

Integrale di Lebesgue

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ q.o. (φ_n funzioni a scala)

integrabile se misurabile e $(\varphi_n)_n$ è di Cauchy rispetto allo $\|\cdot\|_1$

Oss f integrabile;

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi_n|(x) = |f(x)|$ q.o. $(|\varphi_n|)_n$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|}_{L \leq |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx \xrightarrow{\text{perché } (\varphi_n)_n \text{ è di Cauchy}} 0$$

Se f è integrabile secondo Lebesgue allora $|f|$ lo è

[f int. se e solo se $|f|$ è int.]

⚠ es: $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$ è integrabile secondo Riemann su $[1, +\infty[$,
ma $|f(x)|$ non lo è.

○

oss:

Integrabilità su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

Insieme misurabile secondo Lebesgue : sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, diremo che E è misurabile secondo Lebesgue se la funzione χ_E (funzione caratteristica) è integrabile

e
$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) dx = m(E).$$

Se χ_E è misurabile ma non integrabile, E è misurabile con $m(E) = +\infty$

Sia E misurabile, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, diremo che f è ^(misurabile) integrabile secondo Lebesgue su E se la funzione $f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - E \end{cases}$ è ^(misurabile) integrabile su $\mathbb{R}^n$.

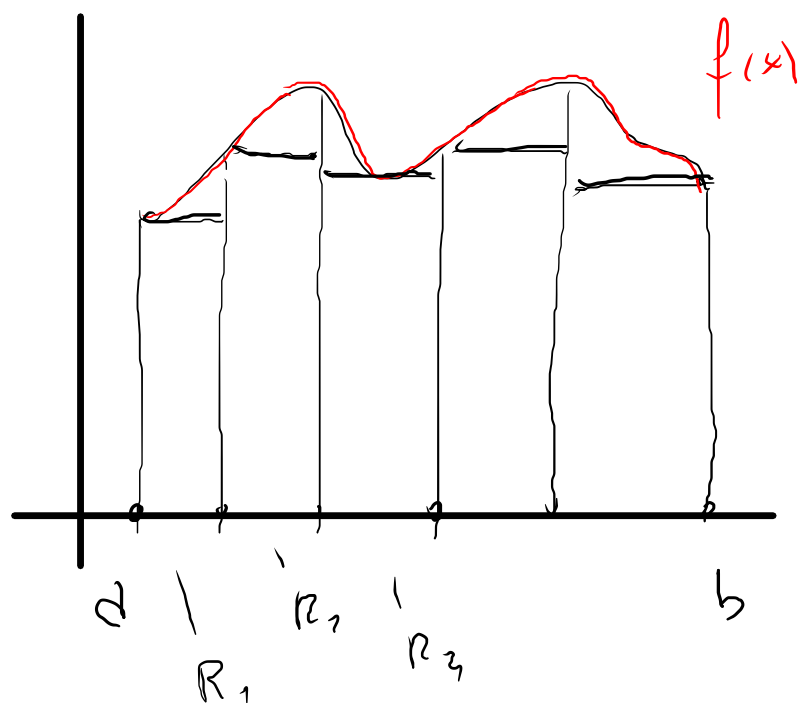
Legame tra integrale di Lebesgue e integrale di Riemann

Es: $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$ è Riemann-integrabile su $\underline{[1, +\infty[}$ ma NON Lebesgue-integrabile

OSS sia $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile limitato e non
limitato

$f: E \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione ^{limitata} integrabile secondo Riemann su E .

Allora f è integrabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono
[la loro funzione anche su E o f non sono limitati ma $f(x) \geq 0$ q.o. su E]



$$\underbrace{s(f, \mathcal{S}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in R_i} f(x) \cdot m(R_i)}_{\text{è una funzione o ruolo}} \leftarrow \int \varphi_n(x) dx \rightarrow \int f(x) dx$$

$$\sum c_i = \chi_{R_i}$$

$$\varphi_n(x) \rightarrow f(x) \text{ q.o.}$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n \inf_{R_i} f(x) \cdot \chi_{R_i}$$

Conseguenza: se f è continuo ^{o l.r.m.} e limitato su un insieme $\mathbb{R}^n$ misurabile limitato, allora è integrabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono.

OSS (funzioni q.o. uguali)

Se f integrabile; no $g(x) = f(x)$ q.o. Allora g è integrabile e

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$$

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ int.} \Rightarrow \exists (\varphi_n)_n \\ \underbrace{\varphi_n \rightarrow f}_{\text{q.o.}} \\ \Rightarrow \varphi_n \rightarrow g \text{ q.o.} \end{array} \right.$$

Spazio $L^1(\mathbb{R}^n)$ $L^1(E)$ $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile.

$$X = \{ f: E \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ integrabile} \}$$

X è uno sp. vettoriale, consideriamo la "norma"
questa NON è una norma!

$$\|f\|_1 = \int_E |f(x)| dx$$

1. $\|f\| \geq 0 \quad \forall f \in X$ e

$\|f\| = 0 \iff f = 0$

2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$

3. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

VOK

$$\int_E |f+g| dx \leq \int_E |f| dx + \int_E |g| dx$$
$$\underbrace{|f+g|}_{\leq |f(x)| + |g(x)|}$$

Se $f(x) = 0$ q.o. su E ma non ovunque $\|f\| = 0$ ma $f \neq 0$

12.10

| $\|f\|_1 = 0$ u solo se $f = 0$

Questa NON è vera in X

perché ad esempio su $[0,1]$ $\|X_D\|_1 = 0$ ma $X_D \neq 0$

$$\int_{[0,1]} X_D(x) dx$$

Identificando $f = g$ u $f(x) = g(x)$ q.d. si dimostra che

$$\int_E |f(x)| dx = 0 \Rightarrow f = 0$$

[u $|f(x)| > 0$ su $K \subset E$ $m(K) > 0$ allora

$$\int_E |f(x)| dx \geq \int_K \underbrace{|f(x)|}_{>0} dx > 0]$$

Consideriamo l'insieme quoziente di X relativamente alla relazione di
equivalenza $f \sim g$ se $f(x) = g(x)$ q.o.

Poniamo $L^1(E) = \frac{X}{\sim}$

Un elemento di $L^1(E)$ è rappresentato da una funzione integrabile,
in questo spazio non distinguiamo le funzioni che sono uguali q.o.

Ad es. $\boxed{\chi_D = 0}$ su $L^1([0,1])$.

$L^1(E)$ è uno spazio vettoriale

$\|f\|_1 = \int_E |f| dx$ è una norma.

$$\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$$
$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

$L^1(E)$ è uno spazio vettoriale normato

la distanza indotta è $d_1(f, g) = \|f - g\|_1 = \int_E |f - g| dx$

Si può dimostrare che lo spazio metrico $(L^1(E), d_1)$ è completo
(cioè ogni successione di Cauchy è convergente).

Quindi $L^1(E)$ è uno spazio di Banach.

$(f_n)_n$ di Cauchy $\lim_{m, n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n(x) - f_m(x)| dx = 0$

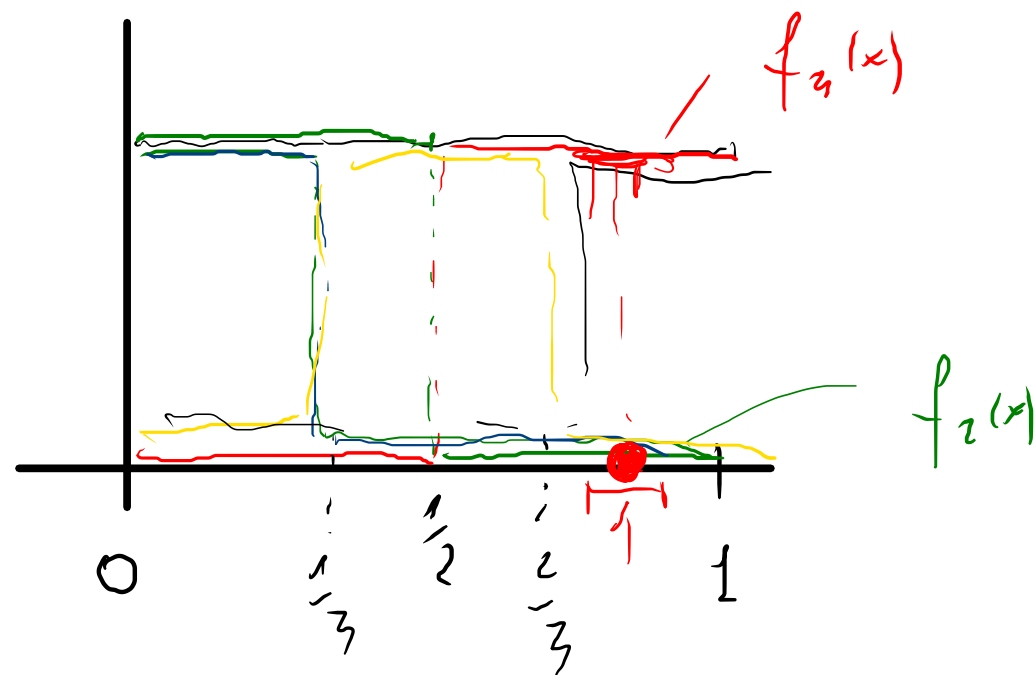
Allora esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ nello spazio $L^1(E)$

cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = 0$

⚠ non è vero in generale che esista il limite puntuale q.d.

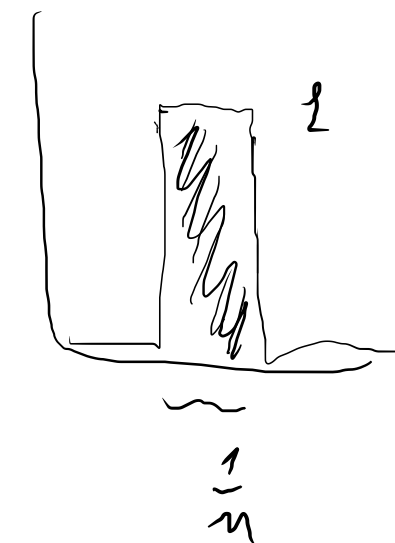
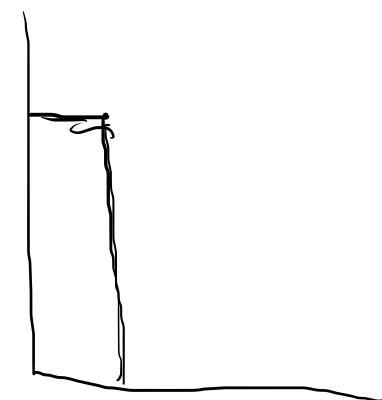
$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$!

Es:



$$L^1([0, 1])$$

$$f_n(x)$$



$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = \chi_{[0, 1/2]}$$

$$f_3(x) = \chi_{[1/2, 1]}$$

$$f_4(x) = \chi_{[0, 1/3]} \quad f_5(x) = \chi_{[1/3, 2/3]} \quad f_6(x) = \chi_{[2/3, 1]}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, 1]} f_n(x) dx = 0$$

Ma non esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) !!$ per nessun x !

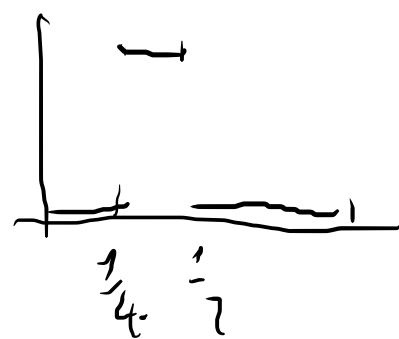
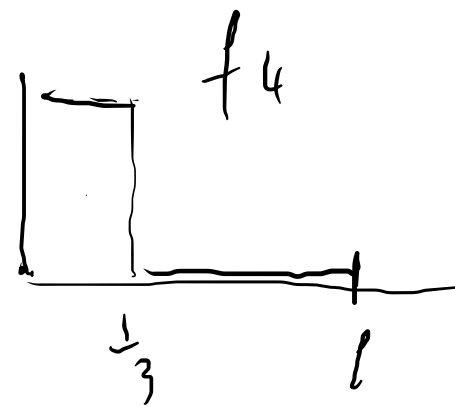
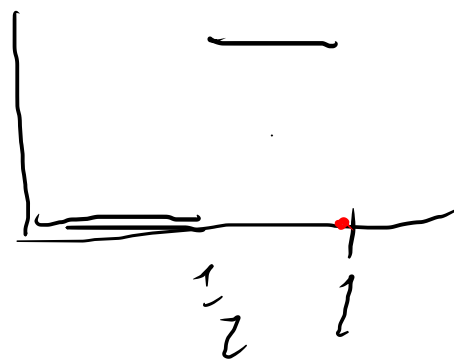
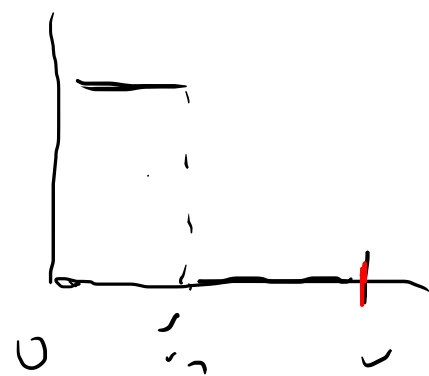
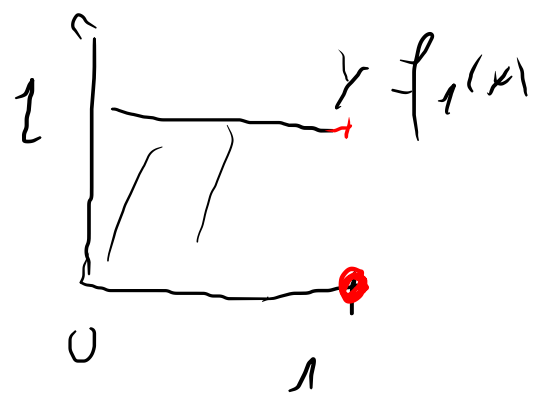
$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$ in $L^1([0, 1])$ ma non esiste limite puntuale

Teorema

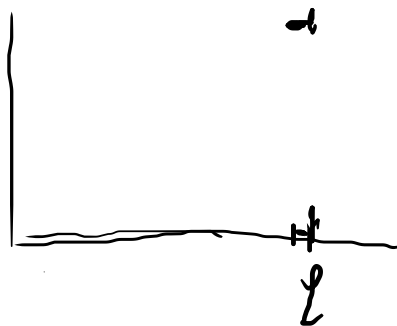
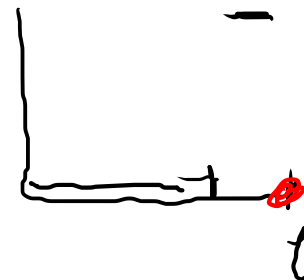
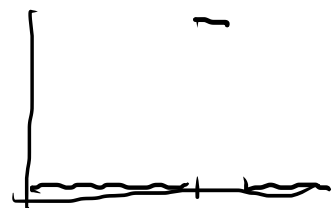
Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^1(E)$ che converge a $f \in L^1(E)$ nella metrica di $L^1(E)$ (cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = 0$)

Allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ di $(f_n)_n$ che converge q. o. a f

$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ per quasi ogni $x \in E$.



f_8



$$\int |f_n| \rightarrow 0$$

$$f_n(x) \not\rightarrow 0$$

$$L^2(E)$$

$$X = \{ f: E \rightarrow \mathbb{C} \text{ tali che } |f|^2 \text{ è integrabile} \}$$

$$L^2(E) = \frac{X}{\sim} \quad f \sim g \text{ se } f(x) = g(x) \text{ q.o.}$$

$$\|f\|_2 = \left[\int_E |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

$$\left[\mathbb{R}^n \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2} \right]$$

$\downarrow$
 $\int f(t)^2 dt$

$$\tilde{E} = [1, +\infty[$$

$$\frac{1}{x} \text{ non è integrabile su } E \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$$

però $\frac{1}{x^2}$ è integrabile su E

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 !!$$

$L^2(E)$ è uno spazio di Banach.

Si può definire su $L^2(E)$ un prodotto scalare / hermitiano

$$\mathbb{R}^n \quad \langle u, v \rangle = \sum u_i v_i$$

$$\langle u, u \rangle = \|u\|^2$$

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_E f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx$$

$$\underbrace{z \cdot z \neq |z|^2}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$\langle f, f \rangle = \|f\|^2$$

$$\langle f, f \rangle \in \mathbb{R} \text{ e } \langle f, f \rangle \geq 0 \text{ e } \langle f, f \rangle = 0 \text{ se e solo se } f = 0.$$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

$$\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle$$

$$\langle f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle f, g_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle f, g_2 \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \hat{u} \hat{v} \quad \cos \hat{u} \hat{v} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

$f, g \in L^2(E)$ diremo che f e g sono ortogonali se $\langle f, g \rangle = 0$

cioè

se

$$\int_E f(x) g(x) dx = 0$$

Es: $\sin(kx) \perp \sin(nx)$ se $k \neq n$ $\sin(kx) \perp \cos(nx)$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin x \cdot \cos x}_{\sin(2x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{4} \cos(2x) \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad \forall f, g \in L^2(E)$$

$$\left| \int_E f(x) \bar{g}(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_E |f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_E |g(x)|^2 dx}$$

Su $L^2(E)$ (spazio di Bochner) è definito un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tale che $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Si dice che $L^2(E)$ è uno spazio di Hilbert.

$$L^p(E)$$

$$1 \leq p < +\infty$$

$$p \in \mathbb{R}$$

$$L^p(E) = \cancel{X} \sim$$

$$f \sim g \text{ se } f(x) = g(x) \text{ q.o.}$$

$$X = \{ f: E \rightarrow \mathbb{C} : |f|^p \text{ è integrabile su } E \}$$

$$\|f\|_p = \left[\int_E |f|^p dx \right]^{1/p}$$

$L^p(E)$ è uno spazio di Banach

(è uno spazio di Hilbert solo se $p=2$)

Si può dimostrare che, se E ha misura finita e fissato f tale che $f \in L^p(E) \forall p \geq 1$

$$\text{se } \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \operatorname{ess\,sup}_E |f|$$

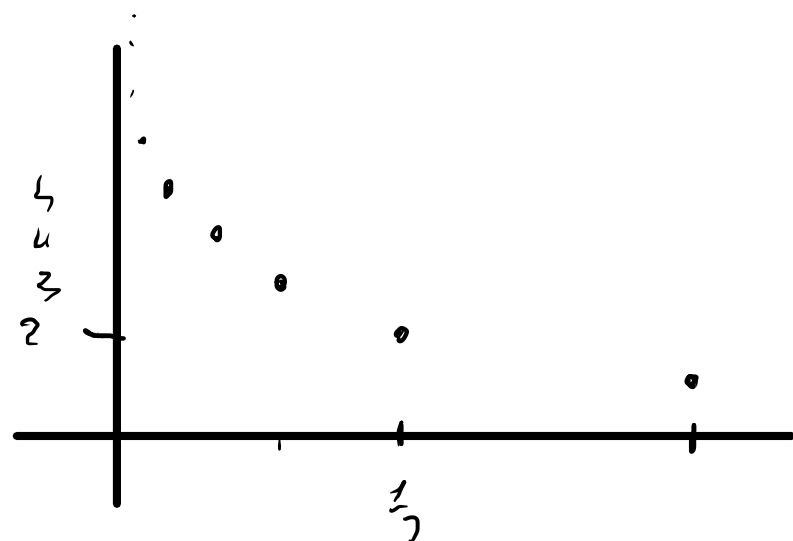
$$L^{\infty}(E) = \boxed{\frac{X}{\sim}}$$

$$f \sim g \text{ se } f(x) = g(x) \text{ q.o.}$$

$$X = \{ f : E \rightarrow \mathbb{C} \text{ tale che } |f| \text{ è misurabile } \underline{\text{limitato}} \}$$

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 1$$

$$g(x) = \begin{cases} n & \text{se } x = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^+ \\ 1 & \text{se } x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$



$g(x)$ non è limitato su $[0,1]$

però $f \sim g$ f è limitato