

Integrale di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$

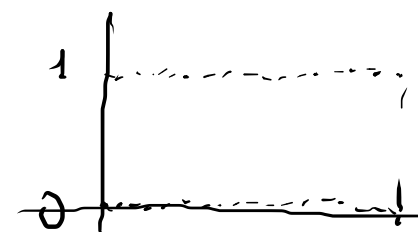
Perché?

$$f(x) = \chi_D$$

$$D = [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

funzione di Dirichlet

$$f(x) = \chi_D = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$



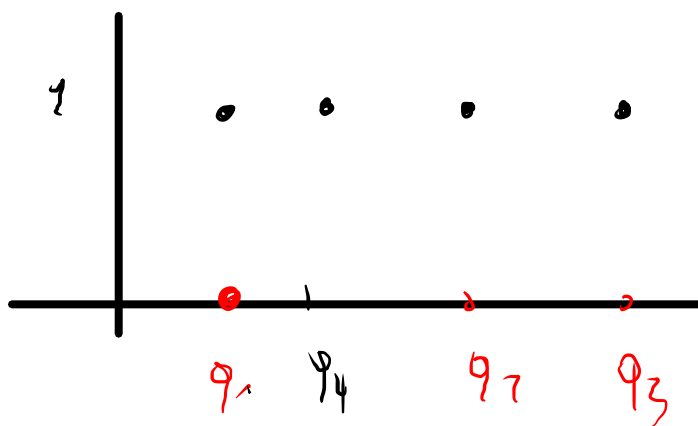
$$\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \quad q_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$= D$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \chi_{\{q_k\}}(x)$$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \chi_D(x)$$



Misure di Peano-Jordan

$$m_{PJ}(E) = \int \chi_E$$

Si dice che una misura m è numericamente additiva se si ha che

per ogni famiglia numerabile di insiemi $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ con E_n misurabili,
allora $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ è misurabile e $m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n)$

se $E_k \cap E_j = \emptyset$ per ogni $k \neq j$

$\{x : \text{esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x \in E_n\}$

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

m_{PJ} non è numericamente additiva:

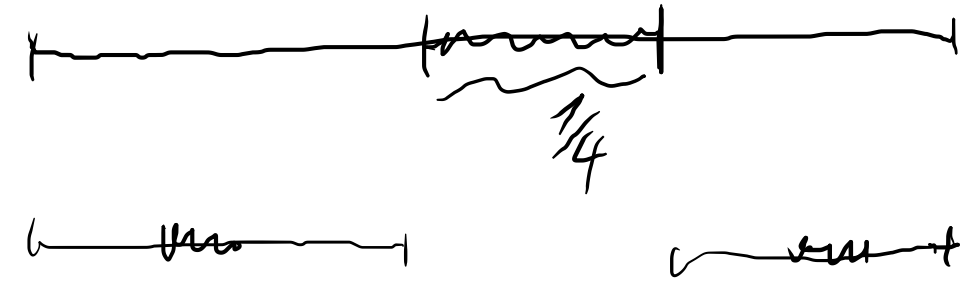
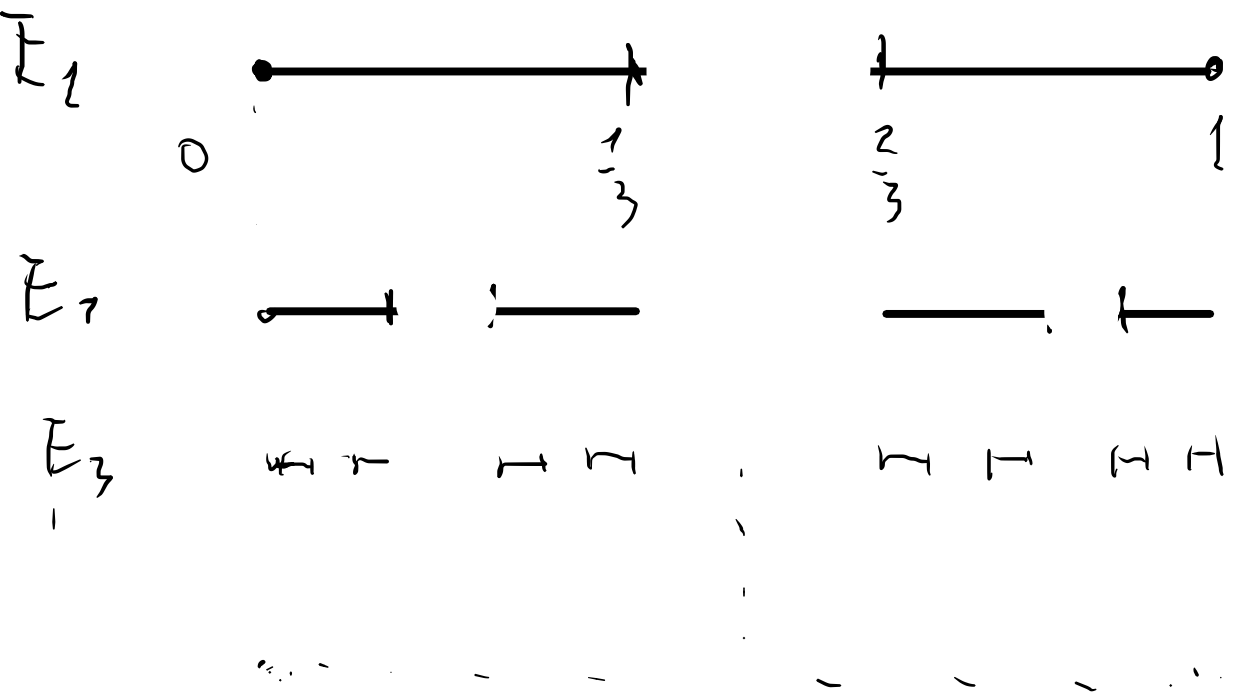
$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{q_n\}$$

$E_n = \{q_n\}$ è misurabile secondo P.J.

$$m_{PJ}(E_n) = 0$$

però $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ non è P.J. misurabile!

Insiemi aperti e compatti



For Cont-2 Set

C insieme di Cantor

$\bigcap E_n$

χ_D

L'integrale di Riemann "non si comporta bene" con il limite

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è uniforme?

~~SI~~

$$\frac{n}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \pi$$

~~0~~
X !!
= π

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\frac{n}{n^2 + x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} dx$$

$$dx =$$

$$\frac{x}{n} = y \quad dy = \frac{1}{n} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy$$

Insiemi di misura nulla

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ è di misura nulla secondo ~~P.J.~~ ^{Lebesgue} se e solo se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un pluriretangolo $P = \bigcup_{n=1}^k R_n$ tale che $E \subseteq P$ e $m(P) < \varepsilon$.

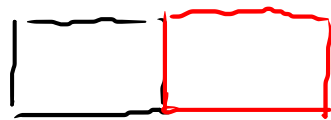
o-pluriretangolo

unione finita

unione numerabile

$$m(P) = \sum_{n=1}^k m(R_n)$$

$$\text{int}(R_i \cap R_j) = \emptyset$$

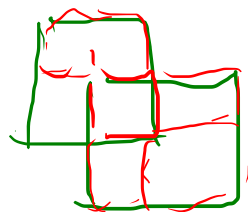


$\mathbb{R}^n$

$$[a, b] \times [c, d]$$

$$]a, b[\times]c, d[$$

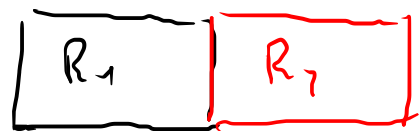
$$]a, b[\times]c, d[$$



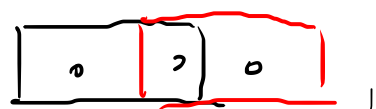
Def. Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di misura nulla secondo Lebesgue se
 $\forall \varepsilon > 0$ esiste un ω -pluri-rettangolo P $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ (R_n rettangoli)
 tale che $E \subseteq P$ e $m(P) < \varepsilon$
 $\hat{=}$ misura "elementare" $= \sum_{n=1}^{\infty} m(R_n)$ $\Rightarrow m(R_i \cap R_j) = \emptyset$
 $\forall i \neq j$

E numerabile
 En $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$

Fisso $\varepsilon > 0$, considero $R_n = \left[q_n, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right]$ $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ $\mathbb{D} \subset P$
 $m(P) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(R_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$



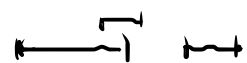
$$m(R_1 \cup R_2) = m(R_1) + m(R_2)$$



$$m(R_1 \cup R_2) \leq m(R_1) + m(R_2)$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad P$

$$m(P) < \varepsilon$$



$$\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$m(P) \neq \sum m(R_n)$$

$$\underline{m(P)} \leq \sum m(R_n) < \underline{\varepsilon}$$

$$[q_n, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}]$$

13.15

OSS: E di misura nulla secondo P.J. $\Rightarrow$ E di misura nulla secondo Lebesgue

Proprietà verificata quasi ovunque (q.o.) (d.e.)
significa verificata per ogni $x \in X - N$ almost everywhere

con $m_L(N) = 0$
misura di Lebesgue

Esempi: "x è un numero irrazionale" è q.o. vero su $\mathbb{R}$

$\sin x \cdot \cos y \neq 0$ q.o. su $\mathbb{R}^2$

" $\chi_D(x) = 0$ " q.o. su $[0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx^2} = 0$$

q.o. su $\mathbb{R}$

$$x \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx^2} = 1 !$$

Diciamo A e B sono quasi disgiunti se $A \cap B$ è un insieme di misura nulla.

Funzioni a scalare

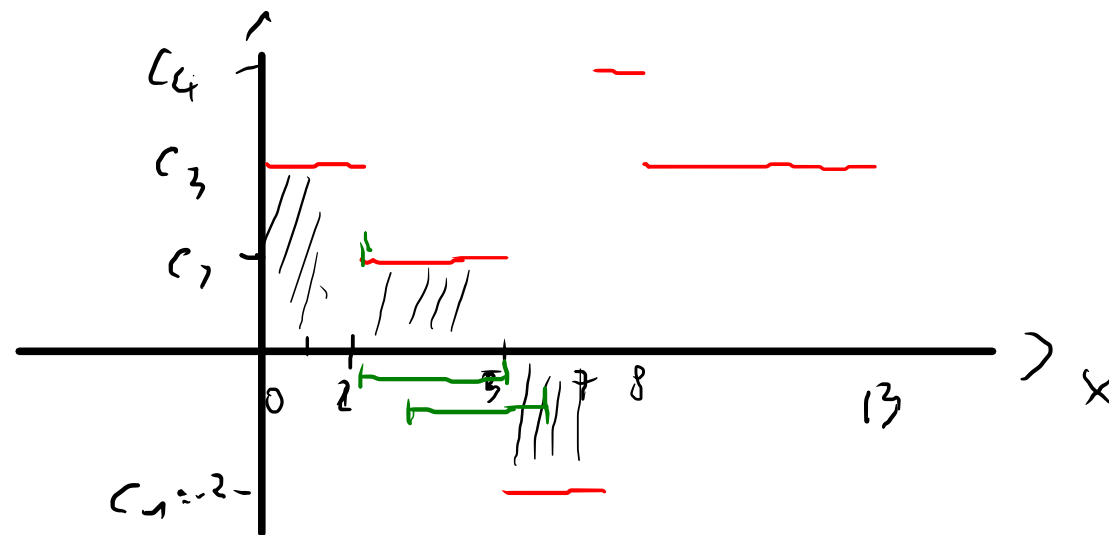
$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice una

funzione a scalare se è esprimibile
come combinazione lineare (finita)
di funzioni caratteristiche definite su
rettangoli e due o due gruppi disgiunti

$$\varphi(x) = c_1 \chi_{R_1}(x) + c_2 \chi_{R_2}(x) + \dots + c_k \chi_{R_k}(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^k c_j \cdot m(R_j)$$

Integrale
di Riemann



$$4 \chi_{[0,2]} + 2 \chi_{[2,5]} - 3 \chi_{[5,7]} + 6 \chi_{[7,8]} + 4 \chi_{[8,13]} + 0 \cdot \chi_{[-\infty, 0]} + 0 \cdot \chi_{[13, +\infty]}$$

Osservazione: ogni funzione combinazione lineare di funzioni caratteristiche su rettangoli (non necessariamente a 2×2 punti disgiunti) è una funzione a scala

ogni combinazione lineare di funzioni a scala è una funzione a scala
il modulo di una funzione a scala è una funzione a scala

Nello spazio delle funzioni a scala si può considerare la norma L^1 :

$$\| \varphi \|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} | \varphi(x) | dx$$

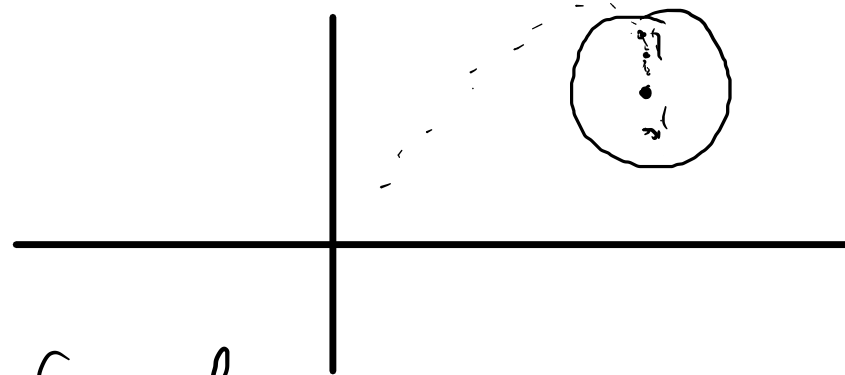
$$d_1(\varphi, \psi) = \| \varphi - \psi \|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} | \varphi(x) - \psi(x) | dx$$

Successioni di Cauchy (in uno spazio metrico)

Sia (X, d) uno spazio metrico; una successione $(x_n)_n$ $x_n \in X$ si dice una successione di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che ...
 $\forall m, k \geq n_\varepsilon \quad d(x_m, x_k) < \varepsilon$.

$$\left[\text{tale che } \forall n \geq n_\varepsilon \quad \text{e } \forall p \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon \right]$$

$$\left[\lim_{m, n \rightarrow +\infty} d(x_m, x_n) = 0 \right]$$



OSS : ogni successione convergente è di Cauchy.

⚠ In generale possono esistere spazi metrici e successioni di Cauchy che non sono convergenti. Es. $X = \mathbb{Q}$ sia $x_n \in \mathbb{Q}$ $x_n \rightarrow \pi$
 $x_n \in X$ $(x_n)_n$ è di Cauchy ma non è convergente

Uno spazio metrico si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente.

$\mathbb{R}^n$ è completo. $\mathbb{C}$ è completo

$C^0([0,1], \mathbb{R})$ $\| \varphi \|_\infty = \max \{ |\varphi(x)| : x \in [0,1] \}$
 $d(\varphi, \psi) = \| \varphi - \psi \|$ è completo

$X = \{ \text{funzioni a valore in } \mathbb{R} \}$ $\| \varphi \|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx$

X non è completo

Definizione

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ se esiste una successione di funzioni a valore $(\varphi_n)_n$ $[\varphi_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}]$ tale che

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \underline{f(x)}$ q.o. in $\mathbb{R}^n$

2. $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx = 0$

[cioè la successione $(\varphi_n)_n$ è di Cauchy nello spazio delle funzioni a valore
con la norma $\|\cdot\|_1$]

Se una funzione f soddisfa la 1. (e non necessariamente la 2.) diremo che f è misurabile.

ES) : f è integrabile (secondo Lebesgue)

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_n - f_m| dx = 0$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_n dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_m dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_n - f_m| dx \rightarrow 0$$

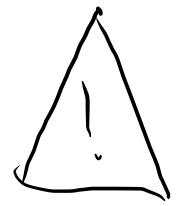
$$\Downarrow \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_n dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_m dx \right| = 0$$

cioè la successione di numeri complessi $\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) dx \right)_n$ è una

successione di Cauchy in $\mathbb{C}$, quindi esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f_n(x)}_{\in \mathbb{C}} dx =: \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

integrale di Lebesgue di f



Possono esistere diverse successioni
che verificano le proprietà 1. e 2.

$$\left((\varphi_n)_n \right) \neq (\psi_n)_n$$

Si può dimostrare che in questo caso

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_n(x) dx.$$

$$\underbrace{m([0,1] \setminus \mathbb{Q})}_{\mathbb{R}} = 1$$

$$m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$$

$$f_{\mathbb{R}}([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = [0,1]$$