ESERCITAZIONE #2 — 12/03/21 CINEMATICA

0) RISCALDAMENTO:

CALCOLARE IL GRADIENTE DELLA SEGUENTE FUNZIONE $f(x;y)$

$$f(x;y) = 6x^2 + 10\sin(xy) + y + 1$$

$$\vec{\nabla} f(x;y) = \hat{\imath}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right) = \hat{\imath}\left(12x + 10y\cos(xy)\right) + \hat{\jmath}\left(10x\cos(xy) + 1\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x + 10\cos(xy)\,y + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 10x\cos(xy) + 1$$

https://www.geogebra.org/m/yh5s2cut

Scalar and Gradient Field
Fisika Matematik 2020

$U(x, y) =$ 6x² + 10sin(x y) + y + 1

Gradient Field

$$\nabla U = (10\ y\ \cos(x\ y) + 12\ x)\ \hat{\mathrm{i}} + (10\ x\ \cos(x\ y) + 1$$

$$= 10.93\ \hat{\mathrm{i}} + -12.07\ \hat{\mathrm{j}}$$

☑ gradient Field

Contour Plot

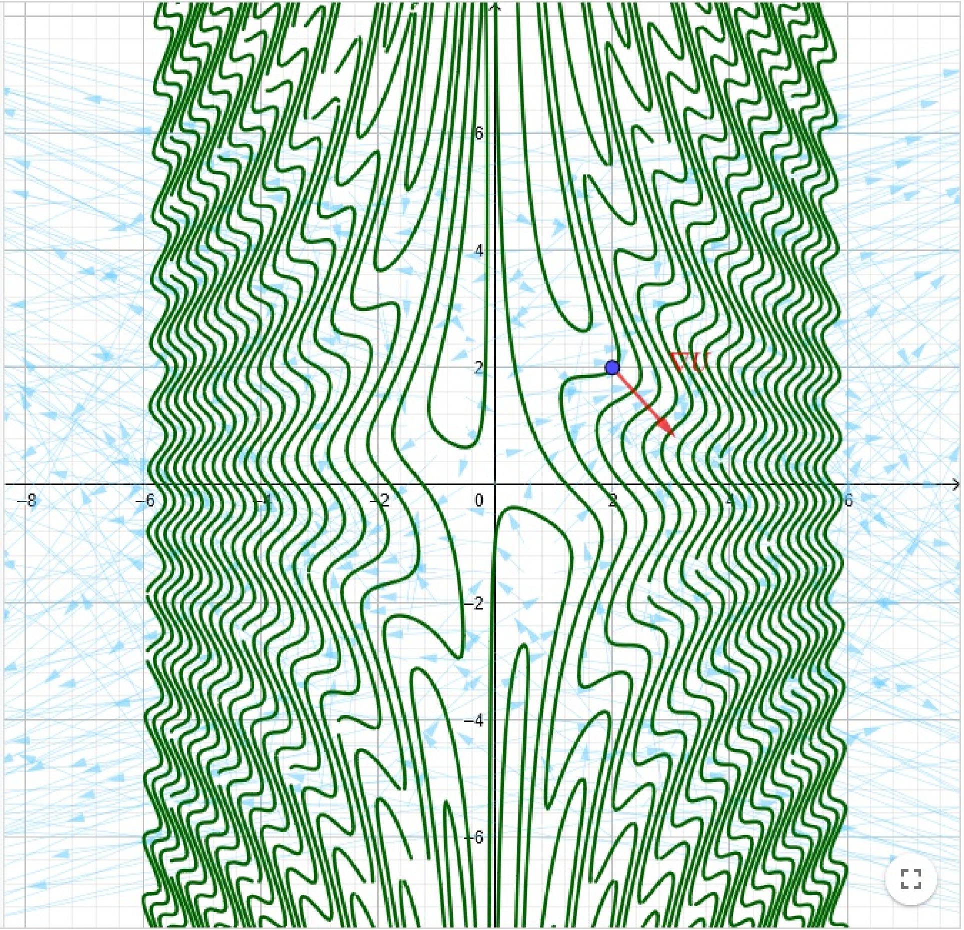
$$U(x, y) = k$$

$k_{min} =$ -200

$k_{max} =$ 200

$\Delta k =$ 10

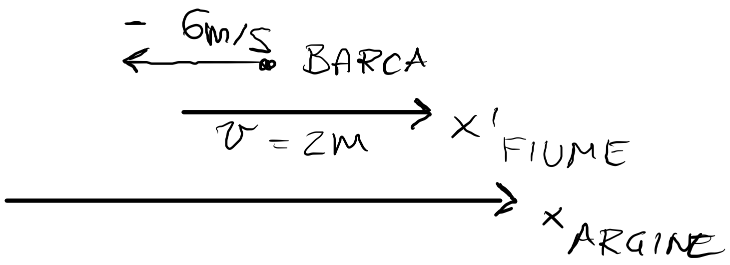
scale = 0.1



2). BATTELLI IN MOVIMENTO

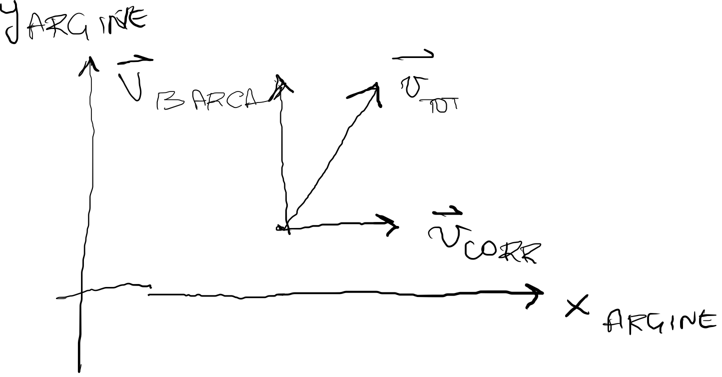
UN BATTELLO VIAGGIA CON $v = 6.0$ m/s MISURATA RISPETTO ALL' ACQUA
LA CORRENTE SI MUOVE CON $v = 2$ m/s. QUAL È LA VELOCITÀ DEL BATTELLO RISPETTO AGLI ARGINI, SE SI SPOSTA:

- CONTROCORRENTE
- SECONDO CORRENTE
- PERPENDICOLARMENTE ALLA CORRENTE



$$v_{CONTRO} = -6\ m/s + 2\ m/s = -4\ m/s$$

$$v_{CORRENTE} = +6\ m/s + 2\ m/s = 8\ m/s$$



$$|\vec{v}_{TOT}| = \sqrt{2^2 + 6^2}\ m/s = \sqrt{40}\ m/s \simeq 6{,}3\ m/s$$

3) PIÙ VELOCE DELLA LUCE?

LA VELOCITÀ DELLA LUCE IN UN MEZZO TRASPARENTE È MINORE DI c ED È PARI A $v = \frac{c}{n}$ DOVE n È L'INDICE DI RIFRAZIONE DEL MEZZO.
QUANTO IMPIEGA UN FASCIO DI LUCE A PERCORRERE 10^6 km IN UN MEZZO CON $n = 1.5$? QUANTO TEMPO IN PIÙ RISPETTO AL CASO IN CUI $n = 1$ (VUOTO)?

$$\Delta S = vt \Rightarrow t = \frac{\Delta S}{v} = \frac{\Delta S\, n}{c} = n = 1.5 = \frac{10^6 \cancel{km} \cdot 10^3 \cancel{m}/\cancel{km} \cdot 1.5}{3 \times 10^8 \cancel{m}/s}$$

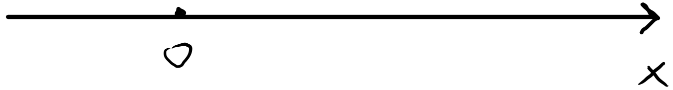
$$n = 1.5 \Rightarrow t = \frac{10^9\, m \cdot 1.5}{3 \times 10^8\, m/s} = \frac{1.5 \times 10^9}{3 \times 10^8}\, s = 0.5 \times 10\, s = 5\, s$$

$$n = 1 = t = \frac{10^9\, m \cdot 1}{3 \times 10^8\, m/s} = 3.3\, s$$

5) RITORNO AL FUTURO

NEL FILM "RITORNO AL FUTURO" MARTY McFLY PUÒ VIAGGIARE NEL TEMPO A BORDO DELLA DELOREAN. PER VIAGGIARE NEL TEMPO, L'AUTO DEVE VIAGGIARE A $v = 88 \frac{\text{miglia}}{h}$. SAPENDO CHE 1 miglio = 1.61 km, E SUPPONENDO CHE MARTY PARTA DA FERMO E ACCELERI CON a COSTANTE ($a = 2.9\ m/s^2$), CALCOLARE Δt PER RAGGIUNGERE LE 88 MIGLIA/ORA E LA LUNGHEZZA DEL TRATTO Δx PERCORSO.

$$\begin{cases} S(t) = \cancel{S_0} + \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = \cancel{v_0} + at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(t) = \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = at \end{cases}$$



$S_0 = 0$

$v_0 = 0$

$$t_F = \frac{v_F}{a} = \frac{39.36}{2.9} \frac{m}{\cancel{s}} \frac{s^{\cancel{2}}}{m} = 13.57\ s$$

$$v_F = 88 \frac{\text{miglia}}{h} = \frac{88 \text{ miglia} \cdot 1.61 \text{ km/miglio}}{h} = 142\ km/h = 39.36\ m/s$$

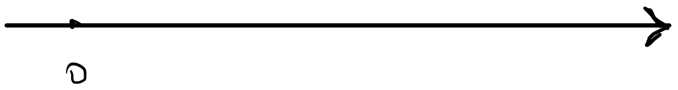
DALLA PRIMA EQUAZIONE INOLTRE TROVO CHE: UDM CORRETTE

$$\Delta S = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2.9 \frac{m}{s^2} (13.57\, s)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}9 \cdot 185.96 \frac{m}{\cancel{s^2}} \cancel{s^2} = 268.2\ m$$

4) F1 BAHRAIN TEST

UNA VETTURA DI F1 PERCORRE UN RETTILINEO PARTENDO DA FERMA IN 9 s. SAPENDO CHE IL RETTILINEO E' LUNGO 530 m, QUAL E' L'ACCELERAZIONE MEDIA? COME CAMBIEREBBE LA RISPOSTA SE L'AUTO PARTISSE DA $v_0 = 108$ km/h?

COME NEL PROBLEMA PRECEDENTE:



$x_0 = 0$

$v_0 = 0$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a t^2 & (1) \\ v(t) = at & (2) \end{cases}$$

DALLA PRIMA CALCOLO L'ACCELERAZIONE MEDIA

$$a = \frac{2 \Delta S}{t^2} = \frac{2 \cdot 530 \text{ m}}{(9 \text{ s})^2} = \frac{1060 \text{ m}}{81 \text{ s}^2} = 13.8 \text{ m/s}^2 \simeq 1.5 \, g$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

SE INVECE L' AUTO NON PARTE DA FERMA: $\left(v_0^2 = 108 \ \frac{km}{h} = 30 \ \frac{m}{s}\right)$

$$\begin{cases} x(t) = v_0^2 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0^2 + a t \end{cases}$$

DA CUI

$$a = \frac{(\Delta S - v_0 t)\, 2}{t^2} = \frac{(530\ m - 30\ m/\cancel{s} \cdot 9\ \cancel{s})\, 2}{81\ s^2} = 6.42\ m/s^2$$

NB: MI SONO ACCORTO DOPO (ORA) CHE v_F E' IRREALISTICA NEL CASO 1 (437.4 km/h). PRENDETELO COME ESPERIMENTO MENTALE!

6) SCOIATTOLI IN CADUTA LIBERA

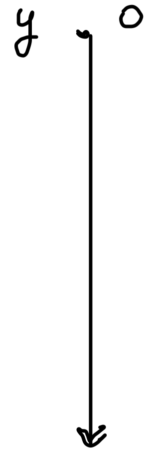
UN CORPO IN CADUTA LIBERA (CHE CADE NELL' ARIA) NON ACCELERA IN MODO INDEFINITO, MA RAGGIUNGE UNA VELOCITÀ LIMITE (V_{TERM}). UNO SCOIATTOLO MEDIO RAGGIUNGE V_{TERM} MOLTO RAPIDAMENTE: SUPPONIAMO CHE $\Delta S = 12.5$ m E CHE $V_{TERM} = 30$ km/h : QUAL È L'ACCELERAZIONE MEDIA (QUANDO DIVERSA DA ZERO)? SE LANCIASSIMO UNO SCOIATTOLO DA 300 METRI DI ALTEZZA, QUANTO TEMPO IMPIEGA AD ARRIVARE A TERRA?

BONUS: UNO SCOIATTOLO SOPRAVVIVE FACILMENTE A CADUTE 30 METRI. SOPRAVVIVERÀ AL NOSTRO LANCIO?

$m = 0.3\ kg$

$\Delta S = 12.5\ m$

$v_T = 30\ km/h = 8.3\ m/s$



. MOTO UNIDIREZIONALE LUNGO $\hat{y}$: PRENDO IL VERSO POSITIVO IN BASSO e RISOLVO TUTTO IN MODO SCALARE, CON $\emptyset$ DAL PUNTO IN CUI INIZIA LA CADUTA.

. $v_0 = 0$; $S_0 = 0$

$$\begin{cases} \Delta S = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} \\ v = at \quad \text{RICAVO } t \Rightarrow \quad t = \frac{v}{a} \end{cases}$$

NB: POSSO FARLO PERCHÉ CALCOLO $\bar{a}$ MEDIO! L'EFFETTO DELL'ATTRITO DELL'ARIA (CHE CAUSA IL RALLENTAMENTO) NON È COSTANTE E DIPENDE DA v^2

QUI FINGIAMO CHE L'ACCELERAZIONE SIA COSTANTE (O CONSIDERIAMO L'ACC MEDIA) PER SEMPLIFICARCI LA VITA.

- $\Delta S = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{2}\frac{v^2}{\Delta S} = \frac{1}{2}\left(8.3\ \frac{m}{s}\right)^2 \frac{1}{12.5\ m}$

$$= \frac{1}{2}\, 68.89\ \frac{m^{\cancel{2}}}{s^2}\ \frac{1}{12.5\ \cancel{m}} = 2.75\ m/s^2$$

- QUANTO IMPIEGA? ΔS_a ($a \Rightarrow$ accelerando) $= 12.5\ m$

ΔS_c ($c \Rightarrow v = v_{TERM}$) $= 300\ m - 12.5\ m = 287.5\ m$

PER IL PRIMO TRATTO: $\Delta S = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t_a = \sqrt{\frac{2\Delta S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12.5\ \cancel{m}}{2.75\ \cancel{m}}\, s^2} = \sqrt{9.09}\ s = 3.01\ s$

PER IL SECONDO TRATTO: $\Delta S = v_0 t \Rightarrow t_c = \frac{\Delta S}{v_0} = \frac{287.5\ \cancel{m}}{8.3\ \cancel{m}/s} = 34.64\ s$

TOTALE $t = t_a + t_c = (3.01 + 34.64)\ s = 37.65\ s$

- SI! LA VELOCITÀ A CUI ARRIVA AL SUOLO È LA STESSA

P.S. PROBLEMA ISPIRATO DA MARK ROBER:

youtube.com/c/MarkRober

DATE UN OCCHIO AI SUOI VIDEO, SONO FANTASTICI!

7) LA LEGGE ORARIA

IN SECONDI

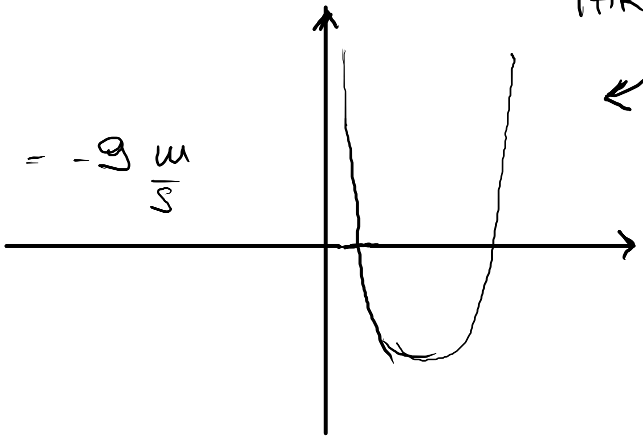
LA LEGGE ORARIA DI UN CORPO È DESCRITTA DA $x = 4 - 12t + 3t^2$

V MEDIA

IN m

1) QUAL È $\bar{v}$ TRA $t = 0\ s$ e $t = 1\ s$?
2) IN QUALE VERSO È LO SPOSTAMENTO A $t = 1\ s$
3) DETERMINARE L'ESPRESSIONE PER $v(t)$ e $a(t)$
4) CI SONO ISTANTI IN CUI LA VELOCITÀ E L'ACCELERAZIONI SONO NULLI?
5) QUAL È IL GRAFICO DELLA LEGGE ORARIA?

PARABOLA



1 $\quad \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(1) - x(0)}{1 - 0} = \frac{x(1) - x(0)}{1\ s} = \frac{-5 - 4}{1} \frac{m}{s} = -9 \frac{m}{s}$

$x(1) = 4\ m - 12\ m + 3\ m = -5\ m$

$x(0) = 4\ m$

2) SI MUOVE VERSO LE X NEGATIVE. PER VEDERLO:

VERSO LA DIREZIONE NEGATIVA

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -12 + 6t \Rightarrow v(1) = -12 + 6 \ m/s = -6 \ \frac{m}{s}$$

3) $v(t) = -12 + 6t \qquad a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = +6$ (COSTANTE)

4) $a \neq 0$ (SEMPRE)

$$v = 0 = \underbrace{-12}_{m/s} + \underbrace{6t}_{m/s^2} \Rightarrow 6t = +12 \qquad \underline{\underline{t = 2\,s}}$$

5) IL GRAFICO È UNA PARABOLA CON CONCAVITÀ POSITIVA E VERTICE IN $(2; -8)$.

8) LA CENTRIFUGA

UNA CENTRIFUGA RUOTA CON UNA FREQUENZA COSTANTE DI 5400 rpm

- PERIODO (S) E FREQ (Hz) (CHIAMO ν LA FREQ)
- VELOCITÀ DI ROTAZIONE SE $R = 0.14$ m (VELOCITÀ TANGENZIALE)
- ACCELERAZIONE TOTALE PER $R = 0.14$ m

- $1 \text{ rpm} = \dfrac{6.28 \text{ rad}}{60 \text{ s}}$ ⟹ 1 GIRO COMPLETO $= 0.1 \dfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega$ (NB: $\omega \neq \nu$)

ALLORA $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{5400 \cancel{\text{rpm}} \cdot \left(0.1 \dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \dfrac{1}{1 \cancel{\text{rpm}}}\right)}{2\pi} = 90 \text{ Hz} = 90 \dfrac{1}{\text{s}}$

$T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{90} \text{ s} = 0.011 \text{ s}$

- $v_T = \omega R = 2\pi \cdot 90 \dfrac{1}{\text{s}} \, 0.14 \text{ m} = 79.13 \text{ m/s}$ (PERPENDICOLARE AL RAGGIO)

- $\vec{a} = \vec{a_c} + \cancel{\vec{a_T}} = \vec{a_c} \Rightarrow |\vec{a_c}| = \dfrac{v_T^2}{R} = \omega^2 R = \dfrac{(79.13 \text{ m/s})^2}{0.14 \text{ m}} = 4.5 \times 10^4 \text{ m/s}^2$

NULLA!

9) MOTO ARMONICO

- DETERMINARE A e φ se PER $t=0$ $x=\sqrt{3}/2$ m $v=1/2$ m/s (PULSAZIONE: $\omega=\frac{1}{3}\frac{rad}{s}$)

- QUALE VELOCITÀ E ACCELERAZIONE HA UN PUNTO CHE SI MUOVE CON QUELLA LEGGE ORARIA A $t=1$ s?

LEGGE ORARIA DEL MOTO:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad v(t)=\frac{dx}{dt}=-A\sin(\omega t+\varphi)\omega$$

IMPONGO LE CONDIZIONI INIZIALI E OTTENGO:

$$\left.\begin{aligned} x(0)&=A\cos(\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ v(0)&=-A\omega\sin(\varphi)=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

DIVIDO UNA PER L'ALTRA:

$$\hookrightarrow -\frac{\cancel{A}\omega\sin\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi}=\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}$$

OSSIA CHE $\quad tg(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\omega = -\frac{1}{\sqrt{3}}3 = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -60° = -\frac{\pi}{3}$

ALLORA $\quad A\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

NB: TUTTI I $\varphi = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ FUNZIONANO, CON k INTERO

$$A\,\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \sqrt{3}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

$$x(t) = \sqrt{3}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v(t) = -\sqrt{3}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\omega$$

$$a(t) = -\sqrt{3}\,\omega^2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v(1) = -\sqrt{3}\sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)\omega$$

$$v(2) = -\omega^2\sqrt{3}\cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)$$

$t = 1\,s$