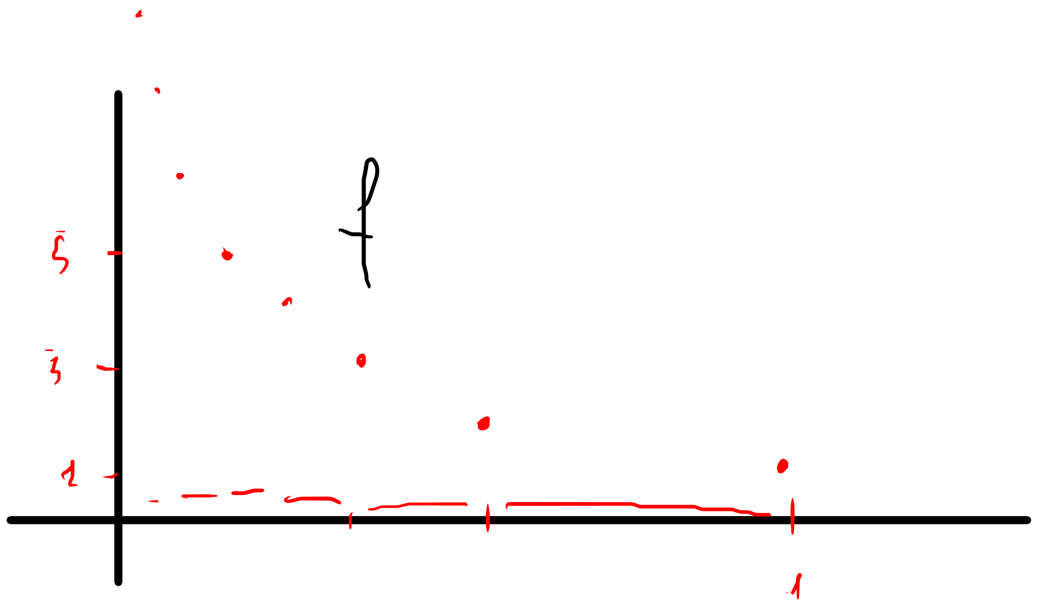
$\boxed{\text{Spazi } L^p}$

$p = 1 \qquad p = 2 \qquad p \geq 1$

$p = \infty \qquad \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \qquad C([0,1]) \qquad \|\varphi\|_\infty = \underset{x \in [0,1]}{\overset{\sup}{\max}} |\varphi(x)|$

$f = g$ se $f(x) = g(x)$ q.o.

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{se } x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \} \end{cases}$$



$\sup f = +\infty \qquad \sup f = \min \{ M : f(x) \leq M \ \forall x \in E \}$

però $f(x) = 0$ q.o.

$\text{ess sup} f \qquad \text{ess sup} f = \min \{ M : f(x) \leq M \text{ q.o. su } E \}$

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ f si dice essenzialmente limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ q.o. in E.

Poniamo $\|f\|_\infty = \operatorname{sup\,ess}|f| = \min\{M \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq M \text{ q.o. su } E\}$

$X = \{f : E \to \mathbb{C}$ essenzialmente limitate misurabili$\}$

$$\boxed{L^\infty(E) = \frac{X}{\sim}} \qquad f \sim g \text{ se } f(x) = g(x) \text{ q.o.}$$

$L^\infty(E)$ è uno spazio di Banach

Osservazione

Se $\underline{E \text{ è di misura finita}}$ si ha che $\forall\, p, q \in [1, \infty]$

se $p < q$ allora $L^q(E) \underset{\neq}{\subset} L^p(E)$.

$\boxed{L^\infty(E) \subset L^2(E)} \subset L^1(E)$

<u>Dim</u> Sia $\underline{f \in L^\infty(E)} \Rightarrow f \in L^2(E)$

$$\|f\|_2^2 = \int_E |f(x)|^2\,dx \le \int_E \underset{\sim}{M^2}\,dx = M^2 \underline{\underline{m(E)}} < \infty$$

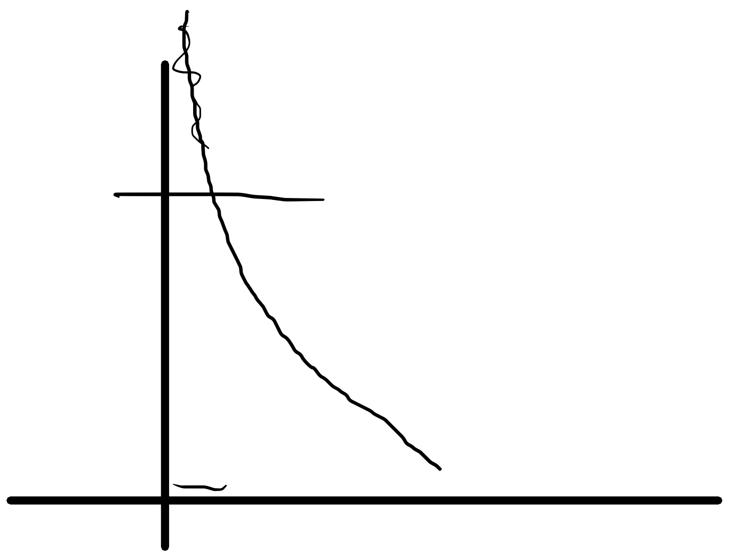
$\exists M : \quad |f(x)| \le M$ q.o.

OSS: la cosa non vale se $m(E) = +\infty$.

Es $f(x) = 1$ $\quad f \in L^\infty(\mathbb{R})$ ma $f^2 = 1$ non è integrabile su $\mathbb{R}$

Es:
$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} & x \in]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \qquad f \notin L^{\infty}([0,1])$$



$$f \in L^2([0,1])$$

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

$$L^2(E) \underset{\neq}{\subset} L^1(E)$$

Sia $f \in L^2(E) \implies f \in L^1(E)$

$$\|f\|_1 = \int_E |f|\, dx = \int_E |f| \cdot 1\, dx = \langle |f|, 1 \rangle \leq \|f\|_2 \cdot \underbrace{\|1\|_2}_{= \sqrt{m(E)}} < \infty$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in]0,1] \\ 0 & \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$$

$f \in L^1([0,1])$

$\notin L^2([0,1])$

Teorema della convergenza dominata di Lebesgue

In generale <u>NON è vero</u> che $\int_E \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$

Per l'integrale di Riemann, se $m(E)$ è finito, se la convergenza è uniforme allora funziona

es: $f_n(x) = \underline{e^{-nx^2}}$ su $[0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x\neq 0 \end{cases}$$

la convergenza NON è uniforme

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \,?$$

OSS $\boxed{e^{-nx^2} \leq e^{-x^2}}$ $\forall n\ \forall x$

la funzione e^{-x^2} è integrabile.

Allora il teorema della convergenza dominata di Lebesgue mi permette di concludere che $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{-nx^2}dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2} dx = 0$

Teorema (Lebesgue)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $(f_n)_n$ $f_n : E \to \mathbb{C}$ misurabile $f : E \to \mathbb{C}$ misurabile

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ q.o. su E (convergenza puntuale q.o.)

Esiste una funzione integrabile $g : E \to \mathbb{R}$ tale che $\forall n$ e per quasi ogni $x \in E$ si abbia

$$\boxed{|f_n(x)| \leq g(x)}$$

Es: $f_n(x) = e^{-nx^2}$

$f(x) = 0$

$|f_n(x)| \leq \underset{g(x)}{\underset{\shortparallel}{e^{-x^2}}}$

Allora, la funzione f è integrabile su E e si ha

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n(x)\,dx$$

Es:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}}\,dx = \ ? \ \ast$$

$$\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{\le e^{x}} e^{-2x} = e^{-x} \quad \forall x\in[0,+\infty[$$

cerco $g(x)$ integrabile tale che $|f_n(x)|\le g(x)$ $\forall n$ q.o. x

$$f_n(x)\le e^{-x}$$

e^{-x} è integrabile su $[0,+\infty[$

$$\Rightarrow \ast = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}}_{e^{-x}}\,dx = 1$$

Conseguenze:

f_n, f misurabili
g integrabile
$|f_n| \le g \quad \Rightarrow \quad \ldots$ $\boxed{13.10}$

Sia f misurabile; poniamo $f_n(x) = f(x)$ $\forall n$

f misurabile

se esiste g integrabile con $\boxed{|f(x)| \le g(x)}$ q.o. x allora f è integrabile

Es per Riemann $|\chi_D(x)| \le 1$ su $[0,1]$ 1 è R-integrabile ma χ_D non lo è

Dirichlet

Inoltre se $|f|$ è integrabile, allora f è integrabile.

[f integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile]

Funzione derivabile in $\mathbb{C}$

$$f'(z) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

f derivabile in z $\Rightarrow$ valgono le condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann.

Es: $f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$ $\qquad \hat{f}(x,y) = f(x+iy)$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ z = x \\ [y=0]}} \frac{\frac{x^5}{|x|^4}}{x} = 1 \qquad \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ x=0 \\ z=iy}} \frac{\frac{(iy)^5}{|iy|^4}}{y} = \frac{\frac{iy^5}{y^4}}{y} = i$$

$$\boxed{\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial y}(0,0)}$$

C.R. soddisfatta

Però la funzione non è derivabile in 0! $z = \rho e^{i\vartheta}$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{z^5}{|z|^4} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^5 e^{5i\vartheta}}{\rho^4} = 0$$

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\frac{\cancel{\rho^5} e^{5i\vartheta}}{\cancel{\rho^4}}}{\cancel{\rho} e^{i\vartheta}} = \lim_{\rho \to 0} e^{4i\vartheta} = e^{4i\vartheta}$$

dipende da ϑ!

quindi il limite non esiste!

Teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili

$f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad z_0 \in E$, $\quad f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Allora f è derivabile in z_0 se e solo se valgono 1 e 2

1 Cauchy-Riemann

2 u e v come campi scalari in $\mathbb{R}^2$ sono differenziabili

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ A aperto, $z_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{C}$ si dice olomorfa in z_0 se esiste un intorno U di z_0 tale che f sia derivabile in U.

Se f è olomorfa su $\mathbb{C}$ diremo che f è intera

Es: $f(z) = |z|^2$ 148-808-905

f è olomorfa in $z_0 = 0$?

$f(x+iy) = x^2 + y^2$

$u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono C^∞

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

C. R. soddisfatte

f è derivabile in 0;

se $z_0 \neq 0$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0 \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies x_0 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies y_0 = 0$$

l'unico punto dove f è derivabile è 0! Quindi f NON è olomorfa in 0!

Serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad f : E \to \mathbb{C}$$

E = insieme di convergenza

$= \{ z \in \mathbb{C} : \text{la serie } \sum a_n (z-z_0)^n \text{ converge} \}$

Si dimostra che l'insieme di convergenza è un disco (disco di convergenza)

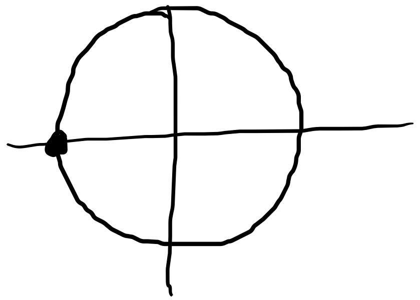
$$B(z_0, \rho) \subseteq E \subseteq \overline{B(z_0, \rho)}$$

ρ è il raggio di convergenza della serie

$\rho \in [0, +\infty]$ $\quad (\rho = +\infty \quad E = \mathbb{C})$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad \rho = 1 \qquad f \text{ è definita su } B(0,1)$$

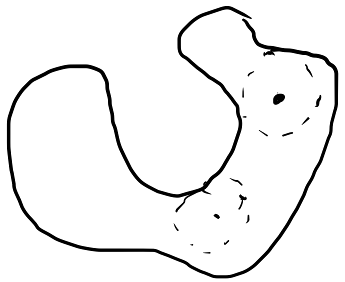
$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n \qquad \rho = 1 \qquad f : B(0,1) \cup \{-1\}$$



Si dimostra che in ogni compatto strettamente contenuto nel disco di convergenza la serie è uniformemente convergente, inoltre la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, n\, (z-z_0)^{n-1} \quad \text{è convergente a } f'$$

$$\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty}} a_n (z-z_0)^n$$



f serie di potenze $\Rightarrow$ f è C^∞ e vale la derivazione a termine a termine

Una funzione $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice **analitica** se per ogni $z_0 \in A$ e per ogni palla $B(z_0, \rho) \subseteq A$ esiste una successione $(c_n)_n$ $c_n \in \mathbb{C}$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, \rho)$$

Per il teorema di Taylor si ha $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

Esempi:

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n}$$ è intera

$$\boxed{\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}$$ "

$$\cos z = \ldots \quad z^{2n}$$

$$z \rightsquigarrow -z$$

$$(-z)^{2n+1} = (-z)$$

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$$

$$(-z)^{2n} = z^{2n} \qquad \cos(-z) = \cos(z)$$

$$\operatorname{sen}h\, z = \ldots$$

$$\cos h\, z = \ldots$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

NON è la definizione!

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

NON è la def.!

Si dimostra la formula di Eulero

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} i^n \alpha^n \qquad \sum \frac{1}{(2n)!} i^{2n} \alpha^{2n} \qquad \sum \frac{1}{(2n+1)!} i^{2n+1} \alpha^{2n+1}$$

$$i^n = \begin{cases} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{cases}$$

Si dimostra che vale $\forall z \in \mathbb{C}$

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

Si può dimostrare che $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si ha

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

In particolare si ha

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \left(\cos y + i \operatorname{sen} y \right)}$$

Si può dimostrare che $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Inoltre
$$\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$$

$$\operatorname{sen}(z_1+z_2) = \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$$

$D \operatorname{sen} z = \cos z \qquad D \operatorname{senh} z = \cosh z \qquad D e^z = e^z$

$D \cos z = -\operatorname{sen} z \qquad D \cosh z = \operatorname{senh} z$

$$e^{iz} = \underline{\cos z + i \operatorname{sen} z}$$

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z) = \underline{\cos(z) - i \operatorname{sen} z}$$

$$\overline{\left(e^{iz}\right)} = e^{-iz}$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cancel{2} \cos(z) \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh(iz)$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = \left[\cancel{\cos(z)} + i \operatorname{sen}(z)\right] - \left[\cancel{\cos(-z)} + i \operatorname{sen}(-z)\right] = 2i \operatorname{sen}(z)$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{i} \operatorname{senh}(iz)$$