - 1/10 * x_2^2 + \\
&- \big(400 * x_1 + 0.5 * x_1^2 + 500 * x_2 + 0.4 * x_2^2\big) = \\
=&600 * x_1 - 5/8 * x_1^2 + 220 * x_2 - 1/2 * x_2^2.
\end{aligned}
$$

Diventa interessante studiare come varia il profitto in dipendenza dalle variabili x_1 e x_2 e stabilire se esiste qualche punto in cui tale profitto diventa massimo.

I termini massimo e minimo sono stati usati finora in modo intuitivo. Vediamo di precisare meglio questi concetti.
Sia $f : A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ un punto interno di A.
Si dice che un punto $\mathbf{x}^0$ é un punto di minimo relativo per f se esiste un intorno di tale punto contenuto in A tale che $\forall x_1, x_2 \in A$:

$$f(x_1, x_2) \geq f(x_1^0, x_2^0).$$

Analogamente, un punto $\mathbf{x}^0$ é punto di massimo relativo per f se esiste un intorno di tale punto contenuto in A tale che $\forall x_1, x_2 \in A$:

$$f(x_1, x_2) \leq f(x_1^0, x_2^0).$$

Si parla invece di punto di minimo assoluto e di massimo assoluto se le relazioni precedenti sono vere per ogni $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in A$.
I punti di massimo e di minimo vengono detti punti estremanti della funzione.

7.1. La determinazione dei punti di massimo e di minimo.

Tra i principali modi per determinare i punti di massimo e di minimo relativi di una funzione di due variabili troviamo l'uso delle derivate parziali.
Se una funzione $f : A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é derivabile in A, per determinare i suoi punti di massimo e minimo relativi possiamo ricorrere ad un metodo che si basa sul calcolo delle derivate parziali.

Teorema 7.1. *Sia $f : A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Condizione necessaria per l'esistenza di un punto di massimo o di minimo relativo in $\boldsymbol{x}^0$ interno ad A é che tale punto annulli le derivate parziali prime.*

Tali punti si dicono punti critici della funzione f.
I punti di massimo e di minimo relativi della funzione vanno quindi ricercati fra quelli che annullano le derivate parziali prime di f, cioé fra le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_{x_1}(\mathbf{x}) = 0 \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

Se infatti la funzione f assume il suo valore massimo in un punto $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, la sua linea sezione con il piano per $\mathbf{x}^0$ parallelo al piano coordinato xz, cioé la funzione $f(x_1, x_2^0)$, deve avere un massimo in $\mathbf{x}^0$ e anche la linea sezione con il piano parallelo al piano coordinato yz, cioé la funzione $f(x_1^0, x_2)$, deve avere un massimo in $\mathbf{x}^0$. Questo significa che le derivate prime di queste funzioni devono annullarsi nel punto (x_1^0, x_2^0).

Il teorema tuttavia fornisce solo una condizione necessaria per l'esistenza di punti di massimo o di minimo relativi, ma non una condizione sufficiente.
Puó infatti accadere che si annullino entrambe le derivate parziali prime ma che il punto (x_1^0, x_2^0) sia un punto di massimo per $f(x_1, x_2^0)$ ed un punto di minimo per $f(x_1^0, x_2)$, sia cioé un punto di sella, oppure sia un punto di flesso a tangente orizzontale per una o per entrambe le funzioni.
Abbiamo quindi bisogno della condizione sufficiente per stabilire se un punto critico (x_1^0, x_2^0) sia un punto stremante per f.
Vale il seguente teorema:

TEOREMA 7.2. *Siano $f : A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}^0$ un punto critico per f, cioé tale che $f_{x_1}(\boldsymbol{x}^0) = f_{x_2}(\boldsymbol{x}^0) = 0$, e sia $H_f(x_1^0, x_2^0)$ l'hessiano di f calcolato in $\boldsymbol{x}^0$.*

- *Se $H_f(x_1^0, x_2^0) > 0$ e, contemporaneamente, $f_{x_1 x_1}(\boldsymbol{x}^0) > 0$ allora $\boldsymbol{x}^0$ é un punto di minimo relativo;*
- *Se $H_f(x_1^0, x_2^0) > 0$ e, contemporaneamente, $f_{x_1 x_1}(\boldsymbol{x}^0) < 0$ allora $\boldsymbol{x}^0$ é un punto di massimo relativo;*
- *Se $H_f(x_1^0, x_2^0) < 0$ allora $\boldsymbol{x}^0$ é un punto di sella;*
- *Se $H_f(x_1^0, x_2^0) = 0$ non si puó dire nulla su $\boldsymbol{x}^0$ e si deve indagare in modo diverso.*

Esercizio 7.2
Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella della funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$.
Calcoliamo le derivate parziali prime della funzione:
$f_x(x, y) = 3x^2 + y$, $f_y(x, y) = 3y^2 + x$.
Il gradiente di f quindi sará: $\nabla f(x, y) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$ da cui, per la condizione necessaria $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzione le coppie di valori $(0, 0)$, e $(-1/3, -1/3)$.

Per determinare la natura dei punti critici trovati calcoliamo le derivate parziali seconde in modo da costruire la matrice hessiana.

$f_{xx}(x, y) = 6x$, da cui $f_{xx}(0, 0) = 0$ e $f_{xx}(-1/3, -1/3) = -2$
$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1$, da cui $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 1$ e $f_{xy}(-1/3, -1/3) = f_{yx}(-1/3, -1/3) = 1$
$f_{yx}(x, y) = -2\frac{1+x^2-y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$,
$f_{yy}(x, y) = 6y$, da cui $f_{yy}(0, 0) = 0$ e $f_{yy}(-1/3, -1/3) = -2$.
Le matrici hessiane in corrispondenza dei punti critici trovati saranno quindi:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$

da cui

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$H(-1/3, -1/3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il punto $(0, 0)$ risulta quindi essere una sella ed il punto $(-1/3, -1/3)$ un massimo relativo.