Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

ESERCIZI SU LIMITI DI FUNZIONI $R^n \to R$

PARTE 1

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

2) Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

<u>Risoluzione</u>: Osserviamo che la funzione è definita su $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e si ha:

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = x \frac{x^2}{x^2+y^2} \quad \text{con} \quad 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

Infatti $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \iff x^2 \leq x^2+y^2 \iff y^2 \geq 0$ VERA

mentre $0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}$ è ovvia.

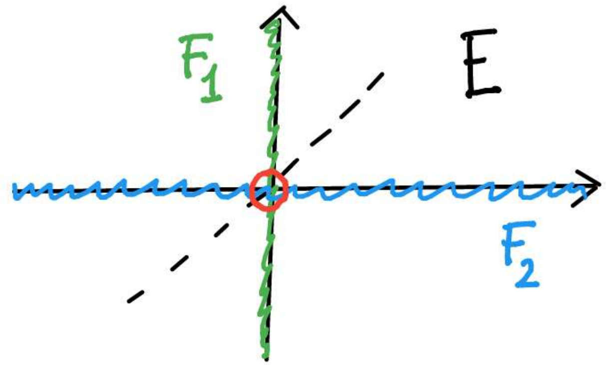
Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ (per continuità... si vedrà in seguito)

e $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ limitata $\Rightarrow$ per un teorema valido anche nel caso $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si ha $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$.

3) Dimostrare che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$.

<u>Risoluzione</u>: Restringiamo la funzione $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ alle rette $x=0$ e $y=0$, cioè a $F_1 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \cap E$ e $F_2 = \{(x,0) ; x \in \mathbb{R}\} \cap E$, dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ è il dominio di f.

$(0,0)$ è di accumulazione per F_1 e F_2



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{x=0}(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-y} = -1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{y=0}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$$

UNA TECNICA PER DIMOSTRARE CHE UN LIMITE NON ESISTE

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F \subseteq E$, x_0 punto di accumulazione per F. Allora

Quindi anche per E

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \implies \lim_{x \to x_0} f_{|F}(x) = \ell$$

Quindi, per dimostrare che $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$ si può cercare di soddisfare una delle seguenti due condizioni:

a) $F \subseteq E$, x_0 punto di accumulazione per F,

$$\nexists \lim_{x \to x_0} f_{|F}(x) \implies \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

b) $F_1, F_2 \subseteq E$, x_0 punto di accumulazione per F_1, F_2

$$\lim_{x \to x_0} f_{|F_1}(x) \neq \lim_{x \to x_0} f_{|F_2}(x) \implies \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

ESERCIZI SU LIMITI DI FUNZIONI $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

NB: pur non avendo introdotto ancora il concetto di continuità per funzioni da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, useremo il fatto che i polinomi sono continui e valgono, opportunamente adattati, gli usuali teoremi per funzioni continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_{y=x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\neq \qquad \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_{y=-x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ $\qquad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

Idea: restringo a $x=0$ e $y=0$

$\Rightarrow f|_{x=0}(x,y) = 0$ e $f(x,y) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f|_{x=0}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f|_{y}(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ non posso concludere

Considero le rette per l'origine: $y = kx$

$$f|_{y=kx}(x,y) = \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \frac{kx}{x^2+k^2}$$

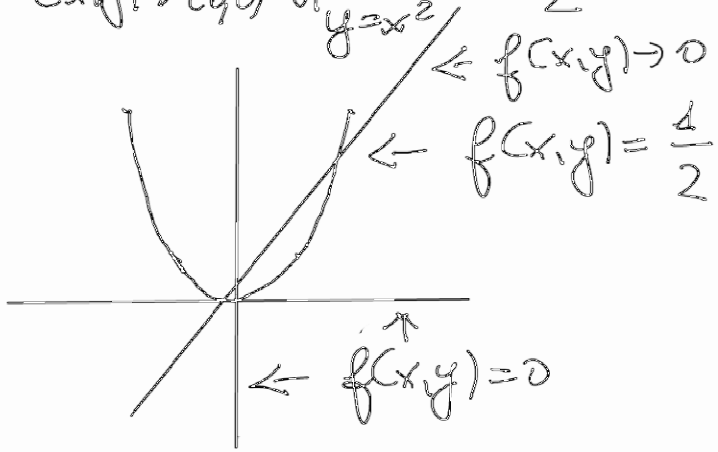
$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f|_{y=kx}(x,y) = 0 \Rightarrow$ non posso concludere

NONOSTANTE LE RETTE PER L'ORIGINE RICOPRANO TUTTO IL DOMINIO, NON POSSO CONCLUDERE!

$$f|_{y=x^2}(x,y) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)|_{y=x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$



c) Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $0<\lambda<1<\mu$ e sia

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<\mu x<1,\ \lambda x<y<\mu x\}$$

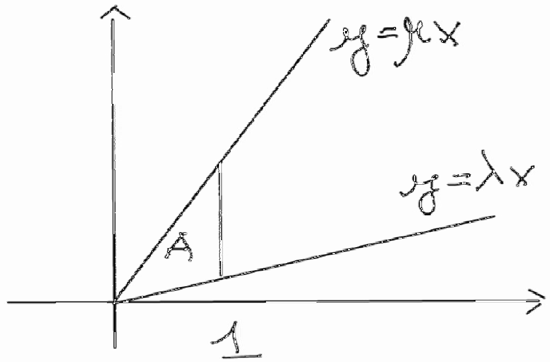
$$f(x,y)=\frac{\log x}{\log y} \qquad f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

Quindi $x>0$ e $\lambda x<y<\mu x<1$

$\mu>1$ e $\mu x<1$ $\Rightarrow$ $x<1$

Dimostrare che: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$

Si ha: $$\boxed{\frac{\log x}{\log(\mu x)} < \frac{\log x}{\log y} < \frac{\log x}{\log(\lambda x)}}$$ su A



Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

ESERCIZI SU LIMITI DI FUNZIONI $R^n \rightarrow R$

PARTE 2

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} g(x,y)$$

c) Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $0 < \lambda < 1 < \mu$ e sia

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \mu x < 1,\ \lambda x < y < \mu x\}$$

$$f(x,y) = \frac{\log x}{\log y} \qquad f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

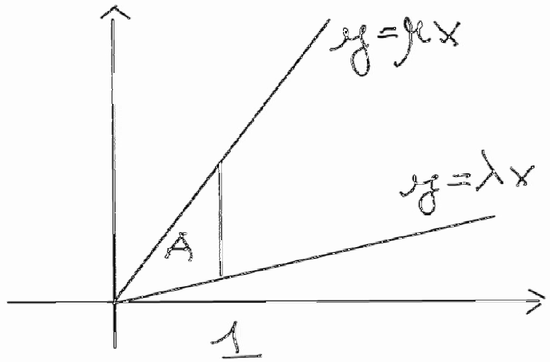
Quindi $x > 0$ e
$\lambda x < y < \mu x < 1$

Dimostrare che: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

$\mu > 1$ e $\mu x < 1$
$\Rightarrow \ x < 1$

Si ha:

$$\boxed{\frac{\log x}{\log(\lambda x)} < \frac{\log x}{\log y} < \frac{\log x}{\log(\mu x)}} \quad \text{su } A$$



Infatti $\lambda x < y < \mu x \Rightarrow \log(\lambda x) < \log(y) < \log(\mu x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log(\mu x)} < \frac{1}{\log(y)} < \frac{1}{\log(\lambda x)}$$

Ma $x < 1$, quindi $\log x < 0$ e si ha

$$\frac{\log x}{\log(\lambda x)} < \frac{\log x}{\log(y)} < \frac{\log x}{\log(\mu x)}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$? \qquad\qquad\qquad ?$$

Idea: TEOREMA DEL CONFRONTO

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log x}{\log(\varrho x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\log(\varrho x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\varrho}{\varrho x}} = 1$$

Analogamente $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log x}{\log(\lambda x)} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log x}{\log y} = 1$$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO

Bernoulli e il patto col diavolo

Guillaume François A. De L'Hôpital, 1661 - 1704

L'occasione per parlare di uno dei più curiosi episodi della storia della matematica è il trecentesimo anniversario della morte di Guillaume François Antoine de L'Hôpital, marchese di Sainte-Mesme e conte d'Entremont, nato a Parigi nel 1661, dove morì nel 1704. Rampollo di nobile famiglia, ufficiale di cavalleria, fu costretto a lasciare l'esercito a causa di una forte miopia, e in seguito si dedicò completamente alla matematica, un interesse che comunque coltivava da tempo, a quindici anni infatti aveva già risolto diversi problemi che erano stati proposti da Pascal.
A Parigi, L'Hopital frequentava l'ambiente scientifico e al circolo del filosofo Nicolas Malebranche, nel 1691, ebbe occasione di conoscere Jean Bernoulli, l'altro protagonista della nostra storia, membro della più celebre stirpe matematica. La famiglia Bernoulli, tra il Seicento e l'Ottocento, ha dato almeno una dozzina di matematici di chiara fama e, arrivando fino ai giorni nostri, sono almeno centoventi i Bernoulli che hanno lasciato una traccia più o meno importante nella matematica. Jean Bernoulli, all'epoca del suo primo viaggio parigino, aveva soltanto venticinque anni ed era uno studente di medicina, ma si era già fatto conoscere nell'ambiente matematico con alcuni lavori sui nuovi metodi dell'analisi matematica.

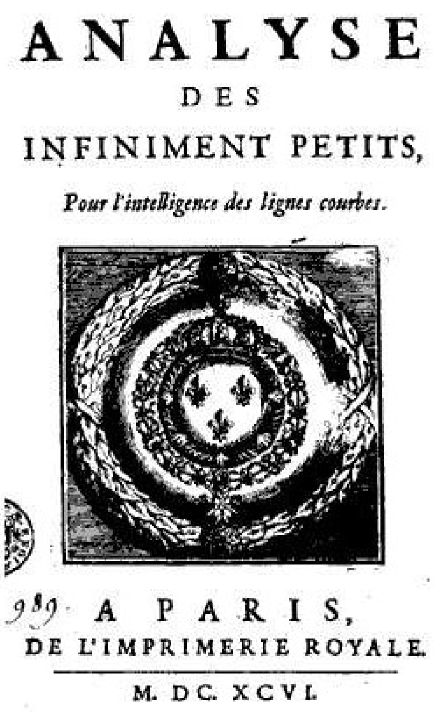
Siamo alla fine del XVII secolo, quello che viene considerata l'età dell'oro della matematica, il secolo più entusiasmante. Con Newton e Leibniz protagonisti di una rivoluzione che nella matematica, possiamo dire, ha avuto la stessa importanza che ebbero nella società l'invenzione della ruota o della stampa: l'analisi matematica, "un insieme di metodi – così lo descrive Keith Devlin nel suo bel libro *Il linguaggio della*

Siamo alla fine del XVII secolo, quello che viene considerata l'età dell'oro della matematica, il secolo più entusiasmante. Con Newton e Leibniz protagonisti di una rivoluzione che nella matematica, possiamo dire, ha avuto la stessa importanza che ebbero nella società l'invenzione della ruota o della stampa: l'analisi matematica, "un insieme di metodi – così lo descrive Keith Devlin nel suo bel libro *Il linguaggio della matematica* – per descrivere e trattare gli schemi dell'infinito: l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo [...] Usando l'analisi comprendiamo degli schemi del movimento e del cambiamento che sicuramente corrispondono al movimento che osserviamo nel mondo, ma, in quanto schemi dell'infinito, esistono solo dentro al nostro cervello. Sono schemi che noi esseri umani abbiamo sviluppato per cercare di comprendere il nostro mondo".

Jean Bernoulli, 1667 – 1748.

Nel 1684 Leibniz pubblica *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, un lavoro che viene tradizionalmente considerato l'atto di nascita del calcolo infinitesimale.
Alcuni anni prima Newton aveva elaborato un suo metodo di calcolo, simile a quello di Leibniz, ma pubblicato soltanto nel 1711. Ne nacque una celebre polemica sulla primogenitura della scoperta, che coinvolse non solo i due matematici, ma le due nazioni di appartenenza, Inghilterra e Germania, che volevano attribuirsi la paternità della grande scoperta.
Il clima matematico dell'epoca era eccezionalmente vivace, ricordiamo almeno Fermat e i suoi lavori sulla teoria dei numeri. De L'Hopital era affascinato dalla nuova matematica ed era un matematico di ottimo livello, che aveva a suo merito, fra l'altro, la soluzione del problema della brachistocrona. Un problema che era stato posto da Jean Bernoulli e risolto separatamente dallo stesso Bernoulli, da Newton, Leibniz e L'Hopital.

Per *brachistocrona* si intende la curva che unisce due punti A tutti i problemi che De L'Hopital gli avrebbe sottoposto, a non rivelare a nessuno le sue scoperte e non parlare con nessuno del loro accordo.



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
Pour l'intelligence des lignes courbes.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.

Il frontespizio del testo di calcolo differenziale scritto da De L'Hopital.

De L'Hopital pubblicò nel 1696 il primo testo di calcolo differenziale, un libro la cui influenza dominò praticamente tutto il Settecento, l'*Analyse des infiniment petits. Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696). Nell'introduzione al libro L'Hôpital riconosceva i suoi debiti nei confronti di Leibniz, Jacob Bernoulli e Johann Bernoulli ma affermava che si basava unicamente sulle sue idee. In realtà riprendeva almeno in parte alcuni teoremi scoperti da Bernoulli, in particolare un teorema molto importante scoperto da Bernoulli nel 1694, che porta a quella che è nota come la regola di L'Hopital: "Il limite del rapporto di due funzioni entrambe infinitesime o infinitamente grandi, per uno stesso valore della variabile, è uguale al limite del rapporto delle derivate delle funzioni per il medesimo valore della variabile, nell'ipotesi che quest'ultimo esista". E' un libro di una chiarezza esemplare e ancora oggi potrebbe essere presentato agli studenti come introduzione all'analisi. Risalire alle radici storiche delle idee matematiche è molto più utile che presentare una serie infinita e ripetitiva di esercizi tutti uguali, senza alcuna giustificazione, quali si trovano nella maggior parte dei libri di testo in adozione nei corsi di Analisi universitari.

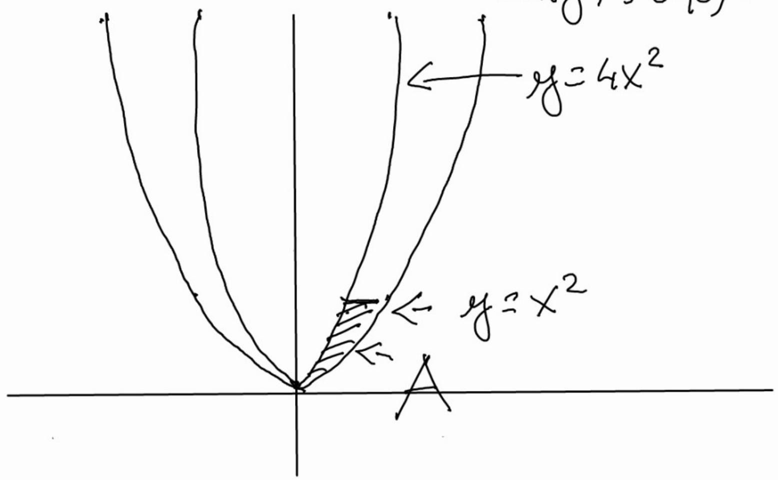
Aggiungiamo ancora che dopo la morte del marchese (ma solo dopo la sua morte) avvenuta nel 1704, Bernoulli accusò L'Hopital di plagio. La fama e il prestigio del marchese rimasero però immutati, tanto che ancora oggi, se apriamo un qualsiasi testo di analisi, ritroviamo un capitolo intitolato "I teoremi di L'Hopital". Bernoulli non pubblicò mai il suo manuale di calcolo differenziale e soltanto dopo duecentocinquanta anni, nel 1950, quando venne pubblicata la corrispondenza fra Bernoulli e L'Hopital si poté avere la conferma che gran parte del lavoro di L'Hopital era dovuto ai risultati di Bernoulli.

Federico Peiretti
da LA STAMPA 10/05/04

d) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1 ,\ \frac{\sqrt{y}}{2} < x < \sqrt{y} \}$

$f(x,y) = \frac{x}{x+y} \qquad f: A \to \mathbb{R}$

Dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$



$x = \sqrt{y} \iff y = x^2$ con $x \geq 0$

$x = \frac{\sqrt{y}}{2} \iff y = 4x^2$ con $x \geq 0$

Si ha, per $(x,y) \in A$: $\quad x+y > y + \frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{2y+\sqrt{y}}{2}$

$$\Rightarrow \left| f(x,y) - 1 \right| = \left| \frac{x}{x+y} - 1 \right| = \left| \frac{x-x-y}{x+y} \right| = \frac{y}{x+y} <$$

$$< \frac{2y}{2y+\sqrt{y}} = \frac{2y}{\sqrt{y}(2\sqrt{y}+1)} = \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}+1} \longrightarrow 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in A : 0 < \|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| < \delta$

$$\left| f(x,y) - 1 \right| < \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}+1} = \left| \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}+1} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

Nella parte finale si può anche ragionare come segue

$$|f(x,y)-1| < \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}+1} \iff -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}+1} < f(x,y)-1 < \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}+1}$$

$$\iff \underbrace{\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{1} - \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}+1}}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} < f(x,y) < \underbrace{\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}+1}} + \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{1}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} \Rightarrow$$

SCATTA IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$f(x,y) \to 1$$

e) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ $\quad f:]0,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Dimostrare che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Restringo a $y=\lambda x$ con $\lambda > 0$

$$f|_{y=\lambda x}(x,y) = \frac{x(1-\lambda)}{x^3(1+\lambda)^3} = \frac{1-\lambda}{(1+\lambda)^3} \cdot \frac{1}{x^2} \quad (\lambda \neq -1)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{y=\lambda x}(x,y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\lambda<1 \\ 0 & \text{se } \lambda=1 \\ -\infty & \text{se } \lambda>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$