Teorema

Sia $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa non identicamente nulla. Allora $\mathcal{Z}(f)$ è discreto

$[\mathcal{Z}(f) = \{ z \in A : f(z) = 0 \}]$

Dim Per assurdo supponiamo esiste un punto di accumulazione λ per $\mathcal{Z}(f)$; allora si può costruire una successione $(z_k)_k$ con $z_k \in \mathcal{Z}(f)$, $z_k \neq \lambda$ $\forall k$ $\lim_{k \to +\infty} z_k = \lambda$

f continua $\Rightarrow f(\lambda) = 0$; sia j la molteplicità di λ, cioè

$f(z) = (z - \lambda)^j g(z)$ con $g(\lambda) \neq 0$ (g olomorfa), per continuità di g esiste un intorno U di λ dove $g(z) \neq 0$ $\forall z \in U$. Definitivamente $z_k \in U$, e quindi

$0 = f(z_k) = \underbrace{(z_k - \lambda)^j}_{\neq 0} \cdot \underbrace{g(z_k)}_{\neq 0} \neq 0$ contraddizione.

Principio di identità delle funzioni analitiche

Siano $f_1, f_2 : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitiche, sia $E \subseteq A$ E non discreto.

Sia $f_1(z) = f_2(z)$ $\forall z \in E$. $\Rightarrow$ $f_1(z) = f_2(z)$ $\forall z \in A$.

<u>Dim</u> $f = f_2 - f_1$ $\qquad f = 0$ su E $\Rightarrow$ $f = 0$ su A.

Prolungamento analitico di una funzione

Sia $E \subseteq \mathbb{C}$, $f : E \to \mathbb{C}$; diremo prolungamento analitico di f su $A \supseteq E$ una funzione $\tilde{f} : A \to \mathbb{C}$ analitica tale che $\tilde{f}|_E = f$.

<u>OSS</u>: se E non è discreto, allora se esiste il prolungamento analitico è unico.

Esempi: $f(x) = e^x$ $\quad$ $\operatorname{sen} x$ $\quad$ $\cos x$ ...

$\rightsquigarrow$

$f(z) = e^z$ $\quad$ $\operatorname{sen} z$ $\quad$ $\cos z$ ...

Applicazione $\quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$ e considero $\quad f_1(x) = \underbrace{e^{x_0+x}}$ $\quad f_2(x) = \underline{e^{x_0} \cdot e^x}$ $\quad f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow e^{x_0+z}$ $\quad \rightsquigarrow e^{x_0} \cdot e^z$

$f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\underbrace{\forall x_0 \in \mathbb{R}} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e^{x_0+z} = e^{x_0} \cdot e^z$

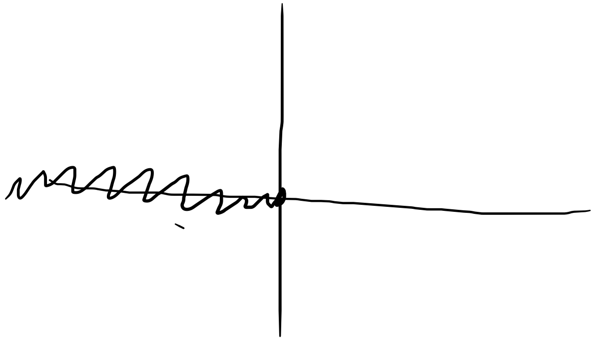
Fissiamo $z_0 \in \mathbb{C}$ $\quad g_1(x) = e^{x+z_0}$ $\quad g_2(x) = e^x \cdot e^{z_0}$

$g_1(x) = g_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow g_1(z) = g_2(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \rightsquigarrow e^{z+z_0} = e^z \cdot e^{z_0}$

$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) \cancel{=} \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$

? ?

?



$\log(x_1 \cdot x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$

$\mathrm{Log}\, z$ non è analitico in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$!

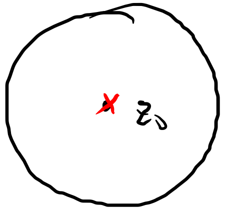
$f(z)$ $\quad z_1, z_2 \dots$ zeri $\quad g(z) = \dfrac{1}{f(z)} : \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$

<u>punti singolari isolati</u>

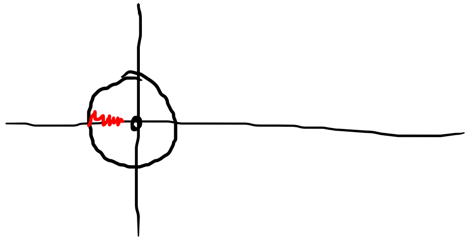
Punti singolari

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ $\quad f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ $\quad f$ olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$ ma NON in z_0; $\quad U \setminus \{z_0\}$ si dice un intorno forato di z_0.

Diremo che z_0 è un punto singolare isolato per f.



Es: $f(z) = \mathrm{Log}\, z$ $\quad$ 0 è un punto singolare ma non è isolato



Es: 0 è punto singolare isolato per $\frac{1}{z}$

$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ ha i punti i e $-i$ singolari isolati

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

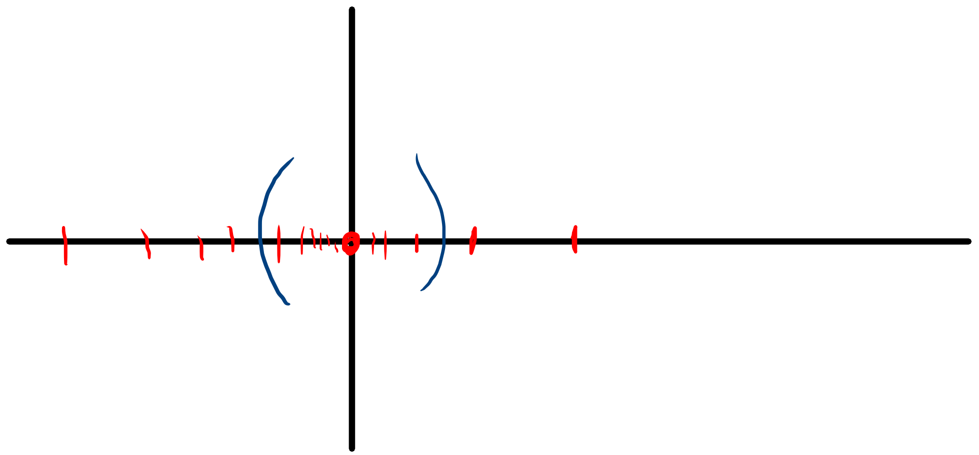
$z = 0$ singolarità

$z : \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \rightsquigarrow \frac{1}{z} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$z = \frac{1}{k\pi}$

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0 \qquad z_k = \frac{1}{k\pi}$ è singolarità isolata

0 è una singolarità ma NON è isolata



Classificazione dei punti singolari isolati di una funzione analitica

z_0 singolarità isolata per f $\quad U$ intorno di z_0

$\boxed{1}$ Sia f localmente limitata in z_0 (cioè esiste un intorno forato W di z_0 e una costante $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in W$);

diremo allora che z_0 è una singolarità eliminabile per f.

Teorema

z_0 è eliminabile se e solo se esiste finito il limite $\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda}$;

in questo caso la funzione

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in U \setminus \{z_0\} \\ \lambda & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

è prolungamento analitico di f

$f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ è localmente limitata in 0 ma $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$!

Dim Poniamo $g(z) = (z-z_0)^2 f(z)$ $\qquad \lim_{z \to z_0} g(z) = 0$

estendiamo per continuità la funzione $g(z)$ $\qquad \tilde{g}(z) = \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$

provo che $\tilde{g}$ è olomorfa;

$$\tilde{g}'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\tilde{g}(z) - \overset{=0}{\tilde{g}(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overset{\to 0}{(z-z_0)^{\cancel{2}}} \overset{\text{limitata}}{f(z)}}{\cancel{z-z_0}} = 0$$

$d_0 = \tilde{g}(z_0)$

$d_1 = \tilde{g}'(z_0)$

quindi $\tilde{g}$ è olomorfa

$\tilde{g}(z) = (z-z_0)^2 f(z) \ \forall z \neq z_0$

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cancel{d_n (z-z_0)^n} = (z-z_0)^2 \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+2} (z-z_0)^n} = \boxed{\tilde{f}(z)}$$

$d_0 = d_1 = 0$

$$= \sum \frac{\tilde{g}^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

OSS f analitica in $U - \{z_0\}$ e esiste finito $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$, allora esiste $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

[⚠ Es: $f(z) = e^{i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$ $\lim_{z \to 0} |f(z)| = 1$ ma non esiste $\lim_{z \to 0} f(z)$!]

Es: $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ 0 singolarità eliminabile per f $\lim_{z \to 0} f(z) = 1$

Es: $f(z) = \dfrac{\pi - 2z}{\cos(z)}$ $z_0 = \frac{\pi}{2}$ è singolarità eliminabile per f

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2z}{\cos(z)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{z \to \pi/2} \frac{-2}{-\operatorname{sen}(z)} = 2$$

2] Polo di ordine k

Supponiamo che $f(z)\cdot(z-z_0)^n$ sia illimitata in z_0 per ogni $n=0,1,\dots,k-1$

mentre $f(z)\cdot(z-z_0)^k$ sia limitata in z_0.

Diremo allora che z_0 è un polo di ordine k per f.

<u>Teorema</u> z_0 è un polo di ordine $k\geq 1$ per f se e solo se $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$

[in particolare $\forall\, n=0,1,\dots,k-1$ $\lim_{z\to z_0}|(z-z_0)^n f(z)|=+\infty$

mentre $\lim_{z\to z_0}|(z-z_0)^k f(z)|=\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$]

Dim poniamo $g(z)=f(z)\cdot(z-z_0)^k$ z_0 è singolarità eliminabile per g, quindi esiste $\tilde{g}$ prolungamento analitico di g

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z-z_0)^n \qquad\qquad g(z) = (z-z_0)^k f(z)$$

Oss. $d_0 \neq 0$

$$(z-z_0)^{k-1} f(z) = \frac{1}{z-z_0}\, g(z) = \frac{d_0}{z-z_0} + d_1 + d_2(z-z_0) + \cdots$$

altrimenti la funzione $(z-z_0)^{k-1} f(z)$ sarebbe limitata in z_0, contro l'ipotesi

$$\forall z \neq z_0 \qquad f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}\, g(z) = \frac{d_0}{(z-z_0)^k} + \frac{d_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + d_k + \cdots$$

quindi

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \underbrace{\frac{1}{|z-z_0|^k}}_{\to +\infty} \underbrace{\left[d_0 + \cdots \right]}_{\to d_0}$$

e anche

$$\lim_{z \to z_0} |(z-z_0)^n f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z-z_0|^{k-n}} \left[d_0 + \cdots \right] = +\infty$$

$n < k$

Supponiamo ora che sia $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

Dimostriamo che allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $(z-z_0)^k f(z)$ è limitata in z_0

Esiste un intorno W di z_0 tale che $|f(z)| \geq 1 \quad \forall z \in W \quad z \neq z_0$

Si può allora considerare la funzione $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} \qquad g : W \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$

g è limitata in z_0 $\quad \left| \dfrac{1}{f(z)} \right| = \dfrac{1}{|f(z)|} \leq 1$

z_0 è singolarità eliminabile per g, esiste il prolungamento analitico $\tilde{g}$ di g

$\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \tilde{g}(z_0) = 0$; sia k la molteplicità di z_0 come zero di $\tilde{g}$;

$\tilde{g}(z) = (z-z_0)^k h(z) \quad h(z_0) \neq 0 \qquad f(z) = \dfrac{1}{\tilde{g}(z)} = \dfrac{1}{(z-z_0)^k} \dfrac{1}{h(z)} \quad \forall z \neq z_0$

quindi $(z-z_0)^k \cdot f(z) = \dfrac{1}{h(z)}$ è localmente limitata in z_0

Es $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ $-i, i$ poli di ordine 1 (poli semplici)

$f(z)\,(z-i) = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}(z-i) = \dfrac{1}{z+i}$ è limitata in i

$$\boxed{f(z) = \frac{z}{1-\cos z}}$$

$\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1-\cos z}{z^2} = \dfrac{1}{2}$

$f(z)\cdot z = \dfrac{z^2}{1-\cos z}$ è limitata 0 è polo semplice

$z = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ $k \neq 0$ $\lim\limits_{\substack{z \to 2k\pi \\ k \neq 0}} \dfrac{z}{1-\cos z}(z-2k\pi)^2 = 2k\pi \cdot 2$ poli doppi

3] singolarità essenziale

$\forall n \in \mathbb{N}$ la funzione $(z-z_0)^n f(z)$ non è limitata in z_0

<u>Teorema</u>

z_0 è una singolarità essenziale per f se e solo se non esiste $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$

es: $f(z) = e^{1/z}$ non esiste $\lim_{z \to 0} |e^{\frac{1}{z}}|$

$$\left[z = x \in \mathbb{R} \quad |e^{\frac{1}{x}}| = e^{\frac{1}{x}} \begin{cases} \to +\infty & \text{se } x > 0 \\ \to 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \right.$$

OSS : $e^{1/z}$ ha in 0 una singolarità essenziale,

sia $w \in \mathbb{C}$ e considero l'equazione $e^{1/z} = w$ sia $w = \rho_0 e^{i\vartheta_0}$

$\frac{1}{z} = \alpha + i\beta$ $\quad e^{\alpha + i\beta} = \rho_0 e^{i\vartheta_0}$ $\quad e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = \rho_0 e^{i\vartheta_0}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{\alpha} = \rho_0 \\ e^{i\beta} = e^{i\vartheta_0} \end{cases}$

se $w = 0$ non ho soluzioni

sia $w \neq 0$, $\rho_0 > 0$

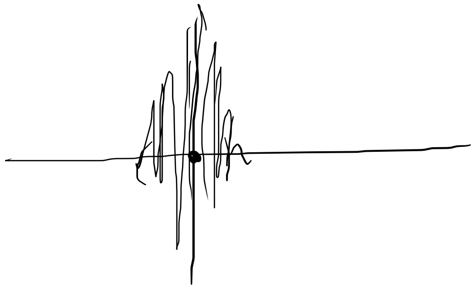
$\alpha = \log(\rho_0) \qquad \beta = \vartheta_0 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$z_k = \frac{1}{\log(\rho_0) + i(2k\pi + \vartheta_0)}$$ infinite soluzioni

Teorema di Picard

Sia z_0 una singolarità essenziale per f. Allora $\forall\, w \in \mathbb{C}$ con al più una sola eccezione, l'equazione

$f(z) = w$ ha in ogni intorno di z_0 infinite soluzioni.



$$f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}$$

Residui

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, z_0 singolarità isolata per f.
Allora esiste un circuito γ che ha sostegno in A e che contiene al suo interno z_0 e nessun'altra singolarità di f. Allora il numero

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz}$$

si dice il residuo di f in z_0.