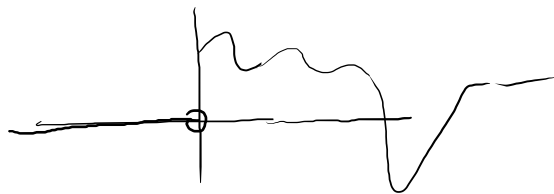


Trasformate di Laplace

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile e tale che $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$



se f non soddisfa la condizione *

consideriamo $f(t)u(t)$ dove $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

se $f:]0, +\infty[$ si può estendere f a $\mathbb{R}$ ponendo $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$.

f segnale; $g: \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad g(s, t) = e^{-st} f(t)$
 $\uparrow$
 $s \in \mathbb{C} \quad s = x + iy$

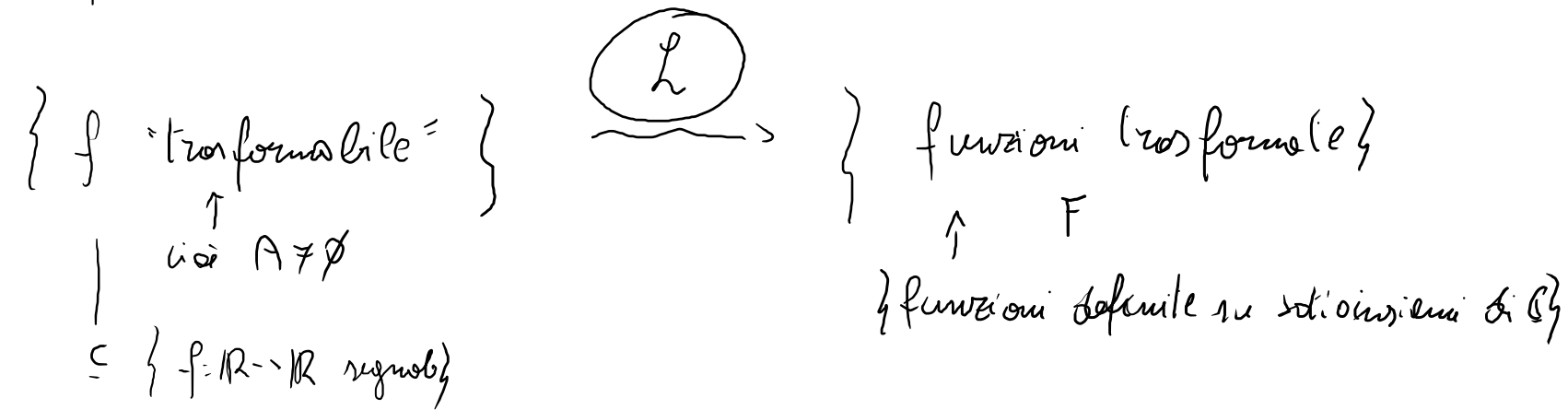
Poniamo $A = \{ s \in \mathbb{C} : g(s, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ è integrabile} \}$

Se $A \neq \emptyset \quad \forall s \in A$ si può considerare il numero

$$F(s) = \int_0^{+\infty} g(s, t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$F: A \rightarrow \mathbb{C}$$

La funzione $F = \mathcal{L}\{f\}$ si dice la trasformata di Laplace di f .



Cosa vuol dire che $\mathcal{L}$ è lineare?

Se f, g sono trasformabili

$$F: A_f \rightarrow \mathbb{C}$$

$$G: A_g \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

allora $\alpha f + \beta g$ è trasformabile e

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s)$$

$$\forall s \in A_f \cap A_g.$$

Integrabile significa secondo Lebesgue

Quindi f è trasformabile se e solo se $|f|$ è trasformabile

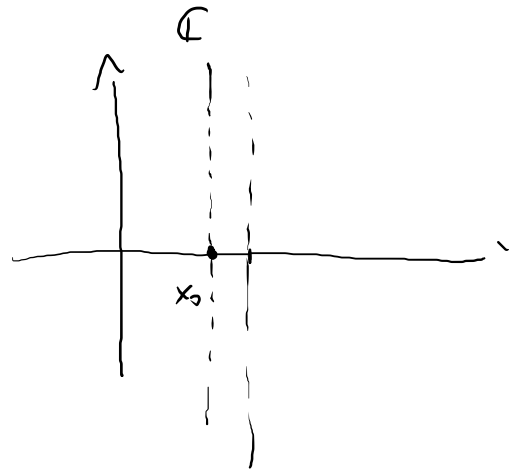
$$e^{-st} f(t) \text{ integrabile} \Leftrightarrow |e^{-st} f(t)| = e^{-x t} |f(t)| \text{ è integrabile}$$

$s = x + iy \quad |e^{-iyt}| = 1$

$$A = \{ s \in \mathbb{C} : |e^{-st} f(t)| \text{ è integrabile su }]0, +\infty[\}$$

$$\stackrel{||}{=} e^{-xt} |f(t)|$$

$$s = x + iy$$



sia $s_0 = x_0 + iy_0 \in A$ e sia $\underline{x > x_0}$ $\underline{s = x + iy}$

si ha $\underline{e^{-xt} |f(t)|} \leq \underline{e^{-x_0 t} |f(t)|}$
 $\uparrow$ è integrabile

quindi per il teorema di Lebesgue è integrabile anche $e^{-st} f(t)$

Poniamo $\lambda_f = \inf \{ \operatorname{Re}(s) : s \in A \}$ asse di convergenza di f

$\Gamma_{\lambda_f} = \{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \lambda_f \}$ semipiano di convergenza

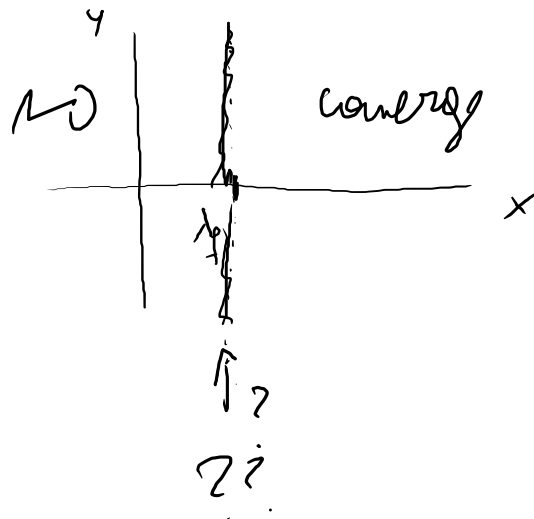
Osservazioni

chi soddisfa

la retta $x = \lambda_f$ è la
retta di convergenza

L'insieme di convergenza A è un semipiano $E \subseteq \mathbb{C}$

$$E_{\lambda_f} \subseteq E \subseteq \overline{E_{\lambda_f}}$$



Esempio

$$f(t) = e^{t^2} u(t)$$

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-st}} e^{t^2} dt$$

x fissato

$$|e^{-st+t^2}| = e^{-t(x-t)} = \underbrace{e^{t(t-x)}}$$

$$s = x + iy$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(t-x)} = +\infty \quad \forall x$$

$$< e^{-t}$$

quindi f non è trasformabile

$$A = \emptyset \quad \lambda_f = +\infty$$

$$f(t) = e^{-t^2} u(t)$$

$$|e^{-st} e^{-t^2}| = e^{-t(\widetilde{x+t})}$$

x fissato

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(x+t)} dt = \int_0^{-x+1} e^{-t(x+t)} dt$$

$x < 0$

$$x < 0$$

$$\int_0^{-x+1} e^{-t(x+t)} dt$$

$\in \mathbb{R}$

$$+ \int_{-x+1}^{+\infty} e^{-t(x+t)} dt$$

$t > -x+1$
 $x+t > 1$
 $-(x+t) < -1$

$$< \int_{-x+1}^{+\infty} e^{-t} dt$$

$\uparrow$ integrabile

$\forall x \in \mathbb{R}$ la funzione $e^{-x^2} e^{-t^2}$
è integrabile

$$A = \mathbb{C} \quad \lambda_f = -\infty$$

f a supporto compatto
limitato

$$f(t) = 0 \quad \forall t \geq K$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^K \underbrace{e^{-st} f(t)}_{\in \mathbb{C}} dt \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

$$\lambda_f = -\infty$$

$$f(t) = e^{(\alpha + i\beta)t} u(t)$$

$$|g(s, t)| = |e^{-st} e^{\alpha t + i\beta t}| = |e^{(-\alpha + \alpha)t}|$$

integrabile su $[0, +\infty[$

$$A = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \alpha\}$$

$$\lambda_f = \alpha \quad \uparrow$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{wt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(w-s)t} dt = \left[\frac{1}{w-s} e^{(w-s)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-w}$$

$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(w)$

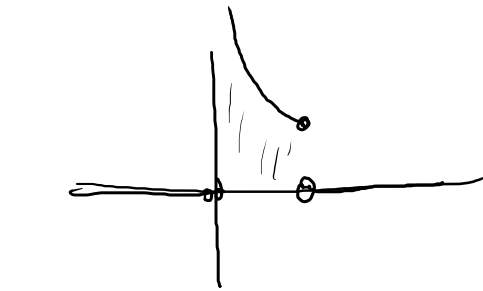
$-x + \alpha < 0, \quad \alpha > \alpha$

$$\mathcal{L}\{e^{wt} u(t)\}(s) = \frac{1}{s-w} \quad \text{con } \lambda_p = \operatorname{Re}(w)$$

Esempio $f(t) = \frac{1}{t} \chi_{[0,1]}$

è a supporto compatto

però non è trasformabile



$$\int_0^1 |e^{-st} \cdot \frac{1}{t}| dt = +\infty \quad \forall s \in \mathbb{C}!$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

↑
integrale di ordine $1/2 < 1$

$$f(x) \geq 0 \quad \int_0^1 f(x) dx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\text{se } \text{Ord}(f, 0) = k < 1$$

$$\text{allora } \int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{\frac{1}{x^k}} \right| = l \in \mathbb{R} \quad l \neq 0$$

$$0 \leq f(x) < (l+1) \frac{1}{|x^k|} \quad \text{su } |x| < \delta$$

$$\left| \frac{f(x)}{\frac{1}{x^k}} - l \right| < 1 \quad \text{su } |x| < \delta$$

$\frac{1}{x^k}$ è integrabile su $[0, 1]$

$$\int_0^1 x^{-k} dx = \left[\frac{1}{1-k} x^{1-k} \right]_0^1 \in \mathbb{R}$$

$\frac{1}{t}$ non è trasformabile $\frac{1}{\sqrt{t}}$ è trasformabile

funzioni di ordine esponenziale

Pause 13.15

Funzioni di ordine esponenziale

f si dice di ordine esponenziale se esistono $K, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$|f(t)| \leq K e^{\beta t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

se f è di ordine esponenziale $\int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq K \int_0^\infty e^{-(s-\beta)t} dt$ integrabile se
 $s > \beta$
 $s = \sigma + i\omega$

$\Rightarrow f$ è trasformabile e $\sigma_f \leq \beta$

$\frac{1}{\sqrt{t}} \chi_{[0,1]}$ è trasformabile ma NON è di ordine esponenziale

$$\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad \lambda_u = 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} g(x) dx$$

define two $\mathcal{L}$ & $\mathcal{F}$

Since $f(t)$ is a $\mathcal{L}$ -transformable, since $\alpha > \lambda_f$,

$$\text{position } g(x) = e^{-\alpha x} f(x)u(x)$$

$$\underbrace{\mathcal{F}\{g\}(\omega)}_{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{R}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \cdot e^{-\alpha x} \underset{\uparrow}{f(x)u(x)} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)x} f(x) dx = \underbrace{\mathcal{L}\{f\}(\alpha+i\omega)}$$

$$\mathcal{L}\{f\}(\underset{\uparrow}{\alpha} + i\underset{\uparrow}{\beta}) = \mathcal{F}\{e^{-\underset{\uparrow}{\alpha} t} f(t)u(t)\}(\underset{\uparrow}{\beta})$$

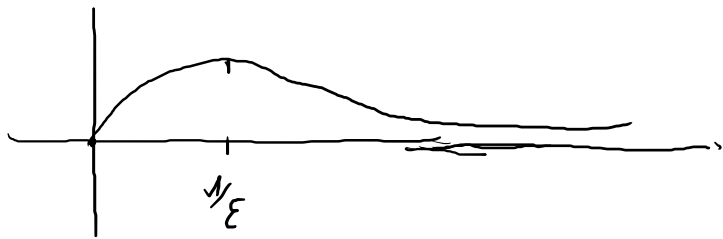
oss: se f trasformabile con asse di convergenza λ_f
 allora la funzione $g(t) = t f(t)$ è trasformabile $\lambda_g = \lambda_f$.

Fissiamo $s = \alpha + i\beta$ con $\alpha > \lambda_f$ e

prendo $2\varepsilon < \alpha - \lambda_f$

$$\lambda_f < \lambda_f + \varepsilon < \lambda_f + 2\varepsilon < \alpha$$

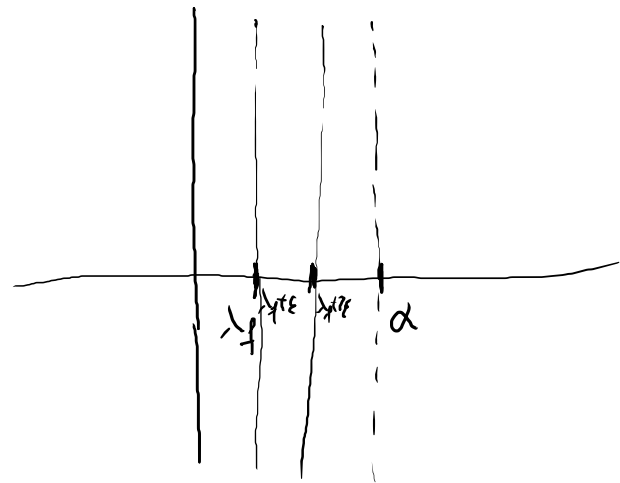
$$\varphi: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(t) = t e^{-\varepsilon t}$$



$$\varphi(0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= e^{-\varepsilon t} + t \cdot (-\varepsilon) e^{-\varepsilon t} \\ &= e^{-\varepsilon t} (1 - \varepsilon t) \end{aligned}$$



$\frac{1}{\varepsilon}$ è punto di massimo per φ e $\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = M_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} e^{-1}$

$$\varphi(t) \leq M_\varepsilon \quad \forall t \in [0, +\infty[$$

$$\left| e^{-st} t f(t) \right| = e^{-\alpha t} t |f(t)| \leq e^{-(\lambda_f + 2\varepsilon)t} t |f(t)| = e^{-(\lambda_f + \varepsilon)t} \cdot \underbrace{t \cdot e^{-\varepsilon t}}_{\varphi(t)} |f(t)| \leq$$

$$s = \alpha + i\beta$$

$$\alpha > \lambda_f + 2\varepsilon$$

$$-\alpha t < -(\lambda_f + 2\varepsilon)t$$

$$\leq \underbrace{M_\varepsilon} \cdot \underbrace{\left[e^{-(\lambda_f + \varepsilon)t} |f(t)| \right]}_{\uparrow}$$

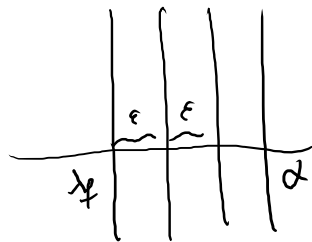
è integrabile perché $\lambda_f + \varepsilon > \lambda_f$

Teorema di analiticità della trasformata

Sia f un segnale trasformabile con asse di convergenza λ_f e sia

$$E_{\lambda_f} = \{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \lambda_f \}$$

$\uparrow$ importante $>$ stretto



Allora f è olomorfo in E_{λ_f} :

Dim sia $s = \alpha + i\beta$ $\alpha > \lambda_f$ prendiamo $\epsilon > 0$ tale che $\lambda_f < \lambda_f + \epsilon < \lambda_f + 2\epsilon < \alpha$

$$\begin{aligned} F'(s) &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{F(s+w) - F(s)}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \left[\int_0^{+\infty} \underset{\uparrow}{e^{-(s+w)t}} f(t) dt - \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right] = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-wt} - 1}{w}} e^{-st} f(t) dt = \end{aligned}$$

Vorremmo avere $\lim_{W \rightarrow 0} \int_0^{+b} \dots = \int_0^{+b} \lim_{W \rightarrow 0} \dots$

Useremo il teorema di convergenza dominata di Lebesgue

Sia $W_n \rightarrow 0 \quad |W_n| < \varepsilon$

$$g_n(t) = \frac{e^{-W_n t} - 1}{W_n} e^{-st} f(t) = \frac{e^{-W_n t} - 1}{-W_n t} e^{-st} (-t) f(t)$$

$$|g_n(t)| \leq \left| \frac{e^{-W_n t} - 1}{-W_n t} \right| \cdot \underbrace{|e^{-st} t f(t)|}_{\text{integrabile perché } \lambda_{tf(t)} = \lambda_f} \leq e^{|-W_n t|} \cdot |e^{-st} t f(t)|$$

$-W_n t = z$

$\frac{e^z - 1}{z}$

$\operatorname{Re}(s) > \lambda_f$

Prove that $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \neq 0 \quad \left| \frac{e^z - 1}{z} \right| < e^{|z|}$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots$$

$$e^z - 1 = z + \frac{1}{2} z^2 + \dots$$

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| = \left| 1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{4!} z^3 + \dots \right| \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2} |z| + \frac{1}{3!} |z|^2 + \frac{1}{4!} |z|^3 + \dots < 1 + |z| + \frac{1}{2!} |z|^2 + \frac{1}{3!} |z|^3 + \dots = e^{|z|}$$

$\uparrow$
 $\frac{1}{2} < 1$

$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2!}$

$\frac{1}{4!} < \frac{1}{3!}$

Quindi $|g_n(t)| \leq e^{1-|w_n|t} \cdot t e^{-\alpha t} |f(t)| \leq \star$

$$|w_n| < \varepsilon \quad e^{1-|w_n|t} = e^{|w_n| \cdot t} < e^{\varepsilon t}$$

$$\star \leq t e^{-(\alpha-\varepsilon)t} |f(t)| \quad \text{integrabile perche } \lambda_{t|f|} = \lambda_f \text{ e } \alpha-\varepsilon > \lambda_f$$

$\uparrow$
 $\alpha-\varepsilon > \lambda_f$

$g_n(t)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lebesgue

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(s+w_n)t} - e^{-st}}{w_n} f(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-w_n t} - 1}{-w_n t} \right) \cdot (-t) e^{-st} f(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s+w_n)t} - e^{-st}}{w_n} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt$$

Per ogni successione $(w_n)_n$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ $|w_n| \ll \varepsilon$.

Quindi

$$\lim_{w \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s+w)t} - e^{-st}}{w} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt$$

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt = - \int_0^{+\infty} e^{-st} t f(t) dt = - \mathcal{L}\{t f(t)\}(s)$$

F è derivabile in s e $F'(s) = - \mathcal{L}\{t f(t)\}(s)$

$$F''(s) = \frac{d}{ds} \left[- \mathcal{L}\{t f(t)\}(s) \right] = (-1)(-1) \mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s)$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$$

Corollario

$$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{u(t)\}(s)$$

$\frac{1}{s}$