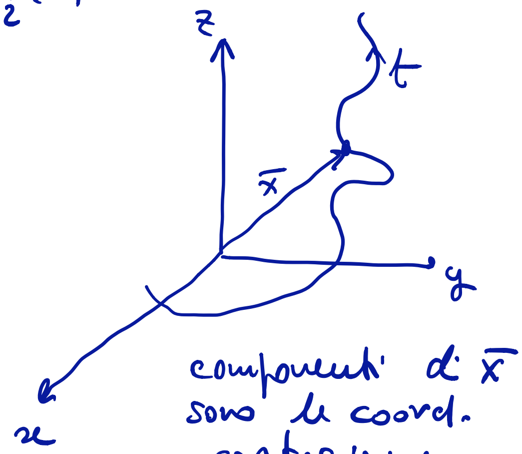
EQ. DIFFERENZIALI ORDINARIE

Eq. di Newton $\quad \bar{F} = m\bar{a} = m\,\dfrac{d^2\bar{x}}{dt^2}(t)$



$$\bar{x}(t) : \quad \bar{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

componenti di $\bar{x}$ sono le coord. cartesiane

L'eq. di Newton è un'eq. differenziale

$$m\,\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}(t) = \bar{F}\left(\bar{x}(t), \frac{d\bar{x}}{dt}(t), t\right)$$

→ è un'eq. la cui incognita è una FUNZIONE ($\bar{x}(t)$)

Ci mettiamo nel caso 1 dimensionale

il pto materiale si muove su una retta

Il moto lungo la retta è descritto da una funz.

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto x(t)$$

Eq. di Newton:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

eq. la cui incognita è la funz. $x(t)$

funzioni $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dots$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \equiv f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

è un'uguaglianza fra due funz. in t

questa funzione è una funzione a tre variabili

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, v, t) \mapsto f(x, v, t)$$

è una funzione

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(x(t), \dot{x}(t), t)$$

2ª legge di Newton in sist. 1d :

$$\underbrace{\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)}_{\text{"forma normale"}}$$

se f è INDIPEND da t, l'eq. si dice AUTONOMA

(Forma generica sarebbe $g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0$)

Se f è LINEARE in x e $\dot{x}$, l'eq. si dice LINEARE

$f(x, \dot{x}, t) = a\dot{x} + bx + c$

ES 1 PARTICELLA LIBERA

$$\ddot{x} = 0$$

$$\to x(t) = at + b$$

"SOLUZIONE GENERALE"

a, b parametri liberi

⇝ per ogni scelta di (a, b) abbiamo una diversa soluzione PARTICOLARE

ES. $(a, b) = (1, 0) \rightsquigarrow x(t) = t$

ES 2) OSCILLATORE ARMONICO

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\rightarrow x(t) = \underline{\underline{a}} \cos(\omega t) + \underline{\underline{b}} \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$= \underline{\underline{A}} \cos(\omega t + \underline{\underline{\varphi}})$$

$$= \underline{\underline{C}}\, e^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}$$

$\llcorner C = \operatorname{Re}C + i \operatorname{Im}C$

2 parametri (reali) liberi

ES 3) REPULSORE ARMONICO

$$\ddot{x} = \omega^2 x$$

$$\rightarrow x(t) = \underline{a} \cosh \omega t + \underline{b} \operatorname{senh} \omega t$$

$$= \underline{\underline{A}}\, e^{\omega t} + \underline{B}\, e^{-\omega t}$$

ES 1,2,3 hanno caratteristica in comune:

$f = 0 \;,\; -\omega^2 x \;,\; \omega^2 x \quad \rightarrow f$ è una funz. lineare in $x, \dot{x}$

Per le eq. diff. lineari OMOGENEE* vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZ. che dice che la SOLUZ. GEN. è combinazione lineare di 2 (se eq. è del 2° ord.) soluz. particolari indip.

$$* \; f(x,\dot{x},t) = a\dot{x} + bx \quad (c=0)$$

Se a f lin. omogenea, si aggiunge un termine non-omogeneo, allora la soluz. GENERALE è la somma di una soluz. particolare e della soluz. gen. dell'eq. omogenea associata.

ES 4)

$f = -g$ è lineare, ma non è omogenea.

$\ddot{x} = -g \rightsquigarrow$ eq. omogenea associata è $\ddot{x} = 0$

solu. particolare: $-\frac{1}{2} g t^2$

solut. gen. dell'omogenea $x_{om.}(t) = at + b$

Solut. gen. dell'eq. di partenza è

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + at + b$$

ES 5) PENDOLO

$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x$ ← non-lineare

(solut. richiede funzioni ellittiche)

ES 6) CADUTA FRENATA

$\ddot{x} = -\beta \dot{x} - g \rightsquigarrow$ eq. omogenea associata $\ddot{x} = -\beta \dot{x}$

$v(t) \equiv \dot{x}(t)$

$\dot{v} = -\beta v$

$v(t) = \alpha e^{-\beta t}$

$x_{om.}(t) = b - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}$

$= b + a e^{-\beta t}$

solut. part.

$x(t) = -\frac{g}{\beta} t \equiv v_\infty t$

$\equiv v_\infty$

$$x(t) = v_\infty t + a e^{-\beta t} + b$$

$$\left(\dot{x}(t) = v_\infty - a\beta e^{-\beta t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} v_\infty \right)$$

ES 7 OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

$\mu, \omega > 0$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu \dot{x} \quad (*)$$ eq. lin. omogenea che dip. da due parametri μ, ω

Cerchiamo soluz. particolari della forma $x(t) = e^{\lambda t}$; qte sono soluz. se soddisfano l'eq. $(*)$:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega^2 e^{\lambda t} - 2\mu \lambda e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} = -(\omega^2 + 2\mu\lambda)\cancel{e^{\lambda t}}$$

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0$$ eq. di 2° grado in λ

$$\frac{\Delta}{4} = \mu^2 - \omega^2$$

$\mu > \omega$: $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} < 0 \Rightarrow$ 2 soluz. partic. della forma $e^{\lambda t}$

GRANDE SMORZAMENTO

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$$

$\mu < \omega$

PICCOLO SMORZAMENTO

$$x(t) = e^{-\mu t}(a \cos \sigma t + b \sin \sigma t)$$

dove $\sigma \equiv \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$

$\mu = \omega$

SMORZAMENTO CRITICO

$$x(t) = (a + bt)e^{-\mu t}$$

ES 8 CICLO LIMITE

Eq. di Van der Pol

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \qquad \beta > 0$$

- attrito positivo per $|x| > 1$
- " negativo per $|x| < 1$

→ per moti di grande ampiezza prevale attrito positivo

⇒ ampiezza tende a ridursi

→ per moti di piccola ampiezza prevale attrito negativo

⇒ ampiezza tende ad aumentare

→ per un solo moto CRITICO i due effetti si compensano ($|x|=1$) ⇒ moto periodico

↳ CICLO LIMITE.

$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$ eq. diff. del 2° ordine

può essere portata nella forma di un sistema di eq. diff. del 1° ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v, t) \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ $\bar{f}(\bar{x}, t) = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v, t) \end{pmatrix}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)} \quad (\star)$$

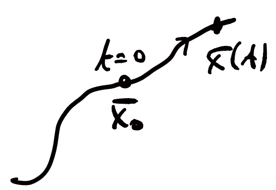
Eq. diff. del 1° ord nell'incognita $\bar{x}(t)$

$$\Downarrow$$

Vale il TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA'

Prop. Se $\bar{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ è localm. Lipschitziana in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, allora $\forall \bar{x}_0 \in U$ $\exists$ intervallo $(-\tau, \tau)$ e un'UNICA SOLUZIONE $\bar{x}(t)$ dell'eq. $(\star)$ definita per $t \in (-\tau, \tau)$ t.c.

$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ (condizione iniziale)

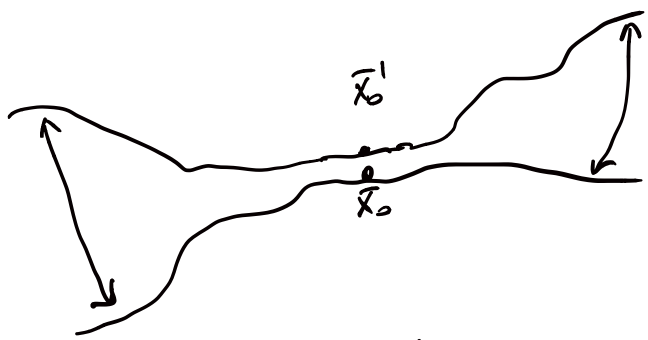


Se cambiamo $\bar{x}_0$, cambia la soluzione

$$\bar{x}(t;\bar{x}_0)$$

parametro della funzione $\bar{x}(t)$ che risolve l'eq. (*) con condiz. iniz. $\bar{x}_0$.

La soluzione dipende con regolarità dal dato iniziale (e da eventuali parametri presenti in $\bar{f}$)



In effetti vale la relazione

$$\|\bar{x}(t,\bar{x}_0') - \bar{x}(t,\bar{x}_0)\| < C\,\|\bar{x}_0' - \bar{x}_0\|\, e^{\lambda|t|}$$

$\lambda > 0$

Esempio: repulsore armonico