Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

LIMITI DI FUNZIONI $R^n \rightarrow R^m$

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x,y)$$

FUNZIONI $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ E LORO LIMITI

Def: $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è limitata $\Leftrightarrow$ $f(E)$ è un insieme limitato in $\mathbb{R}^m$

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è limitata superiormente/inferiormente

$\Leftrightarrow$ $f(E)$ è un insieme limitato superiormente/inferiormente in $\mathbb{R}$.

$f(E)$ LIMITATO $\Leftrightarrow$
$\exists\, B(0,r) : f(E) \subseteq B(0,r)$

CASO $m=1$: $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def: $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per E, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\} \Leftrightarrow \forall\, V_\ell$ intorno di ℓ $\exists\, U_{x_0}$ intorno di x_0:

$\forall x \in U_{x_0} \cap E - \{x_0\} \quad f(x) \in V_\ell$

Usando la norma in $\mathbb{R}^n$, si possono dare delle definizioni equivalenti:

- Se $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E$ tale che $0 < \|x - x_0\| < \delta$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$
- Se $\ell = +\infty$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall k > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E$ tale che $0 < \|x - x_0\| < \delta$ si ha $f(x) > k$

e analoghe definizioni per i casi $\ell = -\infty$ e $\ell = \infty$

$$\boxed{B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}}$$

Si può considerare anche il caso in cui $x_0 = \infty$ è di accumulazione per E. La definizione sarà allora, nel caso $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k > 0 : \forall x \in E \text{ tale che } \|x\| > k \text{ si ha } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Analoghe definizioni si danno nel caso $\ell \in \{+\infty, -\infty, \infty\}$.

Esempio: Proviamo con la definizione che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\|x\|} = 0$, dove $\|x\|$ è la norma di x in $\mathbb{R}^n$.

Dobbiamo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k > 0 : x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ (0 vettore nullo in $\mathbb{R}^n$),

$$\|x\| > k \Rightarrow \left|\frac{1}{\|x\|}\right| = \frac{1}{\|x\|} < \varepsilon.$$

Basta porre $k = \frac{1}{\varepsilon}$, poiché $\|x\| > \frac{1}{\varepsilon} = k \iff \varepsilon > \frac{1}{\|x\|}$

CASO GENERALE: $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \in E \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$$

Restano quindi definite m funzioni

$$f_i : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

tali che

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad \forall x \in E$$

Def: Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, x_0 di accumulazione per E, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall V_\ell$ intorno di ℓ $\exists U_{x_0}$ intorno di x_0 tale che

$\forall x \in E \cap U_{x_0} - \{x_0\}$ si ha $f(x) \in V_\ell$

Usando le norme in $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ si ha

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in E$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta$

si ha $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

Il caso $x_0 = \infty$ è analogo a quello con $m = 1$ già visto.

Nel caso in cui $\ell = \infty$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall k > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta$ si ha $\|f(x)\| > k$

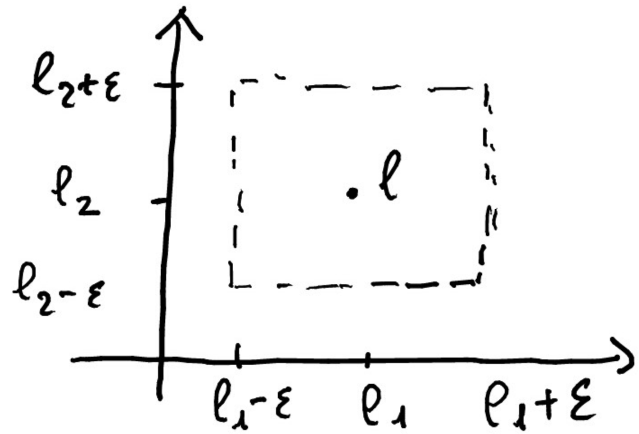
e analogamente anche il caso in cui $x_0 = \infty$.

Proposizione

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, x_0 di accumulazione per E ...

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Per dimostrare questa Proposizione è sufficiente applicare la definizione di limite usando come intorni di ℓ prodotti cartesiani di intervalli centrati sulle componenti ℓ_i: $\displaystyle\mathop{\times}_{i=1}^{m}]\ell_i - \varepsilon, \ell_i + \varepsilon[$



Restano validi per funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, opportunamente adattati, molti importanti teoremi validi per funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tra cui:

1) UNICITÀ DEL LIMITE

2) PERMANENZA DEL SEGNO (per $m=1$)

3) CONFRONTO (per $m=1$)

4) OPERAZIONI ALGEBRICHE

5) LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

6) LIMITE DELLE RESTRIZIONI

Esercizi

1) Dimostrare che $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{x_1}{\|x\|}$, con $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Risoluzione: Consideriamo gli insiemi

$$F_1=\{(x_1,0): x_1>0\},\quad F_2=\{(x_1,0): x_1<0\}$$

$(0,0)$ è di accumulazione per entrambi

IMPORTANTE: DEVO POTER CALCOLARE I LIMITI DELLE RESTRIZIONI

$$\frac{x_1}{\|x\|}\Big|_{F_1}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2}}=\frac{x_1}{x_1}=1 \qquad \frac{x_1}{\|x\|}\Big|_{F_2}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2}}=\frac{x_1}{-x_1}=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x_1}{\|x\|}\Big|_{F_1}=1\neq -1=\lim_{x\to 0}\frac{x_1}{\|x\|}\Big|_{F_2}$$

$\Rightarrow$ Il limite non esiste.