Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CONTINUITA' DI FUNZIONI $R^n \rightarrow R^m$

Parte prima

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

FUNZIONI CONTINUE $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

<u>Def.:</u> $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad x_0 \in E$

f CONTINUA in $x_0 \iff \forall\, V_{f(x_0)}$ intorno di $f(x_0)$ $\exists\, U_{x_0}$ intorno di x_0

tale che $f(x) \in V_{f(x_0)}$ $\forall x \in U_{x_0} \cap E$

(cioè $f(U_{x_0} \cap E) \subseteq V_{f(x_0)}$)

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E$ tale che $\|x - x_0\| < \delta$ si ha $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

f continua in E

$\iff f$ continua in x $\forall x \in E$.

USANDO LA NORMA

IN $\mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}^m$

Valgono, oppurtanamente adattati, per le funzioni continue $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, gli analoghi dei seguenti teoremi per funzioni continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

1) Teoremi relativi a operazioni algebriche
2) Teorema della funzione composta
3) Legame tra continuità e limite
4) Teorema di permanenza del segno $(m=1)$

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ con $f_i : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\forall i = 1, \dots, m$

Proposizione

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua in $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \Leftrightarrow f_i$ continua in $\overline{x}$ $\forall i = 1, \dots, m$

Proposizione

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\overline{x} \in E$

f è continua in $\overline{x} \Leftrightarrow \forall (x_n)_n : x_n \in E \; \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n) = f(\overline{x})$$

Def.: Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, U_{x_0} intorno di x_0

$\Rightarrow$ $U_{x_0} \cap E$ è un INTORNO DI x_0 NELLA TOPOLOGIA INDOTTA DI E

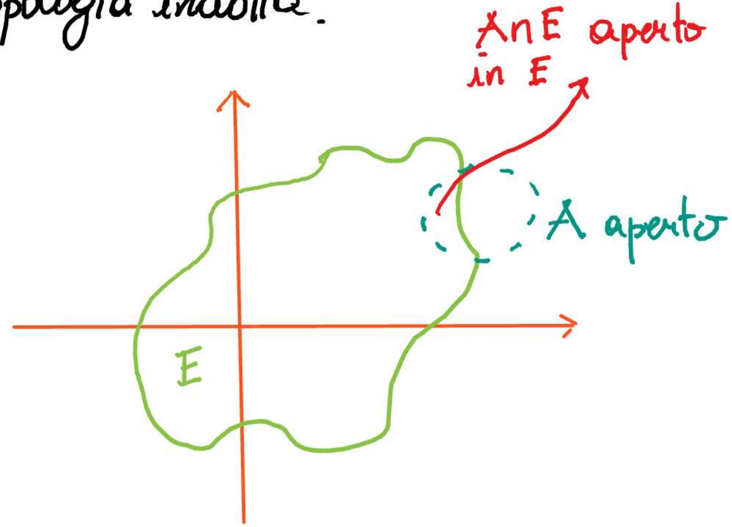
(in seguito diremo "intorno di x_0 in E")

Da questa definizione seguono ulteriori definizioni nella topologia indotta.

Ad esempio, nella topologia indotta in E si ha

APERTO IN E: $A \cap E$ con A aperto in $\mathbb{R}^n$

CHIUSO IN E: $C \cap E$ con C chiuso in $\mathbb{R}^n$



Proposizione

$A \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad$ A aperto in $E \iff \forall x_0 \in A \; \exists U_{x_0}$ intorno di x_0 in $\mathbb{R}^n$: $U_{x_0} \cap E \subseteq A$

$\iff \forall x_0 \in A \; \exists V_{x_0}$ intorno di x_0 in E : $V_{x_0} \subseteq A$

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $x_0 \in A = F \cap E$ con F aperto in $\mathbb{R}^n$

$x_0 \in F \Rightarrow \exists \; U_{x_0}$ intorno in $\mathbb{R}^n$: $U_{x_0} \subseteq F$

$\Rightarrow V_{x_0} = U_{x_0} \cap E \subseteq F \cap E = A$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall x_0 \in A \ \exists U_{x_0}$ intorno di x_0 in $\mathbb{R}^n$: $U_{x_0} \cap E \subseteq A$

Si noti che non è restrittivo considerare U_{x_0} intorno aperto $\forall x_0 \in A$

(altrimenti si prenda $B(x_0, r) \subseteq U_{x_0}$, per cui $B(x_0, r) \cap E \subseteq U_{x_0} \cap E \subseteq A$)

$$\Rightarrow A = \bigcup_{x_0 \in A} (U_{x_0} \cap E) = \Big(\bigcup_{x_0 \in A} U_{x_0}\Big) \cap E = F \cap E \quad \text{con } F = \bigcup_{x_0 \in A} U_{x_0} \text{ aperto in } \mathbb{R}^n$$

perché unione di aperti in $\mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua $\Leftrightarrow$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto $f^{-1}(A)$ è aperto in E

Ricordiamo che

a) $A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto $\Leftrightarrow$ $\forall y_0 \in A$ $\exists V_{y_0}$ intorno di y_0 tale che $V_{y_0} \subseteq A$

b) $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}$ CONTROIMMAGINE DI A

c) $f^{-1}(A)$ aperto in E $\Leftrightarrow$ $\exists$ F aperto in $\mathbb{R}^n$: $f^{-1}(A) = F \cap E$

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ Sia A aperto in $\mathbb{R}^m$.

Se $f^{-1}(A) = \emptyset = \emptyset \cap E$, allora $f^{-1}(A)$ aperto in E poiché $\emptyset$ aperto in $\mathbb{R}^n$

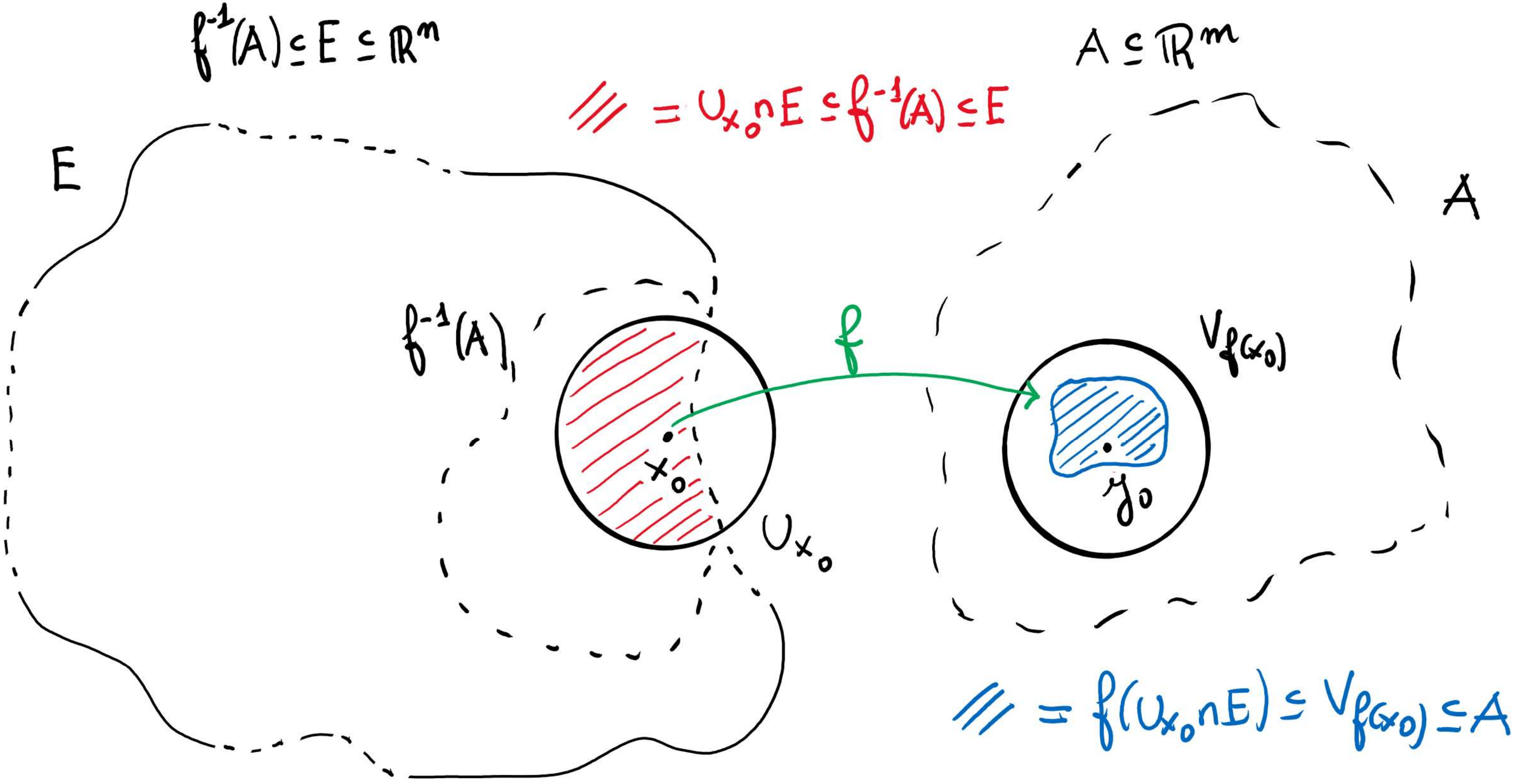
Sia $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ e $x_0 \in f^{-1}(A)$

$\Rightarrow y_0 = f(x_0) \in A$ aperto in $\mathbb{R}^m \Rightarrow \exists\, V_{f(x_0)}$ intorno di $f(x_0)$: $V_{f(x_0)} \subseteq A$

f continua $\Rightarrow \exists\, U_{x_0}$ intorno di x_0: $\forall x \in U_{x_0} \cap E$ si ha $f(x) \in V_{f(x_0)}$, cioè

$$f(U_{x_0} \cap E) \subseteq V_{f(x_0)} \subseteq A$$

$\Rightarrow U_{x_0} \cap E \subseteq f^{-1}(A) \Rightarrow \forall x_0 \in f^{-1}(A)\ \exists\, V_{x_0} = U_{x_0} \cap E$ intorno di x_0 in E: $V_{x_0} \subseteq f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ aperto in E.



$f^{-1}(A) \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$
$A \subseteq \mathbb{R}^m$
/// $= U_{x_0} \cap E \subseteq f^{-1}(A) \subseteq E$
E
A
$f^{-1}(A)$
f
$V_{f(x_0)}$
x_0
y_0
U_{x_0}
/// $= f(U_{x_0} \cap E) \subseteq V_{f(x_0)} \subseteq A$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $x_0 \in E$ e dimostriamo che f è continua in x_0, cioè che

$$\forall V_{f(x_0)} \text{ intorno di } f(x_0) \ \exists U_{x_0} \text{ intorno di } x_0 : f(U_{x_0} \cap E) \subseteq V_{f(x_0)}$$

Sia $V_{f(x_0)}$ intorno di $f(x_0)$ e $B(f(x_0), r) \subseteq V_{f(x_0)}$

Poiché $B(f(x_0), r)$ è aperto, si ha $f^{-1}(B(f(x_0), r))$ aperto in E

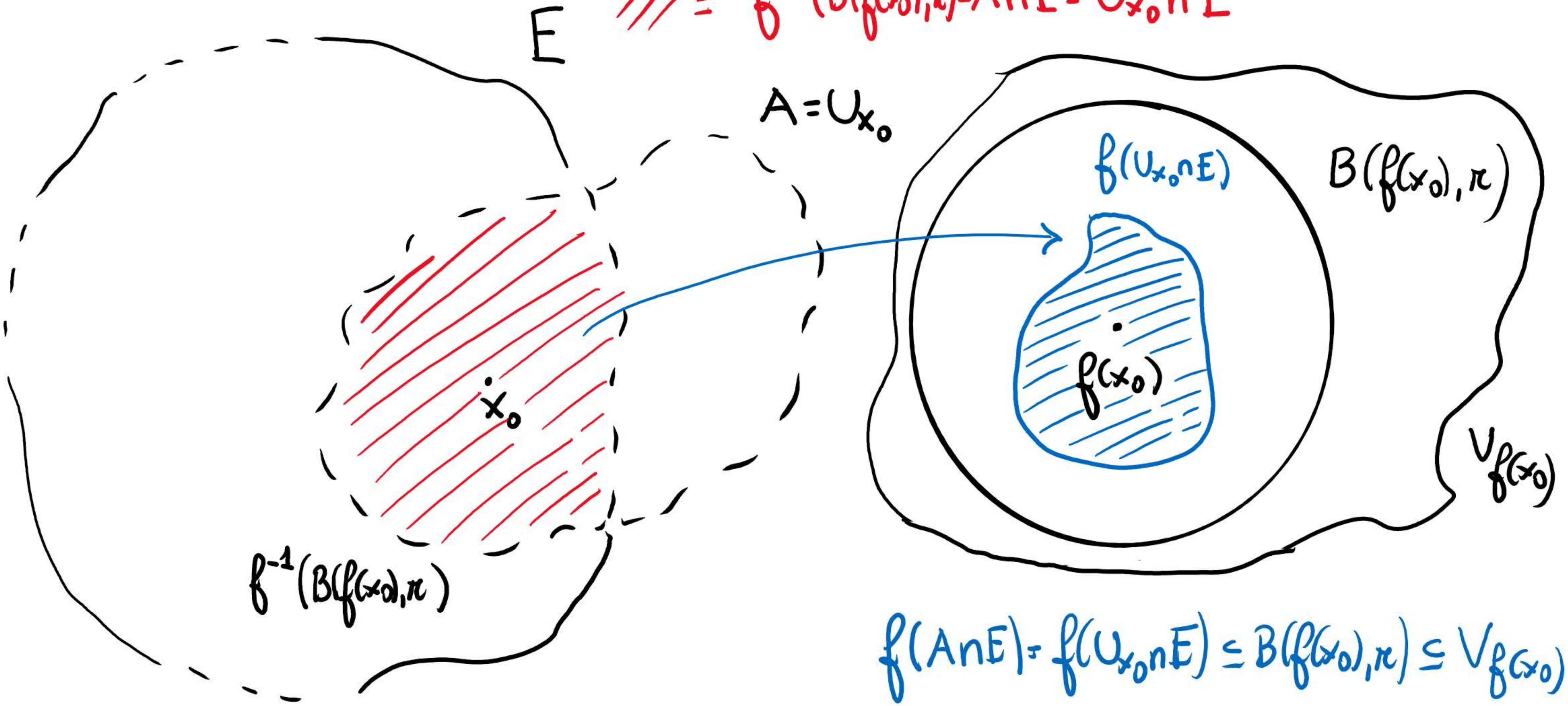
$\Rightarrow \exists A$ aperto in $\mathbb{R}^n$: $A \cap E = f^{-1}(B(f(x_0), r))$

$f(x_0) \in B(f(x_0), r) \Rightarrow x_0 \in A \cap E \Rightarrow x_0 \in U_{x_0} = A$ aperto e dunque intorno di x_0

$\forall x \in U_{x_0} \cap E = A \cap E$, $f(x) \in B(f(x_0), r) \subseteq V_{f(x_0)}$

$\Rightarrow f(U_{x_0} \cap E) \subseteq V_{f(x_0)} \Rightarrow f$ continua in x_0 $\square$

$/// = f^{-1}(B(f(x_0), r)) = A \cap E = U_{x_0} \cap E$



$f(A \cap E) = f(U_{x_0} \cap E) \subseteq B(f(x_0), r) \subseteq V_{f(x_0)}$

Corollario

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua $\Leftrightarrow$ $\forall C$ chiuso in $\mathbb{R}^m$ $f^{-1}(C)$ è chiuso in E.

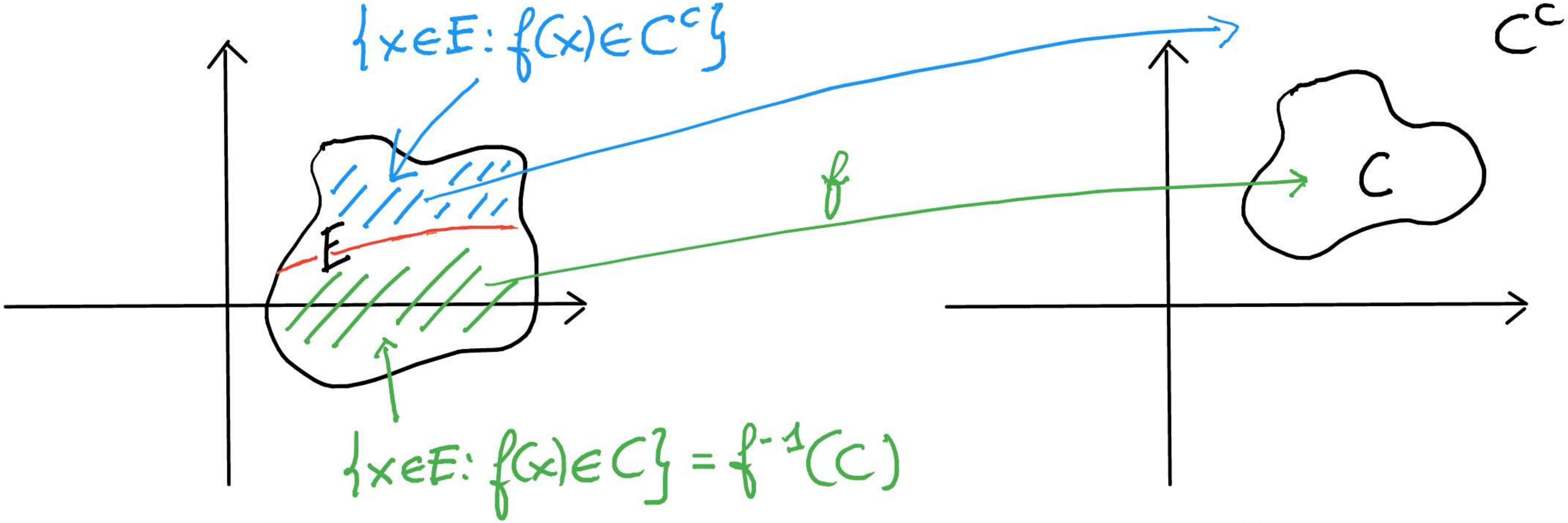
Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ Sia C chiuso in $\mathbb{R}^m$. Si vuole dimostrare che

$f^{-1}(C) = E \cap F$ con F chiuso in $\mathbb{R}^n$.

Si ha $f^{-1}(C) = \{x \in E \mid f(x) \in C^c\}^c \cap E$. Infatti

$$f^{-1}(C) = \{x \in E \mid f(x) \in C\} = \left(E^c \cup \{x \in E \mid f(x) \in C\}\right) \cap E =$$

$$= \{x \in E \mid f(x) \notin C\}^c \cap E = \{x \in E \mid f(x) \in C^c\}^c \cap E = *$$



$$\boxed{f^{-1}(C) = \{x\in E : f(x)\in C^c\}^c \cap E}$$

Poiché C^c è aperto, per la Proposizione precedente si ha

$$f^{-1}(C^c) = \{x \in E \mid f(x) \in C^c\} = A \cap E \text{ con } A \text{ aperto in } \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow f^{-1}(C) = \ldots = \{x \in E \mid f(x) \in C^c\}^c \cap E = (A \cap E)^c \cap E =$$

$$= (A^c \cup E^c) \cap E = A^c \cap E \quad \text{con } A^c \text{ chiuso}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Usando la Proposizione precedente, basta dimostrare che

$$\forall F \text{ aperto in } \mathbb{R}^m \quad f^{-1}(F) = A \cap E \text{ con } A \text{ aperto in } \mathbb{R}^n$$

Sia F aperto in $\mathbb{R}^m$. Si ha allora:

$$f^{-1}(F) = \{x \in E \mid f(x) \in F\} = \left(E^c \cup \{x \in E \mid f(x) \in F\}\right) \cap E =$$

$$= \{x \in E \mid f(x) \notin F\}^c \cap E = \{x \in E \mid f(x) \in F^c\}^c \cap E = *$$

F^c chiuso $\Rightarrow \{x \in E \mid f(x) \in F^c\} = f^{-1}(F^c) = C \cap E$ con C chiuso in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow * = (C \cap E)^c \cap E = (C^c \cup E^c) \cap E = C^c \cap E$ con $A = C^c$ aperto in $\mathbb{R}^n$

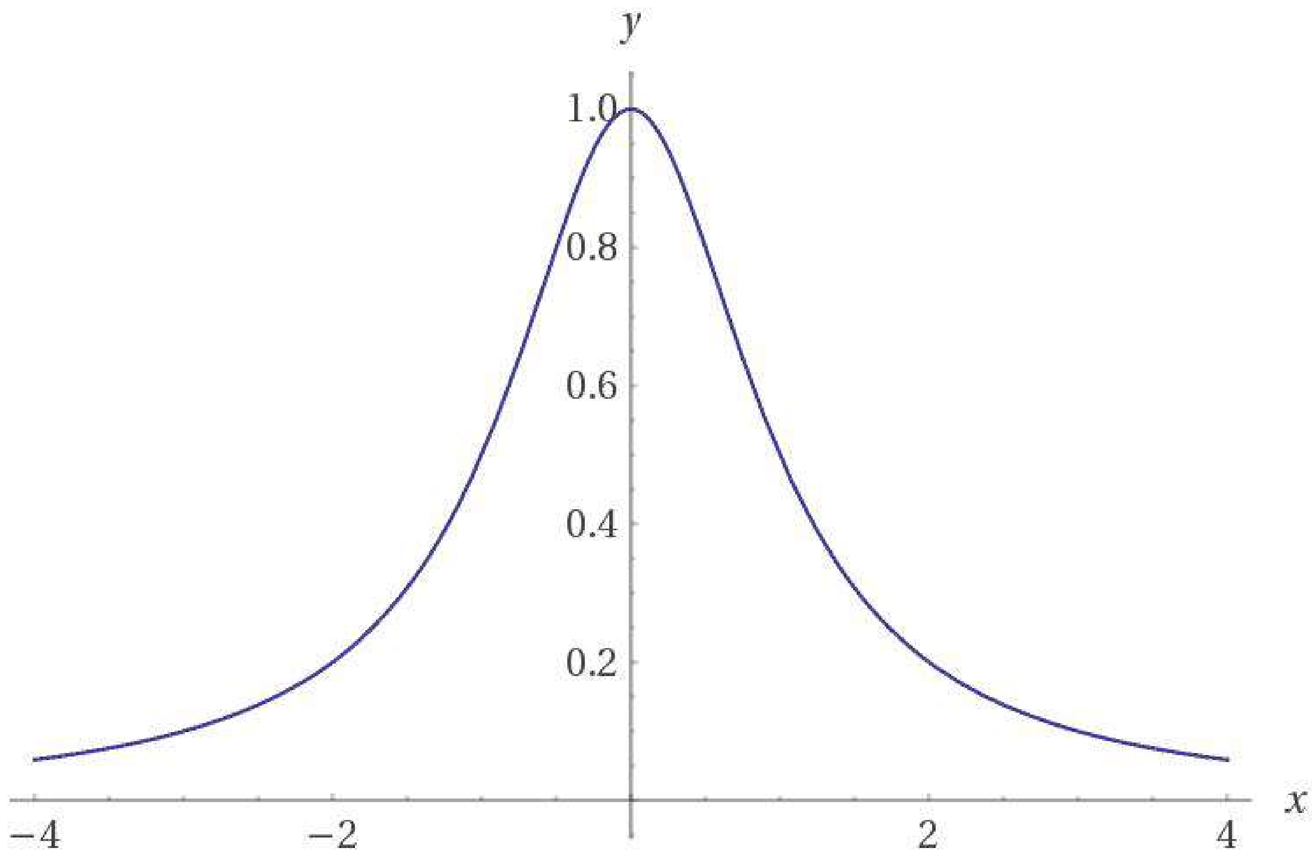
$\square$

Si noti che una funzione continua non trasforma necessariamente aperti (chiusi) in aperti (chiusi). Ad esempio

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f(\mathbb{R}) =]0,1] \qquad f \text{ continua}$$

$\mathbb{R}$ aperto e chiuso ma $]0,1]$ né aperto né chiuso.

Invece, ad esempio, $f^{-1}(]0,1[) = \mathbb{R} - \{0\}$ è aperto perché controimmagine di $]0,1[$ aperto.



(x from −4 to 4)

plot 1/(1+x^2) | Computed by Wolfram|Alpha

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CONTINUITA' DI FUNZIONI $R^n \rightarrow R^m$

Parte seconda

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Esempi

a) Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua. Allora, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in E \mid f(x) > a\} = f^{-1}(]a, +\infty[)$$
$$\{x \in E \mid f(x) < a\} = f^{-1}(]-\infty, a[)$$

SONO APERTI IN E

$$\{x \in E \mid f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty[)$$
$$\{x \in E \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}(]-\infty, a])$$

SONO CHIUSI IN E

perché $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ sono aperti in $\mathbb{R}$ e $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ sono chiusi in $\mathbb{R}$.

NB: anticipiamo che i polinomi sono continui

b) $f(x,y)=\dfrac{1}{\log(x+y)}$ $\quad F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>0,\ x+y\neq 1\}$ $\quad f: F \longrightarrow \mathbb{R}$

F è aperto perché $g(x,y)=x+y$ è continua e si ha

$$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>0\} \cap \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}^c =$$

$$= g^{-1}(]0,+\infty[) \cap \{g^{-1}(\{1\})\}^c$$

con $]0,+\infty[$ aperto e $\{1\}$ chiuso

$\Rightarrow g^{-1}(]0,+\infty[)$ è aperto, $g^{-1}(\{1\})^c$ aperto (complementare di chiuso)

e F risulta intersezione di due aperti, quindi aperto.

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\quad f: F \longrightarrow \mathbb{R}$

Posto $g_1(x,y) = x^2 - y$, $g_2(x,y) = x^2 + y^2$ continue, si ha

$F = g_1^{-1}([0,+\infty[) \cap g_2^{-1}(]-\infty,1])$ intersezione di due chiusi

$\Rightarrow$ F è chiuso

d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ l'equazione $f(x,y) = 0$ rappresenta l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ che risulta chiuso.

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = 1$ circonferenza $\Rightarrow$ è un insieme chiuso

Ricordiamo la caratterizzazione della continuità tramite successioni

<u>Teorema</u> (Caratterizzazione della continuità di funzioni tramite successioni)

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in E$

f continua in x_0

$\Longleftrightarrow$ $\forall (x_n)_n \subseteq E$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Teorema

$f: K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua, K compatto $\Rightarrow f(K)$ compatto

Dim: Dimostriamo che $f(K)$ è compatto per successioni

Sia $(y_k)_k$ successione in $f(K) \Rightarrow \exists (x_k)_k$ successione in K: $f(x_k) = y_k \ \forall k \in \mathbb{N}$

K compatto $\Leftrightarrow K$ compatto per successioni $\Rightarrow \exists (x_{h_k})_k$ sottosuccessione di $(x_k)_k$

t.c. $\lim_{k \to +\infty} x_{h_k} = \overline{x} \in K \quad \Rightarrow (y_{h_k})_k$ è una sottosuccessione di $(y_k)_k$

convergente a $f(\overline{x})$, poiché $y_{h_k} = f(x_{h_k}) \ \forall k \in \mathbb{N}$ e f è continua $\square$

Lemma

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ compatto. Allora $\exists$ $\max E$ e $\min E$.

Dim: E compatto $\Rightarrow$ E limitato $\Rightarrow$ $\exists \sup E, \inf E \in \mathbb{R}$

Dimostriamo che $\sup E \in \overline{E}$.

Preso $\varepsilon > 0$, $\exists\ \overline{x} \in E : \sup E - \varepsilon < \overline{x} \leq \sup E$ (caratterizzazione del sup)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ ]\sup E - \varepsilon, \sup E + \varepsilon[\cap E \neq \emptyset \Rightarrow \sup E \in \overline{E}$

E compatto $\Rightarrow$ E chiuso $\Rightarrow \sup E \in \overline{E} = E \Rightarrow \sup E = \max E$

Si prova analogamente che $\inf E \in E$ e dunque $\inf E = \min E$. $\square$

Corollario (Teorema di Weierstrass)

$f: K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, K compatto $\Rightarrow \exists \max f(K), \min f(K)$

(cioè f ammette punto di massimo e punto di minimo assoluti:

$\exists \; x_m \in K, x_M \in K: \; f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \; \forall x \in K$)

Dim: f continua, K compatto $\Rightarrow f(K) \subseteq \mathbb{R}$ compatto per il Teorema precedente

$\Rightarrow$ per il Lemma precedente $\exists \max f(K), \min f(K)$. $\square$

Esempi

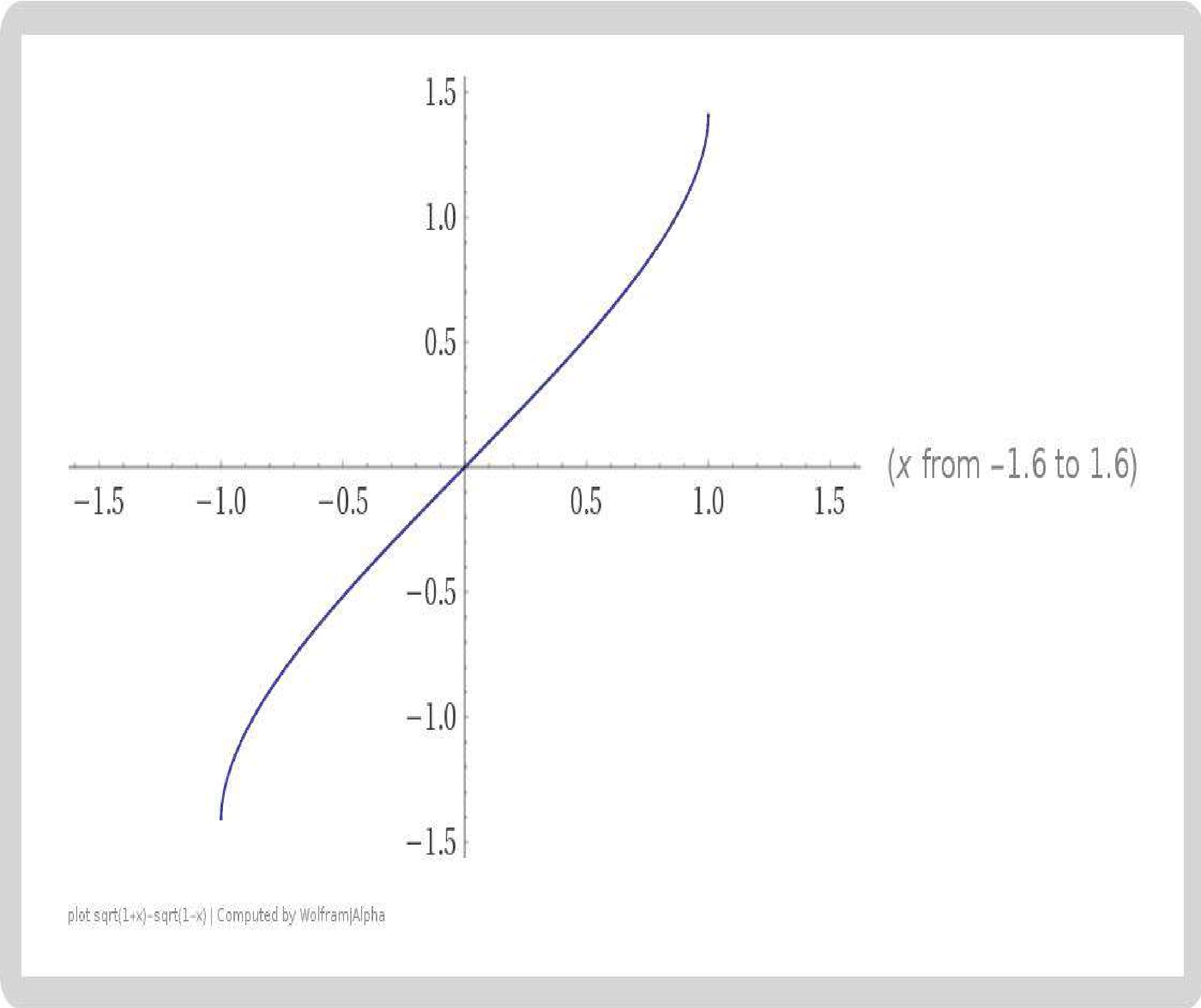
1) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ $\qquad f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid 1+x \geq 0,\ 1-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1,\ x \leq 1\} = [-1, 1]$

f continua perché
- $1+x$, $1-x$ continue
- $\sqrt{\cdot}$ continua
- $\Rightarrow$ si applica 2 volte il teorema della continuità della funzione composta e successivamente il teorema della somma di funzioni continue

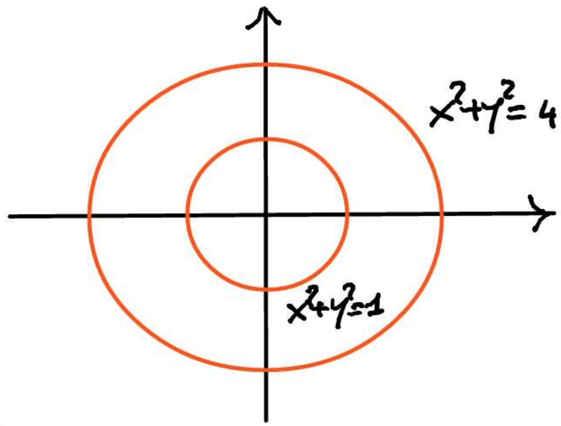
$E = [-1, 1]$ chiuso e limitato (compatto)

$\Rightarrow$ f ha punti di max e min assoluti.


1.5
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5
(x from −1.6 to 1.6)
plot sqrt(1+x)-sqrt(1-x) | Computed by Wolfram|Alpha

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}-\sqrt{4-x^2-y^2}$ $f: F\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 1,\ x^2+y^2\leq 4\}$



$g(x,y)=x^2+y^2$ continua

$F=g^{-1}([1,+\infty[)\cap g^{-1}(]-\infty,4])$

chiuso perche intersezione di due chiusi e limitato perche $F\subseteq B(0,5)$ $\Rightarrow$ F compatto

f continua (per vari teoremi...) $\Rightarrow$ f ammette punti di max e min assoluti.

WolframAlpha | PRO FOR EDUCATORS

max((sqrt(x^2+y^2-1)-sqrt(4-x^2-y^2)))

Extended Keyboard   Upload   Examples   Random

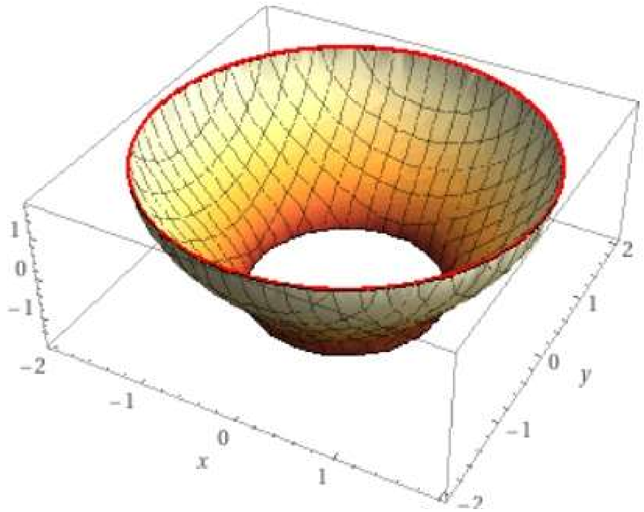
Input interpretation:

maximize	$\sqrt{x^2+y^2-1}-\sqrt{4-x^2-y^2}$

Global maxima: Enlarge   Customize   Plain Text

$\max\left\{\sqrt{x^2+y^2-1}-\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}=\sqrt{3}$ for $x^2+y^2=4$

Plot:



min((sqrt(x^2+y^2-1)-sqrt(4-x^2-y^2)))

Extended Keyboard Upload Examples Random

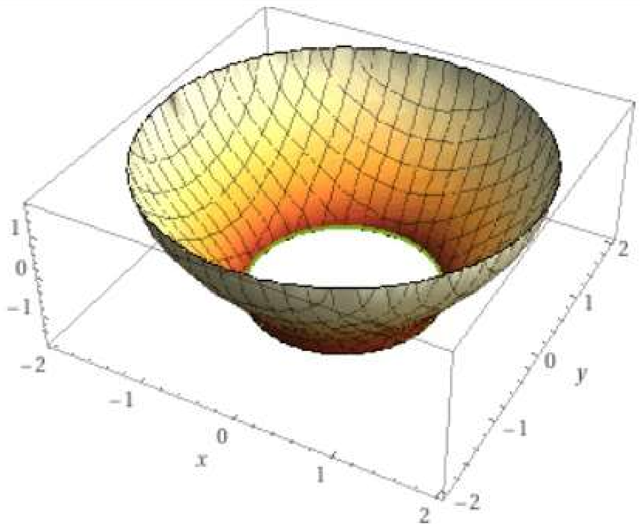
Input interpretation:

minimize	$\sqrt{x^2+y^2-1}-\sqrt{4-x^2-y^2}$

Global minima:

$$\min\left\{\sqrt{x^2+y^2-1}-\sqrt{4-x^2-y^2}\right\} = -\sqrt{3} \quad \text{for } x^2+y^2=1$$

Plot:



FUNZIONI LINEARI E CONTINUITÀ

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è

a) ADDITIVA $\Leftrightarrow$ $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

b) OMOGENEA $\Leftrightarrow$ $f(cx) = c f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall c \in \mathbb{R}$

c) LINEARE $\Leftrightarrow$ è ADDITIVA e OMOGENEA

Ricordiamo che f è lineare $\Leftrightarrow f(x) = Ax$ con A matrice $m \times n$ e x vettore colonna di n componenti

Inoltre f lineare $\Rightarrow$ $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Proposizione

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare $\Rightarrow$ f continua

Dim.: Osserviamo che basta dimostrare la continuità di f in $0 \in \mathbb{R}^n$.

Infatti, essendo f lineare, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x - x_0) = 0$$

$$\iff \lim_{h \to 0} f(h) = 0 = f(0)$$

LINEARITÀ DI f

$h = x - x_0$ e teorema del limite della funzione composta

Sia dunque $f(x) = Ax$ con A matrice $m \times n$

Consideriamo prima il caso $m = 1$: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Se $m=1$ A è una matrice $1\times n$, quindi un vettore $a\in\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f(x) = \langle a, x\rangle$ prodotto scalare di a e x.

$$\Rightarrow |f(x)-f(0)| = |f(x)| = |\langle a,x\rangle| \leq \|a\|\cdot\|x\|$$

$f(0)=0$

Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

Se $a=0$, $f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ f continua

Se $a\neq 0$, preso $\varepsilon>0$ e posto $\delta=\frac{\varepsilon}{\|a\|}$, si ha $\forall x\in\mathbb{R}^n$ tale che $\|x\|<\delta$

$$|f(x)-f(0)| = |f(x)| \leq \|a\|\,\|x\| < \|a\|\delta = \|a\|\frac{\varepsilon}{\|a\|} = \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ è continua in 0 $\Rightarrow f$ è continua in $\mathbb{R}^n$.

Se invece $m>1$, ricordiamo che

$$f(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x)) \quad \text{con } f_i:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x)=Ax=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j,\dots,\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right)$$

$$\Rightarrow f_i(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad \forall i=1,\dots,m$$

$\Rightarrow \forall i=1,\dots,m \quad f_i(x)=\langle a_i,x\rangle$, dove $a_i=(a_{i1},\dots,a_{in})$ i-esima riga di A

$\Rightarrow f_i$ continua per il caso $m=1$ già esaminato $\forall i=1,\dots,m$

$\Rightarrow f$ continua perchè tutte le componenti f_i sono continue.

Def.: $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad \pi_i(x) = x_i$

π_i è detta PROIEZIONE (i-esima)

Corollario

Le proiezioni sono continue

Dim: $\pi_i(x) = \langle e_i, x \rangle$ dove $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

con 1 in posizione i-esima

$\Rightarrow \pi_i$ lineare $\Rightarrow \pi_i$ continua $\forall i = 1, \dots, n$

Sia ad esempio $f(x,y) = \log(3x^2+5y^3-2)$

$(x,y) \xrightarrow{\pi_1} x$ e $(x,y) \xrightarrow{\pi_2} y$ sono continue (proiezioni)

$(x,y) \to 3$, $(x,y) \to 5$ e $(x,y) \to -2$ continue perché costanti

$(x,y) \to 3x^2 = 3\cdot x\cdot x$ e $(x,y) \to 5y^3 = 5\cdot y\cdot y\cdot y$ continue

per il teorema della continuità del prodotto di funzioni continue

$t \to \log t$ è continua

$\Rightarrow f(x,y) = \log(3x^2+5y^3-2)$ è continua per il teorema

di continuità della funzione composta.

Si noti che, generalizzando la tecnica vista prima, si ottiene che

I POLINOMI SONO CONTINUI

<u>Def.:</u> $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è LINEARE AFFINE $\iff$ f è somma di una funzione lineare e di una costante

$\iff f(x) = Ax + b$ con A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$

Le funzioni lineari affini sono somma di funzioni continue, dunque sono continue.

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CONTINUITA' DI FUNZIONI $R^n \to R^m$

Parte terza

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

07_02_2020_Appello_invernale_II.pdf - Adobe Acrobat Reader DC
File Modifica Vista Finestra ?
Home Strumenti 07_02_2020_Appell... × Accedi
1 / 2 135% Condividi

(d) (1 punto) Si disegni la frontiera dell'insieme D.

(e) (1 punto) Si spieghi cosa significa, secondo la definizione, che il punto $(0,0)$ è interno all'insieme D.

2. (a) Sia data la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i. (3 punti) Si verifichi se la funzione g è continua in $(0,0)$.

ii. (1 punto) Si verifichi se la funzione g abbia le due derivate parziali in $(0,0)$ e, in caso affermativo, le si calcoli.

iii. (1 punto) Si dica, giustificando la risposta, se la funzione g è differenziabile in $(0,0)$.

3. (a) (3 punti) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$$

ITA 6:22 PM 3/15/2020

Esercizi

a) Sia $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Studiare la continuità di g in $(0,0)$

Verifichiamo se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0$

Considero la restrizione di g a $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$, che ha $(0,0)$ come punto di accumulazione.

$$g_{|_{y=x}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2)}{2x^4} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_{|_{y=x}}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} h(x^2) \quad \text{con } h(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

Poiché $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ e $\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2} h(x^2) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_{|_{y=x}}(x,y) = \frac{1}{4} \neq 0$$

Quindi o g non ha limite in $(0,0)$ o questo esiste e vale $\frac{1}{4}$.

In ogni ~~caso~~ il limite di g in $(0,0)$ non è 0

$\Rightarrow g$ non continua in $(0,0)$.

10_09_2019_Appello_autunnale.pdf - Adobe Acrobat Reader DC

(d) (1 punto) Si dica se l'insieme D è chiuso, giustificando la risposta.

(e) (2 punti) Si dimostri che la funzione f non ha punti nè di massimo nè di minimo assoluto.

2. (a) (3 punti) Sia data la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{sen(2x-2y)}{x-y} & \text{se } x-y \neq 0 \\ 2 & \text{se } x-y = 0 \end{cases}$$

Si determini l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui g è continua.

(b) (2 punti) Si studi la derivabilità parziale di $h(x,y) = ln(|x|) + |y|$ in $(1,0)$.

3. (a) (2 punti) Si studi il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}$$

(b) Sia data, per $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la successione di funzioni, definite nell'intervallo $[0,1]$, di termini

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x-2y)}{x-y} & \text{se } x-y \neq 0 \\ 2 & \text{se } x-y = 0 \end{cases}$

Determinare l'insieme dei punti in cui g è continua.

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

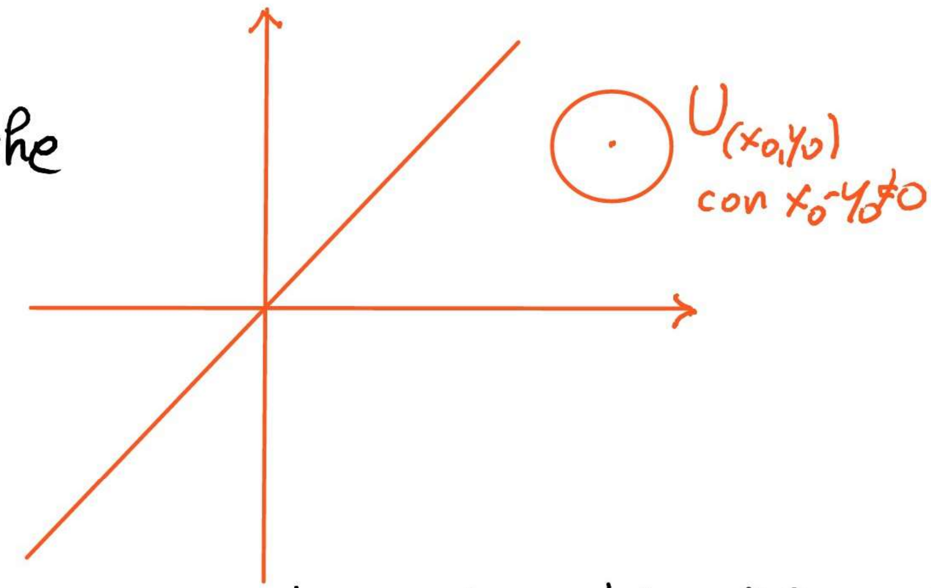
Se $x_0 - y_0 \neq 0$ allora $\exists\, U_{(x_0,y_0)}$ tale che

$x-y \neq 0 \ \forall\, (x,y) \in U_{(x_0,y_0)}$

$\Rightarrow g|_{U_{(x_0,y_0)}}(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x-2y)}{x-y}$

continua (per vari teoremi...) in (x_0, y_0)

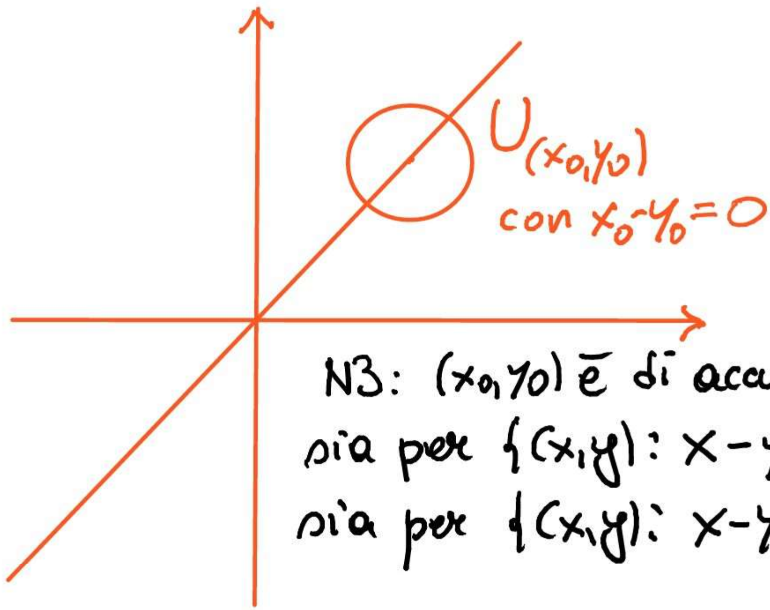
$\Rightarrow$ g continua in (x_0, y_0) perché la definizione di continuità è "locale"



b) Sia $x_0 - y_0 = 0$

Allora $g|_{x-y=0}(x,y) = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g|_{x-y=0}(x,y) = 2$



NB: (x_0,y_0) è di accumulazione sia per $\{(x,y) : x-y \neq 0\}$ sia per $\{(x,y) : x-y=0\}$

$$g|_{x-y\neq 0}(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(2x-2y)}{x-y}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g|_{x-y\neq 0}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\operatorname{sen}(2x-2y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 2\,\frac{\operatorname{sen}(2x-2y)}{2x-2y} = 2$$

ricordando che $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 2x-2y = 2(x_0-y_0) = 0$

Si ha quindi: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)|_{x-y\neq 0} = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g|_{x-y=0}(x,y) = 2$

$\{(x,y) \mid x-y\neq 0\}$ e $\{(x,y) \mid x-y=0\}$ sono un numero FINITO di sottoinsiemi del dominio di $g(x,y)$ ($\mathbb{R}^2$) che HANNO (x_0,y_0) COME PUNTO DI ACCUMULAZIONE, la cui UNIONE CORRISPONDE AL DOMINIO DI g e la RESTRIZIONE DI g A QUESTI SOTTOINSIEMI HA IN (x_0,y_0) LO STESSO LIMITE (2)

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 2 = g(x_0,y_0) \Rightarrow g$ continua in ogni (x_0,y_0): $x_0-y_0=0$

Si conclude che g è continua in $\mathbb{R}^2$.

Proposizione

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $E_1, \dots, E_p \subseteq E$: $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$, x_0 di accumulazione per E_i $\forall i = 1, \dots, p$

$$\lim_{x \to x_0} f_{|E_i}(x) = \ell \ \forall i = 1, \dots, p \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Dim: $\lim_{x \to x_0} f_{|E_i}(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_i > 0 : \forall x \in E_i$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta_i$ si ha

$$\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ sia $\delta = \min\{\delta_i \mid i = 1, \dots, p\}$. Allora sia $\varepsilon > 0$ e sia $x \in E : 0 < \|x - x_0\| < \delta$.

$E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i \Rightarrow \exists \bar{i} : x \in E_{\bar{i}}$ e si ha $0 < \|x - x_0\| < \delta \leq \delta_{\bar{i}}$

$\Rightarrow$ poiché $\lim_{x \to x_0} f_{|E_{\bar{i}}}(x) = \ell$ si ha $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \square$$

Proposizione

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $E_1, \dots, E_p \subseteq E$: $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$, x_0 di accumulazione per E_i $\forall i = 1, \dots, p$

$$\lim_{x \to x_0} f_{|E_i}(x) = \ell \quad \forall i = 1, \dots, p \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Dim: $\lim_{x \to x_0} f_{|E_i}(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_i > 0 : \forall x \in E_i$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta_i$ si ha

$$\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

$\implies$ sia $\delta = \min\{\delta_i \mid i = 1, \dots, p\}$. Allora sia $\varepsilon > 0$ e sia $x \in E : 0 < \|x - x_0\| < \delta$.

$E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i \implies \exists \bar{\imath} : x \in E_{\bar{\imath}}$ e si ha $0 < \|x - x_0\| < \delta \leq \delta_{\bar{\imath}}$

$\implies$ poiché $\lim_{x \to x_0} f_{|E_{\bar{\imath}}}(x) = \ell$ si ha $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

$$\implies \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \square$$

CONTINUITÀ UNIFORME

Def.: $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è UNIFORMEMENTE CONTINUA

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E$ t.c. $\|x - y\| < \delta$ si ha $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

QUALE È LA DIFFERENZA CON LA CONTINUITÀ?

f continua $\Leftrightarrow$ f continua in x $\forall x \in E$

$\Rightarrow \delta$ dipende da ε e da x: $\delta = \delta(x, \varepsilon)$

f uniformemente continua $\Rightarrow \delta$ dipende solo da ε: $\delta = \delta(\varepsilon)$

$$\boxed{\text{UNIFORME CONTINUITÀ} \Rightarrow \text{CONTINUITÀ}}$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CONTINUITA' DI FUNZIONI $R^n \rightarrow R^m$

Parte quarta

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

CONTINUITÀ UNIFORME

<u>Def.:</u> $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è UNIFORMEMENTE CONTINUA

$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E$ t.c. $\|x - y\| < \delta$ si ha $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

QUALE È LA DIFFERENZA CON LA CONTINUITÀ?

f continua $\iff$ f continua in x $\forall x \in E$

$\Rightarrow$ δ dipende da ε e da x: $\delta = \delta(x, \varepsilon)$

f uniformemente continua $\Rightarrow$ δ dipende solo da ε: $\delta = \delta(\varepsilon)$

$$\boxed{\text{UNIFORME CONTINUITÀ} \Longrightarrow \text{CONTINUITÀ}}$$

Esempi

1) $f(x) = x^2 \qquad f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$0 \le x+y \le 1+1 = 2$

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y| \cdot |x-y| \le 2\,|x-y|$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, posto $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x, y \in I : |x-y| < \delta$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \le 2\,|x-y| < 2\delta = 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ è uniformemente continua.

2) $f(x) = x^2 \quad f: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo per assurdo che f sia uniformemente continua.

Sia $\varepsilon = 1$. Allora $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in [0, +\infty[: |x-y| < \delta$ si ha

$|f(x) - f(y)| < 1$.

Consideriamo $x > 0$ e sia $y = x + \frac{\delta}{2}$. Si ha $|x-y| = |x - x - \frac{\delta}{2}| = \frac{\delta}{2}$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x^2 - (x + \frac{\delta}{2})^2| = |-\frac{\delta^2}{4} - \delta x| = \delta \left(x + \frac{\delta}{4}\right) < \underline{1}$

Tuttavia: $\lim_{x \to +\infty} \delta \left(x + \frac{\delta}{4}\right) = +\infty$

$\Rightarrow \forall\, k>0\ \exists\, h>0$ tale che $\forall x: x>h$ si ha $\delta\left(x+\frac{\delta}{4}\right)>k$

$\Rightarrow$ Posto $k=1$, consideriamo $h_1>0$ tale che $\forall x>h_1 \quad \delta\left(x+\frac{\delta}{4}\right)>1$

$\Rightarrow$ preso un qualsivoglia $x>h_1$ e posto $y=x+\frac{\delta}{2}$, si ha

$|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta$, ma $|f(x)-f(y)|=\delta\left(x+\frac{\delta}{4}\right)>1$

che contraddice l'uniforme continuità.

$\Rightarrow f$ non è uniformemente continua.

3) $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

≤ 1

$$\Rightarrow \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y\right| = 2 \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \le 2 \left|\frac{x-y}{2}\right| \cdot 1 = |x-y|$$

$|\operatorname{sen}(z)| \le |z| \ \forall z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Basta prendere $\delta = \varepsilon$ nella definizione di uniforme continuità

$\Rightarrow$ f è uniformemente continua.

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x-y|}{xy}$$

Sia per assurdo f uniformemente continua. Allora

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ x, y \in]0,+\infty[$ e $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Presi $\varepsilon = 1$, $x > 0$ e $y = x + \frac{\delta}{2}$, si ha $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e

$$|f(x) - f(y)| = \frac{\frac{\delta}{2}}{x^2 + \frac{\delta}{2}x} = \frac{\delta}{2x^2 + \delta x} < 1$$

Ma $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\delta}{2x^2 + \delta x} = +\infty$ e quindi ... (analogo a 2))

$\Rightarrow$ f non è uniformemente continua.

5) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f: [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $a>0$

$$\Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{|x-y|}{a^2}$$

Sia $\varepsilon>0$ e $\delta = a^2\varepsilon$ $\quad \Rightarrow$ se $|x-y|<\delta$ $(x, y \in E)$

$$\Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| \leq \frac{|x-y|}{a^2} < \frac{\delta}{a^2} = \frac{a^2\varepsilon}{a^2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f è uniformemente continua.

Teorema (di Cantor-Heine)

$f: K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua, K compatto $\Rightarrow$ f uniformemente continua

NEGHIAMO LA DEFINIZIONE DI UNIF. CONTINUITÀ

Dim: Sia per assurdo f non uniformemente continua.

$\Rightarrow \neg\left(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x, z \in K \text{ con } \|x-z\|<\delta \text{ si ha } \|f(x)-f(z)\|<\varepsilon\right)$

$\Rightarrow \exists\, \bar{\varepsilon}>0 : \forall \delta>0\ \exists\, x_\delta, z_\delta \in K \text{ con } \|x_\delta - z_\delta\|<\delta \text{ e } \|f(x_\delta)-f(z_\delta)\| \geq \bar{\varepsilon}.$

Assegnamo a δ i valori $\frac{1}{k}$ con $k \in \mathbb{N}^+$

$\Rightarrow$ Costruiamo così due successioni $(x_k)_k$ e $(z_k)_k$ in K tali che:

$$\|x_k - z_k\| < \frac{1}{k} \text{ e } \|f(x_k)-f(z_k)\| \geq \bar{\varepsilon} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

K compatto $\Rightarrow \exists\, (x_{h_k})_k$ sottosuccessione di $(x_k)_k$ convergente a $\overline{x} \in K$.

Considero la sottosuccessione $(z_{h_k})_k$ di $(z_k)_k$ con gli stessi indici.

$$\Rightarrow 0 \le \| z_{h_k} - \overline{x} \| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE}}}{\le} \| z_{h_k} - x_{h_k} \| + \| x_{h_k} - \overline{x} \| \le \underbrace{\frac{1}{h_k}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\| x_{h_k} - \overline{x} \|}_{\downarrow\, 0}$$

per $k \to +\infty$

$$\lim_{k \to +\infty} x_{h_k} = \overline{x} \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} \| x_{h_k} - \overline{x} \| = 0$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{h_k} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \| z_{h_k} - \overline{x} \| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} z_{h_k} = \overline{x} = \lim_{k \to +\infty} x_{h_k}$$

Si ha però

DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$0 \le \|f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})\| \le \underbrace{\|f(x_{h_k}) - f(\overline{x})\|}_{\to 0} + \underbrace{\|f(\overline{x}) - f(z_{h_k})\|}_{\to 0}$$

perché f continua

Ma f è continua

LA CONTINUITÀ CONSERVA LE SUCCESSIONI

$$\Rightarrow x_{h_k} \to \overline{x} \text{ e } z_{h_k} \to \overline{x} \Rightarrow f(x_{h_k}) \to f(\overline{x}) \text{ e } f(z_{h_k}) \to f(\overline{x})$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \|f(x_{h_k}) - f(\overline{x})\| = \lim_{k \to +\infty} \|f(z_{h_k}) - f(\overline{x})\| = 0$$

TEOREMA SANDWICH

$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \|f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})\| = 0$ in contraddizione con la

$\|f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})\| \geq \varepsilon$ $\Rightarrow$ f è uniformemente continua $\square$