SISTEMA AUTONOMO

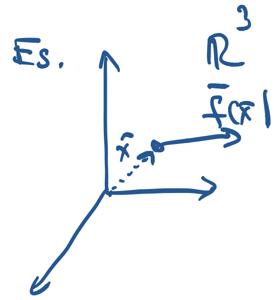
$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \cancel{t})$$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\uparrow$

campo VETTORIALE

Es. 

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*) \leftarrow \text{sistema autonomo}$$

→ per sistemi autonomi, abbiamo INVARIANZA PER TRASLAZIONI TEMPORALI, cioè

se $\bar{x}(t)$ è soluzione di $(*)$, anche $\bar{x}'(t) \equiv \bar{x}(t - t_0)$ è soluz. di $(*)$

Es. $\dot{x} = x$ → una soluz. è $x(t) = e^t$, ma anche e^{t-t_0} è soluzione $\forall t_0$

Dim. Prendiamo $\bar{x}(t)$ soluz. di $(*)$, cioè $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t))$;

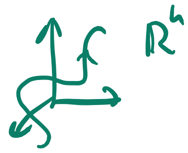
allora $\dot{\bar{x}}'(t) = \frac{d}{dt}\bar{x}'(t) = \frac{d}{dt}\bar{x}(t-t_0) = \dot{\bar{x}}(t-t_0) =$

$\uparrow$ $\bar{x}(\tilde{t})$ è soluz.

$= \bar{f}(\bar{x}(t-t_0)) = \bar{f}(\bar{x}'(t))$ //

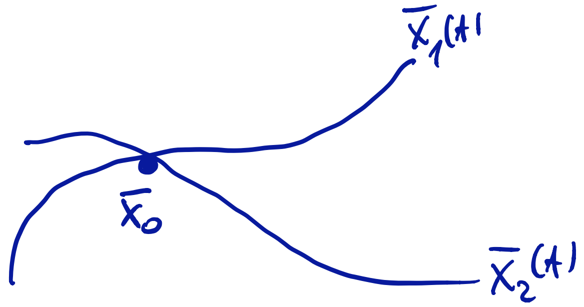
$\Rightarrow$ Traiettorie$^{(*)}$ delle soluzioni di $(*)$ **non si intersecano mai!**

(*) Traiettoria è l'immagine della funz. $\bar{x}(t)$ in $\mathbb{R}^n$



Dim. Assumiamo per assurdo che ci siano due soluzioni

$\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_2(t)$ le cui traiettorie si intersecano



$$\bar{x}_1(0) = \bar{x}_0$$
$$\bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_0$$
$$\downarrow$$

Ma se questo fosse possibile, allora esisterebbe una terza solut. $\bar{x}_3(t) \equiv \bar{x}_2(t+t_0)$ t.c. $\bar{x}_3(0) = \bar{x}_0$

cioè esisterebbero due solut., $\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_3(t)$ con lo stesso dato iniziale a $t=0$, violando il teorema di esistenza e UNICITÀ. //

CASO MECCANICO (autonomo)

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \cancel{t}) \rightsquigarrow \ddot{x} = f(x, \dot{x}) \qquad (*)$$

Passiamo al "piano di fase", cioè lo spazio con coordinate $\bar{x} = (x, v)$

$(*)$ equiv.a $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ dove $\bar{f}(x,v) = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v) \end{pmatrix}$

Dato il dato iniziale $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, c'è un'unica soluzione che passa per $\bar{x}_0$ al tempo $t=0$. Le soluzioni dipendono dai parametri x_0 e v_0.

ES. osc. armonico

solut. è $x(t) = a \cos\omega t + b \sin\omega t$

$v(t) = -a\omega \sin\omega t + b\omega \cos\omega t$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = x(0) = a \\ v_0 = v(0) = b\omega \end{array} \qquad \Rightarrow \begin{array}{l} a = x_0 \\ b = \dfrac{v_0}{\omega} \end{array}$$

$$\bar{x}(t;\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} x(t;x_0,v_0) \\ v(t;x_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos\omega t + \dfrac{v_0}{\omega} \sin\omega t \\ -\omega x_0 \sin\omega t + v_0 \cos\omega t \end{pmatrix}$$

Scelti x_0 e v_0, la soluzione è determinata.

FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE

Data l'eq. diff. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$ $\qquad \bar{x}(t)$ a valori in $\mathbb{R}^n$

$\forall \bar{x}_0$, $\exists !$ solut. $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ $(\cdot)$

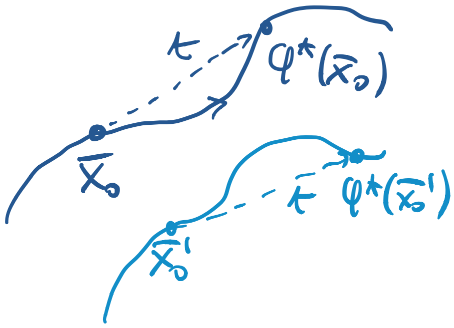
- Fissato $\bar{x}_0$, la solut. $(\cdot)$ descrive una curva in $\mathbb{R}^n$
- Fissato t, $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ è una funzione in $\bar{x}_0$, cioè descrive una mappa

$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x}_0 \longmapsto \varphi^t(\bar{x}_0) \equiv \underbrace{\bar{x}(t;\bar{x}_0)}_{\text{solut. di } (*)}$$

t è un parametro della mappa

$\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

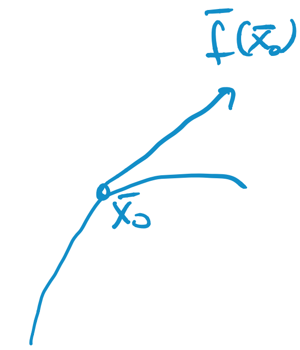


Al variare di t si ha una FAMIGLIA a un parametro di AUTOMORFISMI $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

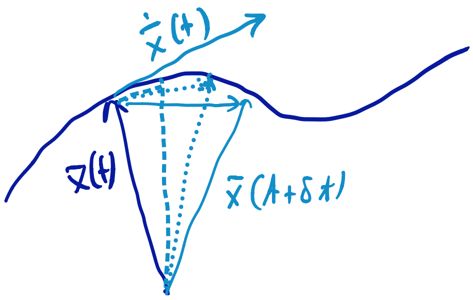
La famiglia $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ si dice il **FLUSSO** relativo al campo vettoriale $\bar f$.

[$\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un GRUPPO
Id: φ^0 Inverso: φ^{-t} Compos.: $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$]

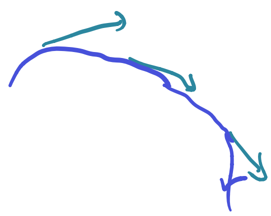
$\dot{\bar x} = \bar f(\bar x)$ ⇝ curva $\bar x(t)$ che passa per $\bar x_0$ deve essere tangente al vettore $\bar f(\bar x_0)$



$$\dot{\bar x}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\bar x(t+\delta t) - \bar x(t)}{\delta t}$$



"Linee di forza"



Soluzioni di equilibrio

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*) \quad \leftarrow \quad \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t)) \quad \text{vero } \forall t$$

Delle soluzioni particolari sono FUNZIONI COSTANTI

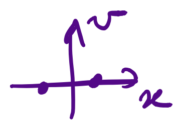
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cost. indip. da } t}}{\bar{x}(t) = \bar{c}} \qquad \bar{c} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{con } \bar{c} \text{ t.c. } \bar{f}(\bar{c}) = 0$$

Tali solut. particolari sono dette "punti di EQUILIBRIO" le cui traiettorie sono pti.

Prop. I PUNTI DI EQUIL. dell'eq. $(*)$ sono tutti e soli i pti dove $\bar{f}(\bar{x})$ si azzera. ("Pti singolari" del campo vettoriale)

Corollario. Nel sistema meccanico $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, $\leftarrow \bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v) \end{pmatrix}$

i pti singolari o di equilibrio sono del tipo



$$\bar{c} = (\underset{\nearrow\, x}{c}, \underset{\uparrow\, v}{0}) \qquad \text{con } f(c, 0) = 0$$

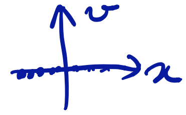
$\leftarrow$ Nel piano di fase i pti di equil. giacciono sull'asse delle ascisse

Dim. Pti equil. sono gli zeri di $\bar{f}(x,v)$, cioè solut. di equaz.

$$\begin{cases} f_1(x,v) = 0 \\ f_2(x,v) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow[\text{sist. mecc.}]{} \begin{cases} v = 0 \\ f(x,0) = 0 \end{cases} \quad //$$

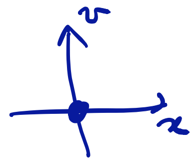
(Nei pti di equil. $(c,0)$ la risultante delle forze si annulla)

ES. PARTICELLA LIBERA $\ddot{x} = 0$ f è identicam. nulla e quindi i pti di equil. sono $(c, 0)$ $\forall c \in \mathbb{R}$



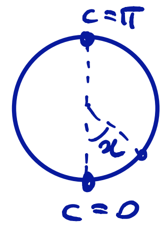
ES. OSCILL. ARM. $f(x,v) = -\omega^2 x$

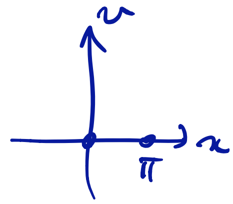
$\rightarrow$ pti equil. $c = 0$



ES. PENDOLO $f(x,v) = -\operatorname{sen} x$ $(\omega = 1)$

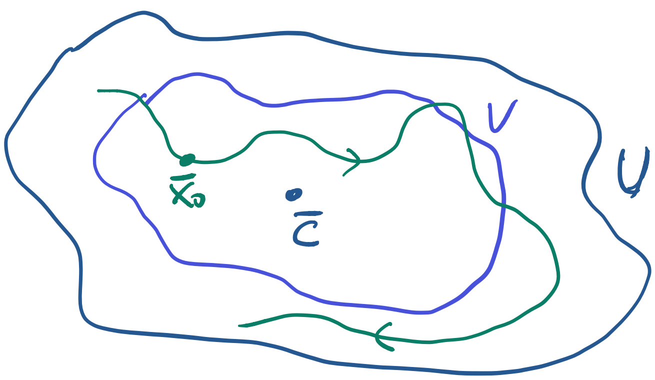
$\rightarrow$ pti equil. $c = 0, \pi$





Attorno ai pti di equilibrio possiamo avere informazioni APPROSSIMATE sulle solut., anche per sistemi complicati.

Def. Un pto di equil. $\bar{c}$ di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(\bar{f}(\bar{c}) = 0)$ è detto STABILE (o stab. nel futuro, o stab. nel passato) se $\forall$ intorno U di $\bar{c}$, $\exists$ intorno V di $\bar{c}$, t.c. ogni movimento $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ con $\bar{x}_0 \in V$ resta in U $\forall t$ $(\forall t > 0, \ \forall t < 0)$



($c = 0$ è stab. per il pendolo; $c = \pi$ NON è stab.)

Def. $\bar{c}$ è INSTABILE se non è stabile.

Def. $\bar{c}$ è ASINTOTICAM. STAB. per tempi positivi (negativi) quando

a) è stab. per $t \geq 0$ $(t \leq 0)$ e

b) $\exists B$ intorno di $\bar{c}$ (BACINO DI ATTRAZIONE) t.c.

$\forall \bar{x}_0 \in B$ $\bar{x}(t; \bar{x}_0) \rightarrow \bar{c}$ per $t \rightarrow +\infty$ $(t \rightarrow -\infty)$

COSTANTE DEL MOTO (INTEGRALE PRIMO, INVARIANTE DEL MOTO)

<u>Def.</u> Una funzione $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice COSTANTE DEL MOTO per l'equazione $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

se $I(\bar{x}(t;\bar{x}_0)) = I(\bar{x}_0)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{dI(\bar{x}(t;\bar{x}_0))}{dt} = 0$

$\forall t$ e $\forall$ soluzione $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ dell'eq. $(*)$

è la funz. composta $I \circ \bar{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto I(\bar{x}(t))$

ES. OSC. ARM.

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t$$
$$v(t) = -x_0\omega \sin\omega t + v_0 \cos\omega t$$
$\leftarrow$ soluz. di $(*)$

$$I(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$
$\leftarrow$ funz. $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,v) \mapsto I(x,v)$

Verifichiamo che I soddisfi la def. per essere una cost. del moto:

$$I(x(t), v(t)) = \frac{1}{2}\left(\underline{x_0^2\omega^2 \sin^2\omega t} - \cancel{2x_0 v_0 \omega \sin\omega t \cos\omega t} + \underline{v_0^2 \cos^2\omega t} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\omega^2 \left(\underline{x_0^2 \cos^2\omega t} + \cancel{2\frac{x_0 v_0}{\omega} \cos\omega t \sin\omega t} + \underline{\frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2 + \frac{1}{2}v_0^2 = I(x_0, v_0)$$