Residuo di una funzione in un punto. $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, z_0 singolarità isolata per f

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f \, dz$$

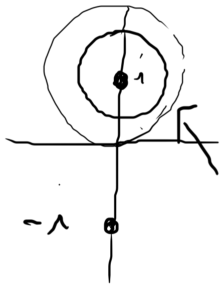
γ circuito con sostegno $\Gamma \subset A$ e $z_0 \in \Gamma_{int}$ unica singolarità interna

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}} \cdot i\cancel{e^{it}}\, dt = 1$$

$\gamma(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$

$\int = -\pi i$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}} \cdot (2i + e^{it})} \cdot \cancel{i}\cancel{e^{it}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2i + \cos t + i \,\mathrm{sen}\, t}\, dt = ?$$



$\gamma(t) = i + e^{it}$

$z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2i}\left[\int_\gamma \frac{1}{z-i}\, dz - \underbrace{\int_\gamma \frac{1}{z+i}\, dz}_{=0}\right]$$

Cauchy

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}} \cdot i\cancel{e^{it}} = \frac{2\pi}{-4\pi} i = -\frac{1}{2} i$$

Formula per il residuo nel caso di un polo di ordine n

$f \quad z_0 \qquad g(z) = (z-z_0)^n f(z) \qquad \tilde{g}(z)$ prolung. analitico

Formula integrale di Cauchy $\quad \tilde{g}^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\tilde{g}(\xi)}{(\xi - z_0)^n} d\xi =$

$\xi \neq z_0$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cancel{(\xi - z_0)^n} f(\xi)}{\cancel{(\xi-z_0)^n}} d\xi = (n-1)! \operatorname{Res}(f, z_0)$$

$n = 1 \quad \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{n-1}\left((z-z_0)^n f(z)\right)}$$

$n = 2 \quad \lim_{z \to z_0} D\left((z-z_0)^2 f(z)\right)$

Caso succede se sbaglio l'ordine del polo? Se l'ordine è $k > n$ otteniamo $\lim | \, | = \infty$

Se $k < n$ $\quad (z-z_0)^k f(z)$ $\quad g(z) = (z-z_0)^n f(z) = (z-z_0)^k \cdot \underbrace{(z-z_0)^{n-k} f(z)}$

$$D^{n-1}\hat{g}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi-z_0)^n}\,d\xi = (n-1)!\,\mathrm{Res}\, f(z_0)$$

$g(\xi) = (\xi - z_0)^n f(\xi)$

Esempi: $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\cdot z = 1$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right) = \lim_{z\to i} \frac{1}{\cancel{(z-i)}(z+i)}\cdot\cancel{(z-i)} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

$$\frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1-\cos z}, 0\right) =$$

0 è polo doppio

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{1-\cos z}\, z\, \frac{z}{z}\right| = +\infty \qquad \frac{z^2}{1-\cos z} \to 2$$

$$\to \lim_{z\to 0} D\,\frac{z^2}{1-\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{2z(1-\cos z) - z^2 \operatorname{sen} z}{(1-\cos z)^2} =$$

$\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{12}z^4 \dots$

$1-\cos z = \frac{1}{2}z^2 + \dots$

$\operatorname{sen} z = z - \frac{1}{6}z^3 + \dots$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{2}z\left(\frac{1}{\cancel{2}}z^2 - \frac{1}{\cancel{12}\,6}z^4 \dots\right) - z^2\left(z - \frac{1}{6}z^3 + \dots\right)}{\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{12}z^4 \dots\right)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{o(z^5)}{\frac{1}{4}z^4 + o(z^5)} = 0$$

$\cancel{z^3} - \cancel{z^3} \quad -\cancel{\frac{1}{6}z^5} + \cancel{\frac{1}{6}z^5}$

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right) = -\frac{1}{2}i$ $\qquad$ $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, -i\right) \overset{?}{=} \lim_{z\to -i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i$

I residui sono coniugati!

<u>OSS</u>: supponiamo f abbia la proprietà che $f(\bar z) = \overline{f(z)}$

(es: f razionale a coeff. <u>reali</u>)

Allora se z_0 è un punto singolare isolato (di tipo polo), lo è anche $\bar z_0$ e si ha

$$\mathrm{Res}(f, \bar z_0) = \overline{\mathrm{Res}(f, z_0)}$$

<u>Dim</u> osserviamo che $f'(\bar z) = \overline{f'(z)}$

$$\left[\ f'(\bar z) = \lim_{\substack{w \to \bar z \\ w = \bar u}} \frac{\overset{=\overline{f(u)}}{f(\bar u)} - \overset{=\overline{f(z)}}{f(\bar z)}}{\overline{(u-z)}} = \lim_{\bar u \to \bar z} \overline{\left[\frac{f(u)-f(z)}{u-z}\right]} = \overline{f'(z)}\right.$$

$$\mathrm{Res}(f, \bar z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to \bar z_0} D^{n-1}\left(\underbrace{(z-\bar z_0)^n f(z)}\right)$$

$$(\bar w)^n = \overline{(w^n)} \longleftarrow$$

$w = \rho e^{i\vartheta}$
$w^n = \rho e^{in\vartheta}$
$\overline{w^n} = \rho e^{-in\vartheta}$

$\bar w = \rho e^{-i\vartheta}$
$\bar w^n = \rho^n e^{-in\vartheta}$

Es 2 foglio residui

Siano g e h funzioni analitiche z_0 uno zero semplice per $h(z)$ $g(z_0) \neq 0$

Allora z_0 è un polo semplice per $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

Si ha $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

$g(z)$ analitica, avrò $Z(g)$ discreto

$f(z) = \frac{1}{g(z)}$ avrò negli zeri di g delle singolarità isolate di tipo polo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \dots$$

$z_0 \in Z(g)$ di molteplicità k

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$$

$c_1(z-z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{a_k + a_{k+1}(z-z_0) + a_{k+2}(z-z_0)^2 + \dots} = \underbrace{\frac{c_k}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + c_0 + \dots}$$

Serie bilatere

sia $\underline{(w_n)_n}$ una successione $n \in \mathbb{Z}$

$[\ \varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \quad \varphi(n) = w_n\ ]$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n \qquad \cancel{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} w_k}$$

Consideriamo una successione bilatera $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Diremo che la serie bilatera $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n$ converge se sono convergenti entrambe le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} w_{-k}$ e la somma è $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{-k} + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$

Serie di potenze bilatera $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}_{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} \left[\frac{1}{z-z_0}\right]^k}_{1}$

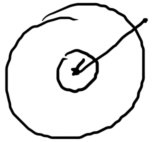
$$\sum a_{-k} w^k \qquad w = \frac{1}{z-z_0}$$

Si avrà convergenza se z verifica

2 $|z-z_0| < R_2$ R_2 raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

1 $|z-z_0| > R_1$ dove $\frac{1}{R_1}$ è raggio di convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} w^k$

$$\frac{1}{|z-z_0|} = |w| < \frac{1}{R_1} \qquad |z-z_0| > R_1$$



$z \in C(z_0, R_1, R_2) = \{ z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2 \}$ corona circolare di centro z_0 e raggi R_1, R_2

$\boxed{12.14}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$ l'insieme di convergenza è E $\qquad C(z_0, R_1, R_2) \subseteq E \subseteq \overline{C(z_0, R_1, R_2)}$

OSS: z_0 è polo di ordine k per f

$$g(z) = (z-z_0)^k f(z) \quad \text{prolungabile in modo analitico}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \left[a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \right]$$

$\Downarrow$

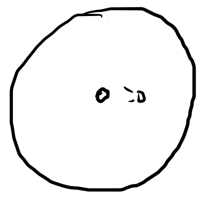
$$f(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \cdots$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

dove $c_n = 0$ se $n < -k$

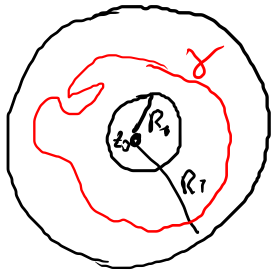
$c_{-k} = a_0 \neq 0$

$R_1 = 0$

$R_2 \in]0, +\infty]$



Teorema di Laurent



Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $\quad 0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$

$$C = C(z_0, R_1, R_2) = \{ z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$$

$f : C \to \mathbb{C}$ analitica. Allora f è rappresentabile come serie bilatera di potenze centrata in z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (*)$$

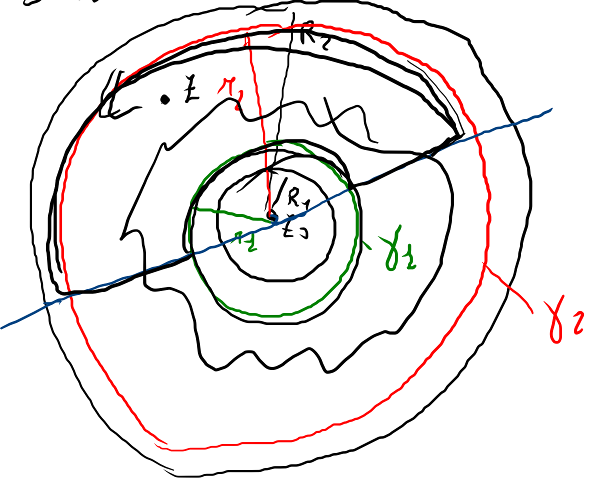
$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi}$$

dove γ è un circuito con sostegno nella corona C e contenente z_0 all'interno.

$(*)$ è detta serie di Laurent

<u>OSS</u>: se $c_n = 0$ $\forall n \leq -1$ la serie è la serie di Taylor

Dim

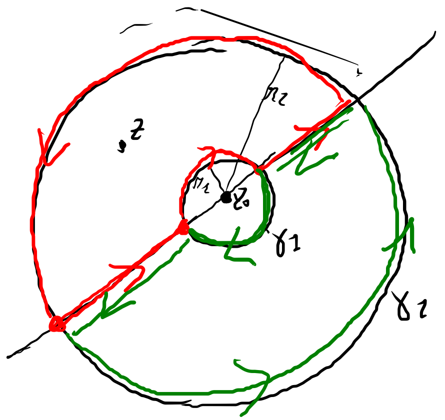


Fissiamo $z \in C(z_0, R_1, R_2)$

Prendiamo $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$ e consideriamo $C(z_0, r_1, r_2)$

Troviamo una retta r per z_0 che non passi per z

(z starà da una parte della retta r e non dall'altra)



Costruiamo due circuiti con sostegno e parte interna contenuti in $C(z_0, R_1, R_2)$

$$\varphi_1 = \cancel{\overrightarrow{[\dots]}} - \gamma_{1\,sup} + \overrightarrow{[\dots]} + \gamma_{2\,sup}$$

$$\varphi_2 = \cancel{\overleftarrow{[\dots]}} + \gamma_{2\,inf} + \overleftarrow{[\dots]} - \gamma_{1\,inf}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{[\dots]} - \int_{\gamma_1 sup} + \int_{[\dots]} + \dots\right]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = f(z)$$

formula integrale di Cauchy

$z \in \Phi_{1\,int}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = 0$$

Teorema di Cauchy

$z \notin \Phi_{2\,int}$

Si ottiene $f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$

1 2

1 $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{z_0 - z}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\xi - z_0)^n}{(z-z_0)^n}\,d\xi = +\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^n\,d\xi\right]\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} =$

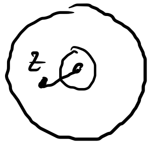
$= \sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\,d\xi\right](z-z_0)^k$

$n+1 = -k$

$n = -(k+1)$

2 $\xi - z = \xi - z_0 + z_0 - z = (\xi - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)$

$\xi \in \Gamma_2$



$|z-z_0| < |\xi - z_0|$

$\left|\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$

2 $= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(\xi)\cdot\frac{1}{\xi - z_0}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}\,d\xi = (*)$

$(*) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\right]\cdot(z-z_0)^n$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} \, d\xi \right] (z-z_0)^k + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \right] (z-z_0)^n$$

Sia γ un circuito con sostegno in $C(z_0, R_1, R_2)$, allora per il teorema dei due circuiti possiamo sostituire γ_1 e γ_2 con γ e prendi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$ con i coefficienti $$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n-1}} \, d\xi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Caso importante z_0 singolarità isolata; si può prendere $R_1 = 0$

$C(z_0, 0, R_2) = B(z_0, R_2) \setminus \{z_0\}$ intorno forato di z_0.

se z_0 è eliminabile

$c_n = 0 \quad \forall n \leq -1$

la serie di Laurent è la serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

se z_0 è polo di ordine k

la serie di Laurent è tale che $\quad c_n = 0 \quad \forall n \leq -k-1 \quad c_{-k} \neq 0$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\cancel{(\xi - z_0)^0}} d\xi$$

$= Res(f, z_0)$

se z_0 è singolarità essenziale

la serie di Laurent ha infiniti termini $\quad c_n \neq 0 \quad$ con $\quad n < 0$

NB: $\boxed{c_{-1} = Res(f, z_0)}$

Es: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ 0 è singolarità essenziale

$\mathrm{Res}(f,0)$? $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\frac{1}{z}}\,dz$

C_{-1}

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots$ $\forall t$

$$\underbrace{e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \dots}_{\text{è la serie di Laurent di } e^{1/z}}$$

$\boxed{C_{-1} = 1} = \mathrm{Res}(f,0)$

$C_{-2} = \frac{1}{2}$