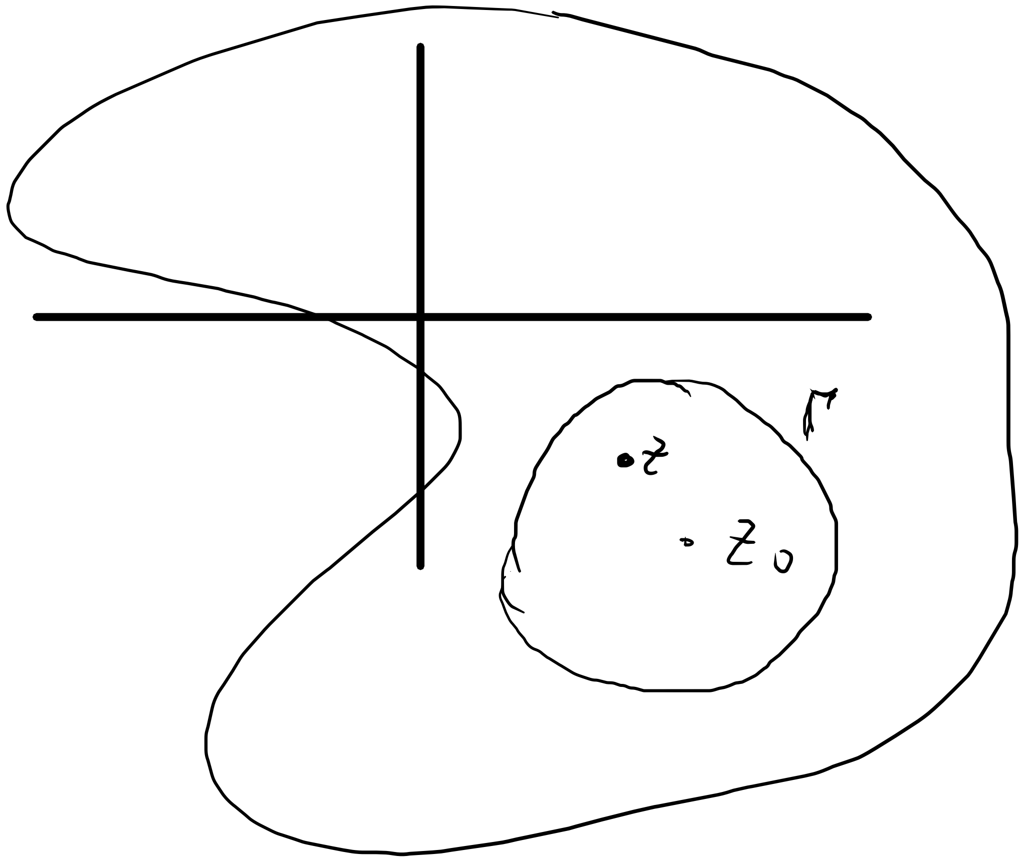
Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe

$\mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x|^3 \qquad f \in C^n(\mathbb{R}) \setminus C^{n+1}(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ non è analitica}$$



Ogni funzione olomorfa $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è analitica.

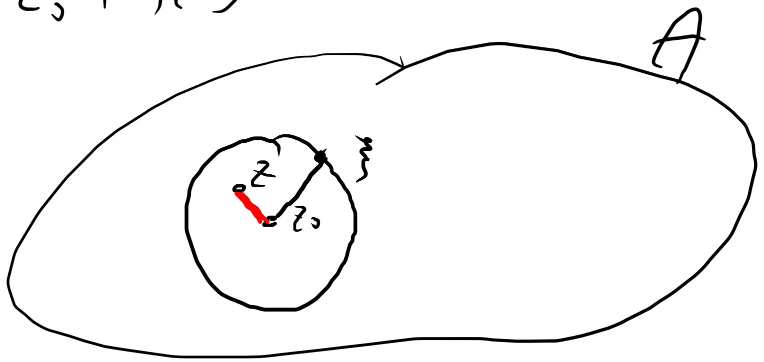
Dim Proviamo che per ogni $z_0 \in A$ e per ogni palla $B(z_0, r) \subseteq A$ esiste una successione $(c_n)_n$ tale che $\forall z \in B(z_0, r)$ $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$

Fissiamo z_0 e r. $\quad \gamma(t) = z_0 + r e^{it}$

Sia $z \in \Gamma_{int}$ per la formula integrale di Cauchy $\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi}$$

$z \in B(z_0, r) = \Gamma_{int}$ $\qquad \gamma(t) = z_0 + r e^{it}$



$|\xi - z_0| = r$

$$\xi - z = \underline{\xi - z_0} + \underline{z_0 - z} = (\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)$$

$$\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

$z \in B(z_0, r)$

$|z - z_0| < r$

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n$$

se $|\alpha| < 1$

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\cdot \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}\,d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\right]}_{C_n}(z - z_0)^n =$$

converge uniformemente

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$$

Quindi f è analitica; inoltre in un intorno di z_0 si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \text{con} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

$$\overset{\|}{\sum_{n=0}^{+\infty}} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi}$$

$$n = 0 \qquad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \, d\xi$$

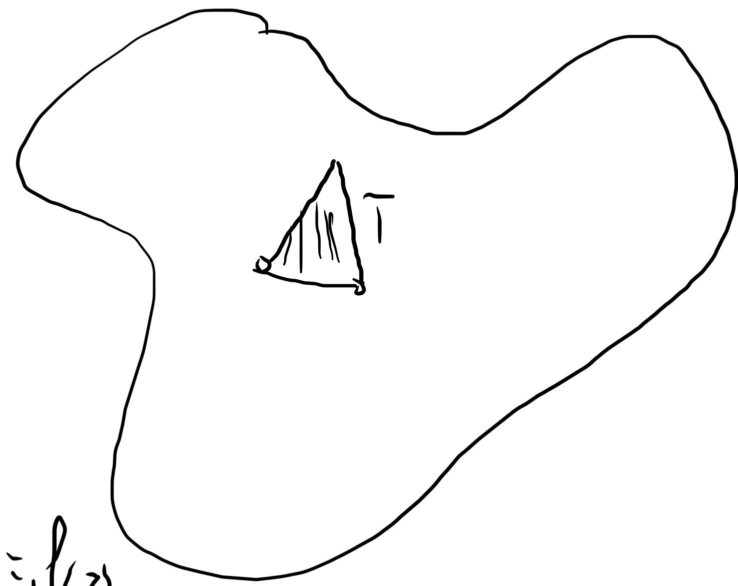
formula integrale di Cauchy per le derivate

Teorema di Cauchy $\qquad f$ olomorfa $\Rightarrow \underline{\int_\gamma f\,dz = 0 \quad \forall \gamma \quad \Gamma \cup \Gamma_{int} \subset A}$

$\overset{?}{\Leftarrow}$

<u>Teorema di Morera</u>

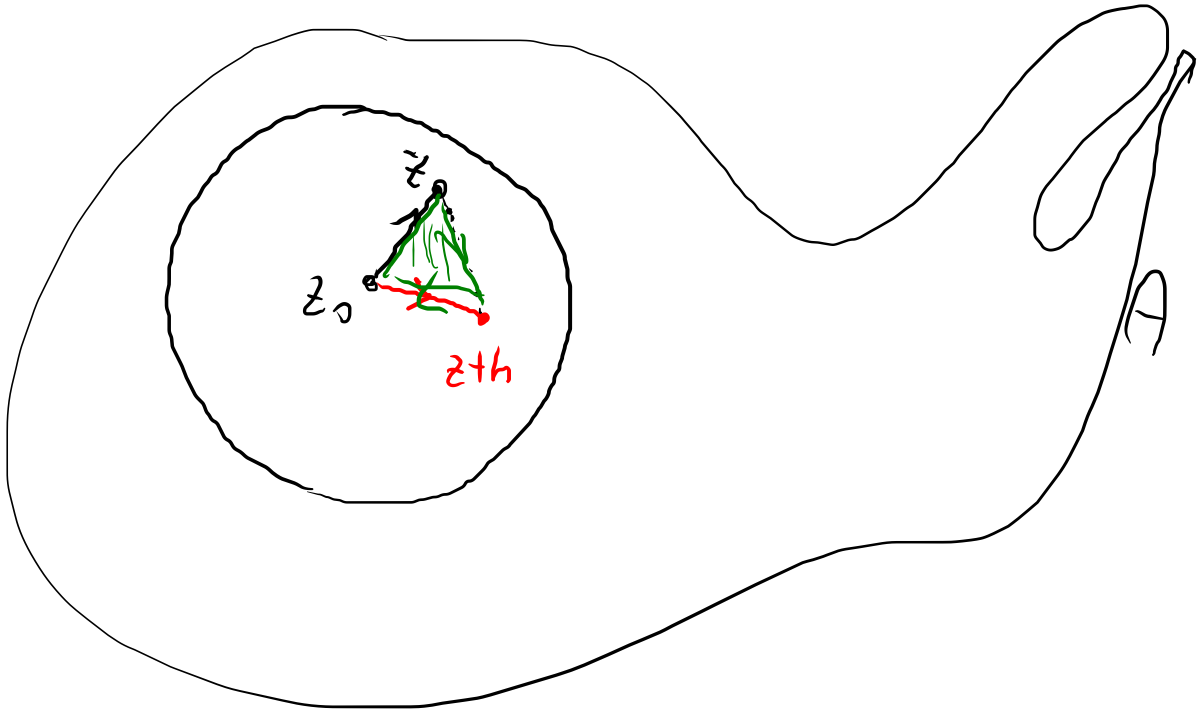
Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso. $f: A \to \mathbb{C}$ continua. Supponiamo che per ogni triangolo ("pieno") $T \subset A$ si abbia $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.
Allora f è olomorfa.



<u>Dim</u> dimostreremo che f è localmente primitivabile.

(osserviamo che f loc. prim. $\Rightarrow f$ olomorfa; infatti sia $z_0 \in A$ e sia U un intorno di z_0 dove è definita $F: U \to \mathbb{C}$ $\quad F'(z) = f(z)$ allora F è derivabile in U, ma allora $F' = f$ è derivabile in U)

Sia $z_0 \in A$ e $B(z_0, r) \subseteq A$.

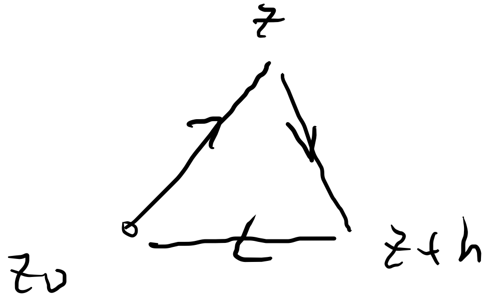


Definiamo $\underline{F(z)} = \displaystyle\int_{[z_0, z]} f(\xi)\, d\xi$

$[z_0, z](t) = z_0 + t(z - z_0) \quad t \in [0,1]$

$$F'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[F(z+h) - F(z) \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{[z_0, z+h]} f\, d\xi - \int_{[z_0, z]} f\, d\xi \right] = \circledast$$



per ipotesi $\displaystyle\int_{T(z_0, z+h, z)} f\, d\xi = 0$

triangolo di vertici....

$$\int_{[z_0, z]} f\, d\xi + \int_{[z, z+h]} f\, d\xi + \int_{[z+h, z_0]} f\, d\xi = 0$$

$$\int_{[z, z+h]} f\, d\xi = \int_{[z_0, z+h]} f\, d\xi - \int_{[z_0, z]} f\, d\xi$$

$$\circledast = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f\, d\xi$$

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\underbrace{[z, z+h]}_{z+th}} f(\xi)\, d\xi = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \int_0^1 f(z+th) \cdot \cancel{h}\, dt = (*)$$

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \quad \gamma(t) = z+th \quad \gamma(0) = z \quad \gamma(1) = z+h$$

$(+)$ $g(t,h) = f(z+th)$ continua su $[0,1] \times [0, \varepsilon]$

$\Rightarrow$ $G(h) = \int_0^1 g(t,h)\, dt$ è continua $\lim_{h\to 0} G(h) = G(0)$

$$(*) = \int_0^1 f(z)\, dt = f(z)$$

cfr campi conservativi !

<u>OSS</u>: <u>f è localmente primitivabile se e solo se f è olomorfa</u>

f primitivabile $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ f olomorfa [es: $\frac{1}{z}$]

Teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili

sia $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ A aperto connesso, f continua. Allora sono equivalenti le proprietà

1) f primitivabile

2) f è a circuitazione nulla (per ogni circuito γ con $\Gamma \subset A$, si ha $\int_\gamma f\,dz = 0$)

3) per ogni γ (regolare a tratti) con $\Gamma \subset A$ si ha che $\int_\gamma f\,dz$ dipende solo dagli estremi di γ.

Per dimostrare che 3) $\Rightarrow$ 1) si fissa $z_0 \in A$ e si definisce

$$F(z) = \int_{\gamma(z_0 \to z)} f \, d\xi$$

dove $\gamma(z_0 \to z)$ è una qualunque curva che congiunge z_0 a z.

OSS: se A è semplicemente connesso (per ogni circuito γ con $\Gamma \subset A$ si ha $\Gamma_{int} \subset A$), $f: A \to \mathbb{C}$, sono equivalenti per f:

primitivabile, loc. prim., olomorfa, analitico

12.10 PAUSA

Disuguaglianze di Cauchy

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ $r > 0$ $f: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ olomorfa $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Allora $|a_n| \leq \dfrac{1}{r^n} \underbrace{\max_{z \in \partial B(z_0, r)} |f(z)|}_{= M}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dim $|a_n| = \dfrac{1}{n!} |f^{(n)}(z_0)| = \dfrac{1}{\cancel{n!}} \left| \dfrac{\cancel{n!}}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \overset{|i|=1}{=}$

$= \dfrac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \dfrac{f(z_0 + r e^{it})}{(r e^{it})^{n+1}} \cdot r i e^{it} \, dt \right| = \dfrac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \dfrac{1}{r^n} \underbrace{f(z_0 + r e^{it})}_{|\ | \leq M = \max_{z \in \partial B(z_0,r)} |f(z)|} \cdot e^{-int} dt \right| \leq$

$\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$ $\qquad i \dfrac{1}{r^n} \cdot e^{it(-n)}$

$\leq \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} M \, dt = \dfrac{M}{r^n}$ ✓

Teorema di Liouville

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera (cioè olomorfa su $\mathbb{C}$) limitata.

Allora f è costante.

Dim sia $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\qquad \underbrace{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}$

per la disuguaglianza di Cauchy, $\forall r > 0$

$$\underbrace{|a_n|} \leq \frac{1}{r^n} \max_{z \in \partial B(0,r)} |f(z)| < \frac{1}{r^n} M \qquad \forall r > 0$$

$$\lim_{r \to +\infty} |a_n| \leq \lim_{r \to +\infty} \frac{M}{r^n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \geq 1 \\ M & \text{se } n = 0 \end{cases} \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$f(z) = a_0$ costante !

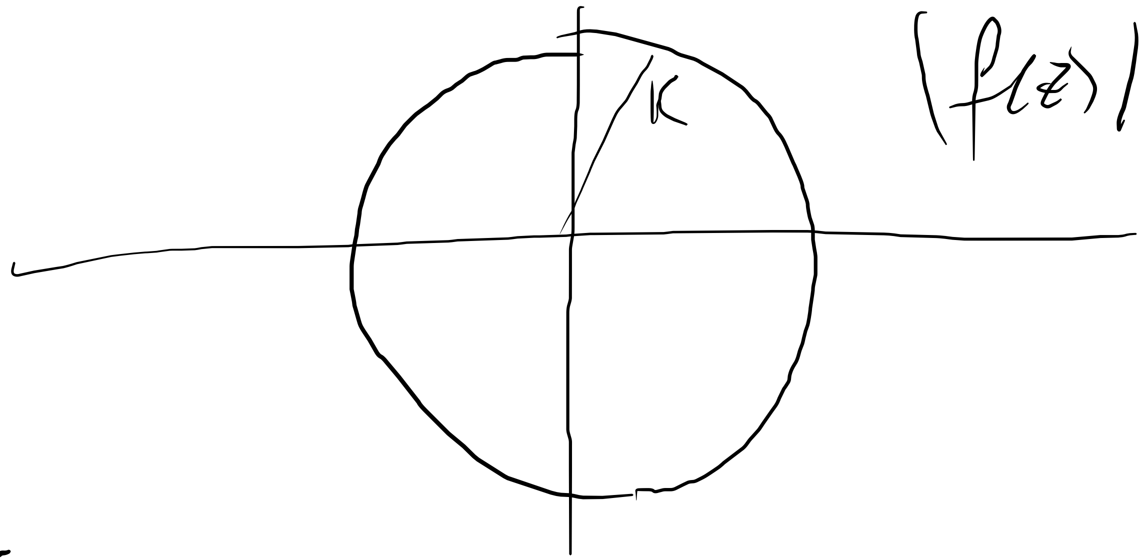
Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $p(z)$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ $p(z_0) = 0$.

<u>Dim</u> per assurdo supponiamo che $p(z)$ non abbia zeri.

Allora $\dfrac{1}{p(z)} = f(z)$ è olomorfa su $\mathbb{C}$. (è intera)

Inoltre $\displaystyle\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{p(z)} = 0$,



$|f(z)| < 1$

quindi fissato $\varepsilon = 1$ esiste $K \in \mathbb{R}$

tale che $\forall z$ $|z| > K$ si ha $\left|\dfrac{1}{p(z)}\right| < 1$

$f|_{\overline{B(0,K)}}$ è limitata per Weierstrass; $f|_{\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,K)}}$ ha modulo < 1.

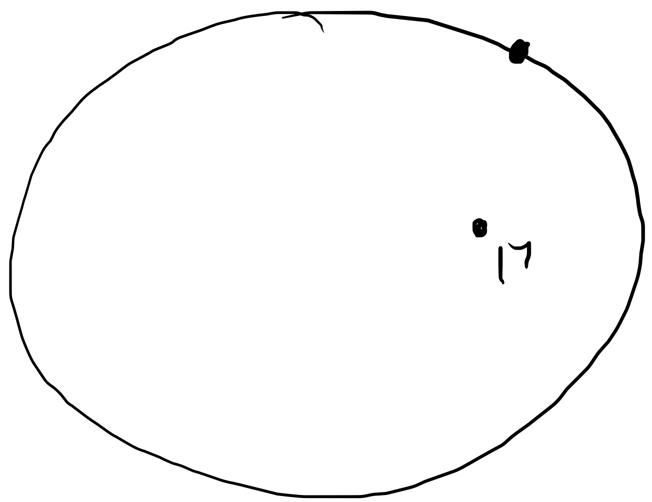
Per Liouville $f(z) = \text{costante} \Rightarrow p(z) = \text{costante}$.

Un'altra applicazione: **Principio di massimo**

$A \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso $f: A \to \mathbb{C}$ olomorfa, γ circuito con $\Gamma \cup \Gamma_{int} \subset A$

f ha massimo sul compatto $\Gamma \cup \Gamma_{int}$.

Sia $M = \max\limits_{z \in \Gamma \cup \Gamma_i} |f(z)|$.



Allora $M = \max\limits_{z \in \Gamma} |f(z)|$.

Inoltre, se esiste $z_0 \in \Gamma_{int}$ tale che $f(z_0) = M$, allora f è costante e $|f(z)| = M \quad \forall z \in A$.

Zeri di una funzione analitica

sia $p(z)$ un polinomio di grado n; z_0 è uno zero di molteplicità k di $p(z)$

se $p(z) = (z-z_0)^k \cdot q(z)$ $\quad q(z_0) \neq 0$.

sia $f(z)$ una funzione analitica; z_0 è uno zero di molteplicità k di $f(z)$

se esiste una funzione analitica g tale che $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$ e $g(z_0) \neq 0$.

? <u>È possibile avere uno zero di molteplicità infinita?</u>

<u>oss</u>: z_0 di molteplicità k significa che $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} = g(z_0) \neq 0$

cioè $\operatorname{ord}_{z_0} f = k$

inoltre $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^k \cdot g(z) \Rightarrow \underline{\underline{a_n = 0}} \ \forall n < k$

$$= (z-z_0)^k \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}}_{g(z)}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Dire che z_0 è zero di molteplicità infinita significa che

$\mathrm{ord}_{z_0} f$ è soprareale e che $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Es: in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = 0 \quad \forall n$$

0 è zero di molteplicità infinita

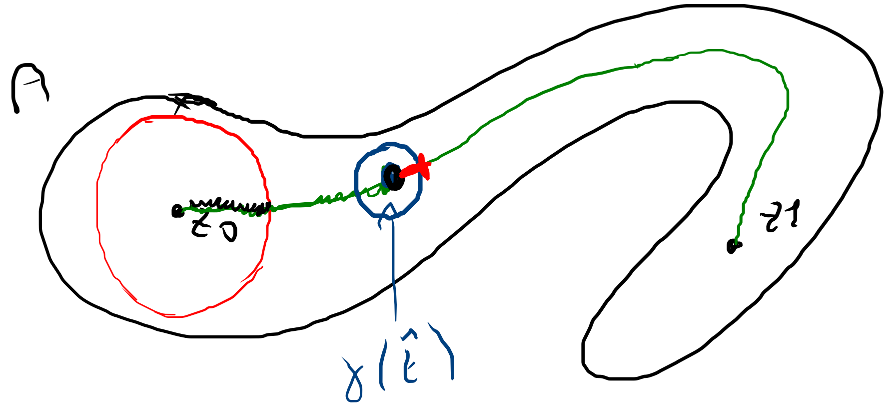
Però ⚠ f non è analitica!

Una funzione analitica NON può avere zeri di molteplicità infinita!

Teorema

Sia $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ A aperto connesso f olomorfa. Esiste $z_0 \in A$ tale che $f^{(n)}(z_0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora $f(z) = 0$ $\forall z \in A$

Dim: se $A = B(z_0, r)$ è immediato $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{=0} (z - z_0)^n = 0$



Per assurdo esiste $z_1 \in A$ tale che $f(z_1) \neq 0$

Consideriamo $\gamma : [0,1] \to A$ con $\gamma(0) = z_0$ $\gamma(1) = z_1$

Definiamo $\hat t = \sup \{ t \in [0,1] : \forall n \in \mathbb{N} \; f^{(n)}(\gamma(t)) = 0 \}$; sia $\hat z = \gamma(\hat t)$

si osservi che $\forall n$ $f^{(n)}(\hat z) = 0$.

Considero $B(\hat z, \rho) \subset A$; si ha allora che $f(z) = 0$ $\forall z \in B(\hat z, \rho)$ e in particolare $f^{(n)}(z) = 0$ $\forall z \in B(\hat z, \rho)$; in particolare esiste $[\hat t, \tilde t] \subset [0,1]$ tale che $\forall t \in [\hat t, \tilde t]$ $f^{(n)}(\gamma(t)) = 0$ $\forall n$, contro la definizione di $\hat t$ come sup.

Teorema (zeri di una funzione analitica)

Sia A aperto connesso $\subseteq \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ olomorfa, f non identicamente nulla.

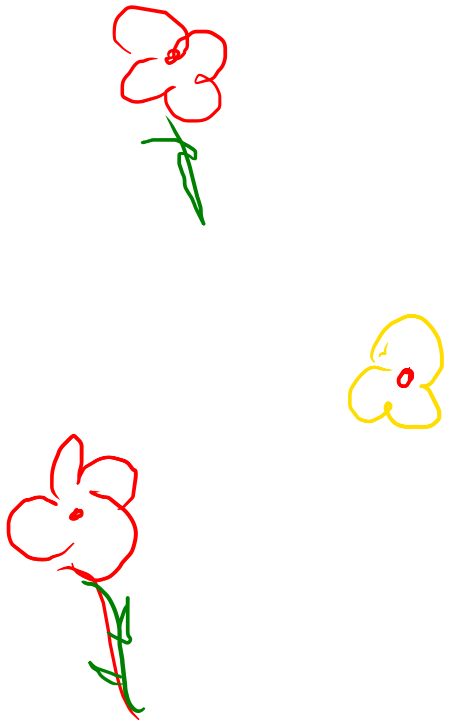
Allora l'insieme $Z(f) = \{ z \in A : f(z) = 0 \}$ è un insieme discreto (cioè privo di punti di accumulazione)

Dim Per assurdo supponiamo che $Z(f)$ abbia un punto di accumulazione λ.

Allora in ogni intorno $B(\lambda, \frac{1}{n})$ esiste $z_n \neq \lambda$

$z_n \in Z(f) \cap B(\lambda, \frac{1}{n})$

Si può allora definire una successione di zeri di f $(z_n)_n$ $f(z_n) = 0$ tale che $\lim_{n \to +\infty} z_n = \lambda$ e $z_n \neq \lambda \ \forall n$.



Buona Pasqua