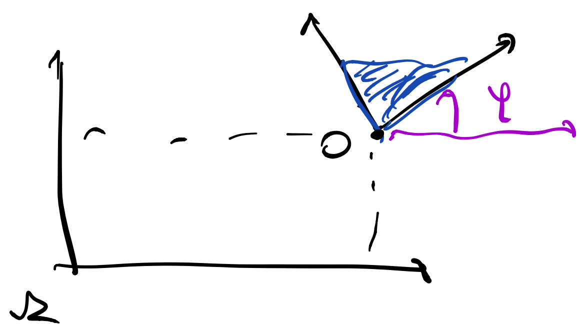
MECCANICA RAZIONALE

Ing. Civile & Ambientale
Navale

15 marzo 2021

Corpo rigido → coordinate libere
↕
gradi di libertà



(x_0, y_0, φ)

↓

corpi vincolati

oppure struttura articolata

→ Parametrizzare la configurazione di un sistema materiale

Problema della statica: principio dei lavori virtuali

$$LV = \sum_B \underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} Q_i \, q_i$$

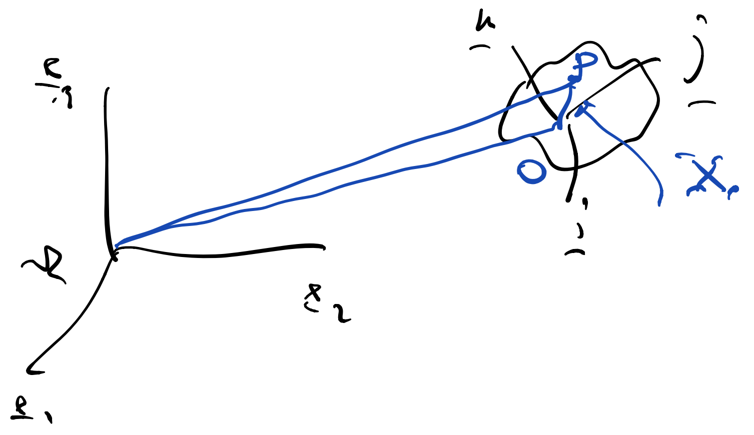
LV per un corpo rigido 3 dim
2 dim

Teorema di Poisson

$$\frac{d}{d\tau} \underline{x}_p(\tau) = \frac{d}{d\tau} \underline{x}_0(\tau) + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0)$$

$$\left(\frac{d}{d\tau} (\underline{x}_p - \underline{x}_0)(\tau) = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \right)$$

$$\Rightarrow \underline{x}_p(\tau) = \underline{x}_0(\tau) + R(\tau) \cdot \underline{\tilde{X}}$$



R matrice di trasf. tra Σ' e S

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0$$

R ortogonale, cioè $R R^T = I$

entra in gioco $A = \dot{R} R^T$

$$\underline{x}_P = \underline{x}_O + R \cdot X$$

$$\rightarrow \quad R \cdot X = \underline{x}_P - \underline{x}_O$$

$$X = R^{-1} (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$$

$$= R^T (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$$

A antisimmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A\underline{y} = \underline{\omega} \wedge \underline{y}$$

Poisson

$$R \dashrightarrow \underline{\omega}$$

- Traslazione : $\underline{\omega} = 0$

- Rotazione intorno ad un asse fisso : $\underline{\omega} = \dot{\varphi}\, \underline{e}_3 = \dot{\varphi}\, \underline{k}$

  $\underline{e}_3 = \underline{k}$ è l'asse fisso

- Moto con un punto fisso

$$\underline{\omega} = \underbrace{\dot{\varphi}\, \underline{e}_3}_{\Sigma} + \underbrace{\dot{\theta}\, \underline{u}}_{\underline{u} = \underline{e}_3 \wedge \underline{k}} + \underbrace{\dot{\psi}\, \underline{k}}_{S}$$

$\rightarrow$ spostamenti virtuali & lavoro virtuale di un rigido

$\delta \underline{x}_P$?

$$\frac{d}{d\tau} \underline{x}_P(\tau) = \frac{d\, \underline{x}_O(\tau)}{d\tau} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$$

$$\delta \underline{x}_P = \frac{d\, \underline{x}_P}{d\tau}\, \delta\tau$$

$\tau \rightarrow \tau + \delta\tau$

$\underline{x}_P \rightarrow \underline{x}_P + \delta \underline{x}_P$

$$\delta \underline{x}_P = \frac{d}{d\tau} \underline{x}_P\, \delta\tau = \frac{d}{d\tau} \underline{x}_O\, \delta\tau + \underline{\omega}\, \delta\tau \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$$

Poniamo : $\delta \underline{x}_O = \dfrac{d}{d\tau} \underline{x}_O(\tau)\, \delta\tau$

$$\underline{\chi} = \underline{\omega}(\tau)\, \delta\tau$$

Nella nostra parametrizzazione

$$\underline{\chi} = \underline{\omega}\,\delta\tau = \dot{\varphi}\,\delta\tau\,\underline{e}_3 + \dot{\theta}\,\delta\tau\,\underline{u} + \dot{\psi}\,\delta\tau\,\underline{k}$$

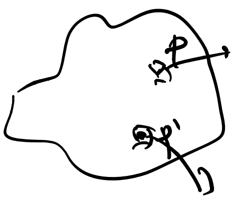
$$= \delta\varphi\,\underline{e}_3 + \delta\theta\,\underline{u} + \delta\psi\,\underline{k}$$

$\tau \to \tau + \delta\tau$

$\varphi \to \varphi + \delta\varphi$

$$\boxed{\delta\underline{x}_P = \delta\underline{x}_O + \underline{\chi} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)}$$

δx_0, δy_0, δz_0 — $\delta\varphi$, $\delta\theta$, $\delta\psi$



sistema di forze $\underline{F}_P$ $\forall\, P \in R$

LV per un rigido $= \sum'_{P\in R} \underline{F}_P \cdot \delta\underline{x}_P$

$\sum \to \iiint$

$$= \sum'_{P\in R} \underline{F}_P \cdot \left[\delta\underline{x}_0 + \underline{\chi} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)\right]$$

$$= \sum_{P\in\mathcal{R}}{}' \, \underline{F}_P \cdot \delta \underline{x}_O + \sum_{P\in\mathcal{R}}{}' \left[\underline{\chi} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \right] \cdot \underline{F}_P$$

$$= \delta \underline{x}_O \cdot \left(\sum_{P\in\mathcal{R}}{}' \, \underline{F}_P \right) + \sum_{P\in\mathcal{R}}{}' \, \underline{\chi} \cdot (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P$$

abbiamo usato

$$\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c}$$

Definiamo

$$\underline{R} = \sum_{P\in\mathcal{R}}{}' \, \underline{F}_P$$ risultante delle forze

$$\underline{M}(O) = \sum_{P\in\mathcal{R}}{}' \, (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P$$ momento risultante delle forze

Quindi:

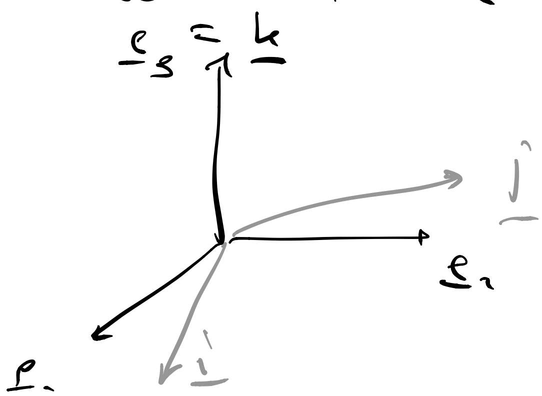
sistema di forze

$$LV = \delta \underline{x}_O \cdot \underline{R} + \underline{\chi} \cdot \underline{M}(O)$$

coordinate libere

Caso di un rigido piano

Convenzione: l'asse normale al piano è $\underline{e}_3 = \underline{k}$



l'angolo di rotazione lo chiamiamo φ

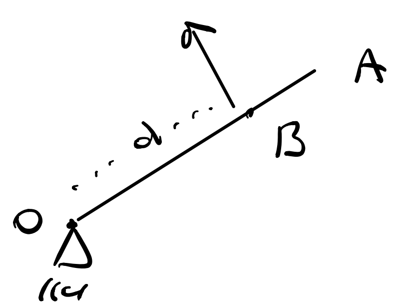
$$\delta \underline{x}_0 = \delta x_0 \, \underline{e}_1 + \delta y_0 \, \underline{e}_2$$

$$\underline{\chi} = \chi \, \underline{e}_3 = \delta\varphi \, \underline{e}_3$$

quindi $\delta \underline{x}_P = \delta \underline{x}_0 + \delta\varphi \, \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)$

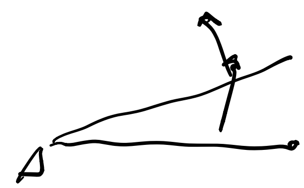
$$LV_{\text{rigido piano}} = \underline{R} \cdot \delta \underline{x}_0 + \left[\underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3 \right] \delta\varphi$$

Esempio



Asta fissa in O

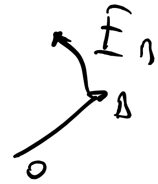
$\underline{F}_B$ in B di modulo e verso costanti (follower)



$$LV = \delta \underline{x}_0 \cdot \underline{F}_B + \delta\varphi \, \underline{e}_3 \cdot (\underline{x}_B - \underline{x}_0) \wedge \underline{F}_B$$

$\delta \underline{x}_0 = \underline{0}$ perché O è vincolato

$$(\underline{x}_B - \underline{x}_0) \wedge \underline{F}_B = |F_B|\, d\, \underline{e}_3$$



↳ $LV = \delta\varphi \; d \; |\underline{F}_B|$

Possiamo trovare l'espressione per le forze generalizzate

$$LV \overset{3D}{=} \delta \underline{x}_0 \cdot R + \underline{\chi} \cdot \underline{M}(O) = \sum_i Q_i q_i$$

→ $Q_{x_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_1$, $Q_{y_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_2$, $Q_{z_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_3$

$Q_\varphi = \underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3$, $Q_\theta = \underline{M}(O) \cdot \underline{n}$,

$Q_\psi = \underline{M}(O) \cdot \underline{k}$

$$LV \overset{2D}{=} \underline{R} \cdot \delta \underline{x}_0 + [\underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3]\, \delta\varphi$$

$Q_{x_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_1$, $Q_{y_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_2$

$Q_\varphi = \underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3$

Seconda parte

Campo di velocità per un rigido, asse istantaneo di moto

Possiamo riscrivere la formula di Poisson :

$$\underline{v}_P(\underline{x}_P) = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)$$

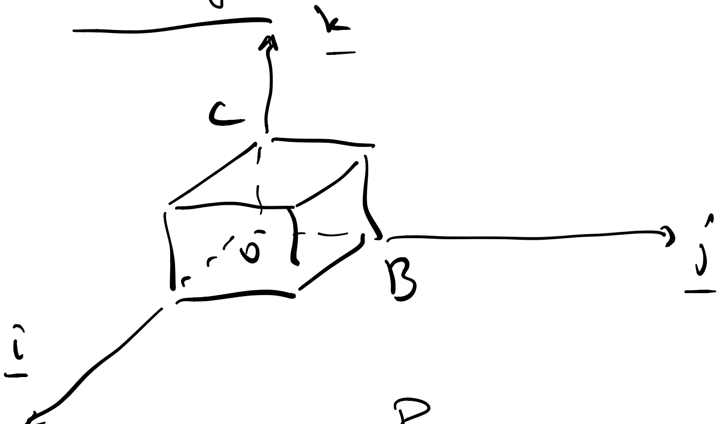
$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\underline{x}_P(t)$$

velocità "virtuale" o "fisica" del punto $\underline{P}$

Ad un istante t generico, $\underline{v}_P$ definisce un campo di velocità

Esempio



Supponiamo

$$\underline{v}_0 = c\,\underline{k}$$

$$\underline{\omega} = \omega_0\,\underline{k}$$

Poisson : $\underline{v}(\underline{x}_P) = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)$

$$= c\,\underline{k} + \omega_0\, \underline{k} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)$$

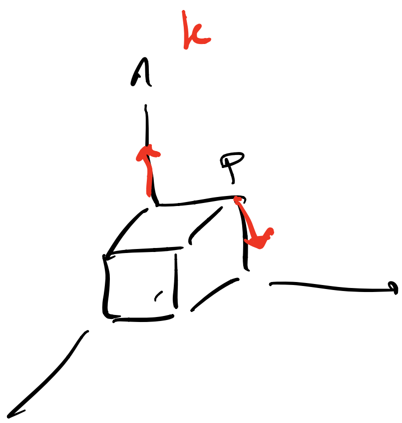
- $\underline{\omega}_0 = 0 \longrightarrow \underline{v}(\underline{x}_P) = \underline{v}_0 = c\,\underline{k}$

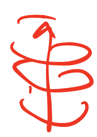
  vuol dire che il corpo trasla
  con velocità costante $c\,\underline{k}$

- $\underline{\omega}_0 \neq 0$ allora

$$\underline{v}(\underline{x}_P) = \underbrace{c\,\underline{k}}_{\text{velocità costante verso } \underline{k}} + \underbrace{\omega_0\, \underline{k} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)}_{\text{velocità di } \underline{x}_P \text{ è ortogonale a } \underline{k} \text{ e a } (\underline{x}_P - \underline{x}_0)}$$

$\rightarrow$ il moto complessivo è un moto di avvitamento intorno all'asse $\underline{k}$





$P \notin \underline{k}$ moto elicoidale

In generale $\underline{v}_0(\tau)$, $\underline{\omega}(\tau)$ sono funzioni di τ.

Quando fissiamo τ, parliamo di <u>atto di moto</u>

Rigido generico:

1) $\underline{\omega} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}_0 \quad \forall \underline{x}$

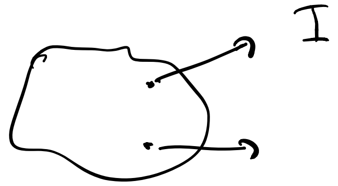
$\Rightarrow$ tutti i punti $\underline{x}$ hanno la stessa velocità

2) $\underline{\omega} \neq \underline{0} \Rightarrow$ moltiplichiamo $\underline{v}(\underline{x})$ per il versore vers $\underline{\omega}$

$$\underline{v}(\underline{x}) \cdot \text{vers}\,\underline{\omega} = \underline{v}_0 \cdot \text{vers}\,\underline{\omega} +$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\perp \text{ a } \underline{\omega}} \cdot \text{vers}\,\underline{\omega}}_{= 0}$$

Poniamo $\underline{v}_0 \cdot \text{vers}\,\underline{\omega} \equiv I$ = costante indipendente da $\underline{x}$.



$\longrightarrow$ "invariante scalare"

A parole: la componente (o proiezione) della velocità lungo la direzione di $\underline{\omega}$ è uguale per tutti i punti

3) se $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ $\Rightarrow$ dati P e P' distinti, si può avere $\underline{v}_P = \underline{v}_{P'}$ se e solo se $(\underline{x}_P - \underline{x}_{P'})$ è parallelo a $\underline{\omega}$

Poisson: $\underline{v}_P = \underline{v}_{P'} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'})$

scelgo $O \equiv P'$

$\underline{v}_P = \underline{v}_{P'}$ allora $\underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'}) = 0$

e quindi $\underline{\omega} \parallel (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'})$

→ tutti i punti appartenenti ad una qualsiasi retta di direzione $\underline{\omega}$ hanno la stessa velocità.

Teorema di Mozzi

Ogni atto di moto di un rigido è o traslatorio (se $\underline{\omega}(\tau) = \underline{0}$) o elicoidale (se $\underline{\omega}(\tau) \neq \underline{0}$) intorno ad una particolare retta detta asse istantaneo di moto (o asse di Mozzi) A.I.M.

Inoltre, nel secondo caso ($\underline{\omega}(\tau) \neq 0$) i punti dell' A.I.M. hanno la proprietà:

$$\underline{v}(\underline{x}) = (\underline{v}_0 \cdot \mathrm{vers}\,\underline{\omega})\,\mathrm{vers}\,\underline{\omega}$$

$$= \underline{c} \qquad \forall\, \underline{x} \in A.I.M.$$

e l'equazione dell' A.I.M. è

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\omega\|^2} + \lambda \underline{\omega}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

<u>Commenti:</u>

- Da 2) sappiamo che se scomponiamo la velocità $\underline{v}_P$ di un generico punto P in una componente parallela a $\underline{\omega}$ e una componente normale a $\underline{\omega}$

→ la componente parallela a $\underline{\omega}$ è una costante $\underline{c} = I \text{ vers} \underline{\omega}$

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c} + \underline{u}(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}$$

↑ componenti normale

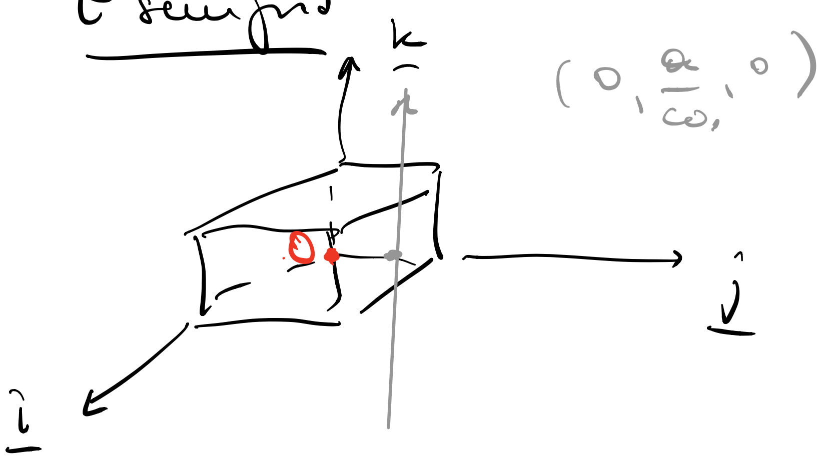
Vediamo che tutti i punti dell'A.I.M hanno $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c}$ (cioè $\underline{u}(\underline{x}) = 0$ sull' A.I.M.) e quindi hanno velocità minima (in modulo perché $\underline{c} \perp \underline{v}$)

- da $\underline{x} = \underline{x}_0 + \dfrac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\omega\|^2} + \lambda \underline{\omega}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

A.I.M è una retta di direzione $\underline{\omega}$ e passante per il punto del rigido $\underline{x} - \underline{x}_0 = \dfrac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\omega\|^2}$

A è fissato, dove $\underline{\omega}$ e $\underline{v}_0$ conosciamo l'A.I.M.

Esempio



A è fissato

$\underline{v}_0 = a\,\underline{i} + b\,\underline{k}$

$\underline{\omega} = \omega_0\,\underline{k}$

$\underline{c} = (\underline{v}_0 \cdot \text{vers}\,\underline{\omega})\,\text{vers}\,\underline{\omega} =$

$= (\underline{v}_0 \cdot \underline{k})\, \underline{k} = b\, \underline{k}$

L'A.I.M. ha direzione $\underline{\omega}$, e quindi direzione $\underline{k}$ e passa per il punto

$$\underline{x} - \underline{x}_0 = \omega_0 \frac{\underline{k} \wedge \underline{v}_0}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0}\left(\underline{k} \wedge (a\,\underline{i} + b\,\underline{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\, a\, \underline{j} \qquad \left(0, \frac{a}{\omega_0}, 0\right)$$

Dimostrazione

- se $\underline{\omega} = \underline{0}$ il Teorema è ovvio

Consideriamo $\underline{\omega} \neq \underline{0}$

Usiamo la proprietà 2)

$$\underline{v}(\underline{x}) \cdot \text{vers}\,\underline{\omega} = \underline{v}_0 \cdot \text{vers}\,\underline{\omega}$$

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c} + \underline{u}(\underline{x})$$ per un punto $\underline{x}$ generico

$\downarrow$

$(\underline{v}_0 \cdot \text{vers}\,\underline{\omega})\, \text{vers}\,\underline{\omega}$

Vogliamo vedere che per i pti di A.I.M.

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c} \iff \underline{u}(\underline{x}) = \underline{0}$$ solo se $\underline{x} \in$ A.I.M.

Dobbiamo verificare che i punti

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\omega\|^2} + \lambda \underline{\omega}$$

soddisfano $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c}$

Per calcolo diretto:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

def. di A.I.M.

$$= \underline{v}_0 + \underline{\omega} \wedge \left(\frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\omega\|^2} + \lambda \underline{\omega} \right)$$

$$= \underline{v}_0 + \frac{1}{\|\omega\|^2} \underline{\omega} \wedge [\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0]$$

formula $\underline{a} \wedge [\underline{b} \wedge \underline{c}] = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$

$$= \cancel{\underline{v}_0} + (\underline{v}_0 \cdot \text{vers}\,\underline{\omega})\,\text{vers}\,\underline{\omega} - \cancel{\underline{v}_0}$$

$$\text{vers}\,\underline{\omega} := \frac{\underline{\omega}}{\|\underline{\omega}\|}$$

$$= (\underline{v}_0 \cdot \text{vers}\,\underline{\omega}) \cdot \text{vers}\,\underline{\omega} = \underline{c}$$

Per finire prendiamo $Q \in$ A.I.M.

Allora $\forall$ punto $\underline{P}$

$$\underline{v}_P(\underline{x}_P) = \underline{v}_Q + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_Q)$$

$\uparrow$ $Q=0$ + Poisson

$$= \underbrace{\underline{c}}_{\uparrow} + \underbrace{\underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)}_{}$$

perché $Q \in$ A.I.M.

$\underline{u}(\underline{x})$ è ortogonale a $\underline{\omega}$

quindi l'atto di moto del rigido è elicoidale intorno all'A.I.M.

con caratteristiche $\underline{v}_Q = \underline{c}$, $\underline{\omega}$. ∎