

Fluidi

- Si chiama comunemente fluido un mezzo continuo privo di forma propria. Il fluido assume quindi la forma del recipiente che lo contiene
- liquidi
 - fluidi con volume proprio e debole compressibilità
- aeriformi
 - fluidi senza volume proprio e con elevata compressibilità

Statica dei fluidi: fluidi in quiete o corpi immersi in essi

Dinamica dei fluidi: fluidi in movimento o forze che agiscono su corpi in moto in un fluido.

Densita'

Leggi della meccanica dei fluidi si riferiscono non all'intero volume, ma ad una piccola porzione.

Invece della massa m dell'intero liquido si considera la:

densita' ρ (massa per volume unitario)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Unita' di misura della densita':

kg/m^3 , gr/cm^3 , gr/litro , kg/litro

Densita' dell'acqua pura a 4^0 C e': 1 gr cm^{-3} oppure 1000 kg m^{-3}

Densita' relativa e' definita come: densita' (liquido)/densita' (acqua)

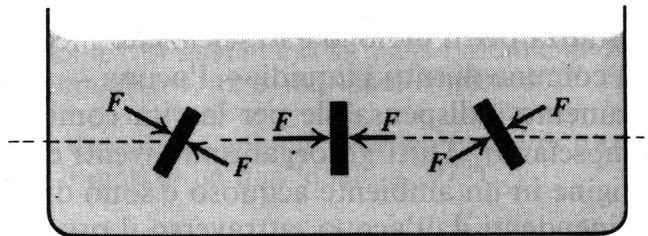
MATERIAL OR OBJECT	DENSITY (kg/m^3)
Interstellar space	10^{-20}
Best laboratory vacuum	10^{-17}
Air: 20°C and 1 atm	1.21
20°C and 50 atm	60.5
Styrofoam	1×10^2
Water: 20°C and 1 atm	0.998×10^3
20°C and 50 atm	1.000×10^3
Seawater: 20°C and 1 atm	1.024×10^3
Whole blood	1.060×10^3
Ice	0.917×10^3
Iron	7.9×10^3

Idrostatica

La forza che un fluido esercita su una qualunque superficie ha direzione normale all'elemento di superficie stessa in condizioni di equilibrio statico.

Forza esercitata da un fluido in quiete non può avere componenti parallele alla superficie perché ci sarebbero sforzi di taglio e quindi scorrimento.

Consideriamo un piccolo disco di superficie A immerso in un liquido. **Liquido esercita su disco forza F su entrambi i lati ed indipendentemente dall'orientamento del disco (se alla stessa profondità) ed agisce sempre perpendicolare alla superficie.**



Si definisce la pressione:

$$\text{pressione} = \frac{\text{forza}}{\text{superficie}}$$

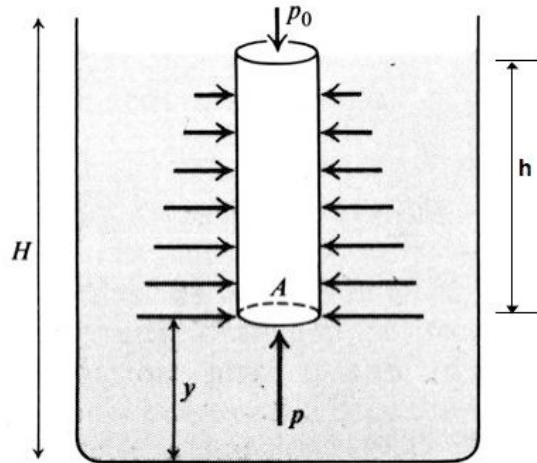
La pressione non dipende dall'orientamento della superficie su cui si manifesta. Alla stessa profondità il liquido esercita la stessa pressione.

La pressione è una forma di densità di energia

$$p = \frac{\text{forza}}{\text{superficie}} \frac{\text{distanza}}{\text{distanza}} = \frac{\text{energia}}{\text{volume}}$$

p è una densità di energia di pressione

Equazione fondamentale dell'idrostatica. Legge di Stevino



Pressione nei fluidi in quiete

Consideriamo colonna di liquido (cilindro alto h e base A) in quiete nello stesso liquido.

In tutti i punti la pressione e' perpendicolare alla superficie del liquido.

Pressioni allo stesso livello sono uguali perche' **forze risultanti da pressioni orizzontali si elidono.**

Pressione p a profondita' h e' maggiore che pressione p_0 in superficie per forze verticali dovute al peso della colonna del liquido.

Se p e' pressione alla profondita' h sulla superficie inferiore A ci deve essere forza verso l'alto pari a: **$p A$**

Se p_0 e' pressione atmosferica sulla superficie superiore A del liquido allora c'e' forza verso il basso pari a: **$p_0 A$**

Forza risultante dovuta alle pressioni agenti sulla colonna liquido:

$$(p - p_0) A \quad \text{verso l'alto}$$

Poiche' il liquido e' in quiete questa forza bilancia la forza peso della colonna di liquido stesso (verso il basso):

$$(p - p_0) A = m g = \rho h A g$$

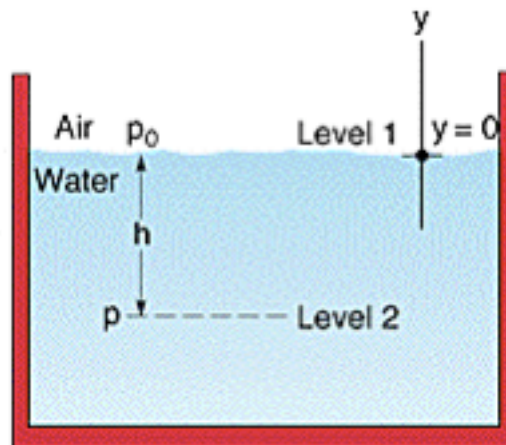
ρ = densita' del liquido

$(p - p_0)$ = sovrappressione

Equazione fondamentale dell'idrostatica: Legge di Stevino

$$p - p_0 = \rho g h$$

La pressione ad una certa profondita' h e' la somma della sovrappressione dovuta al liquido piu' la pressione atmosferica



Legge di Pascal

La pressione atmosferica e' trasmessa in ogni punto del liquido.

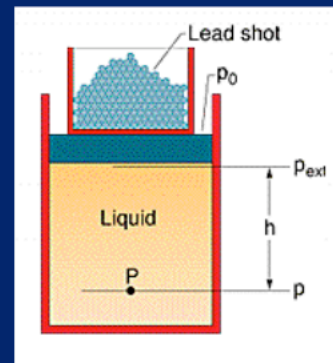
Cio' vale per qualunque pressione esterna applicata.

La pressione che si esercita sulla superficie limite di un fluido si trasmette senza attenuazioni in tutto il fluido e alle pareti del contenitore, su cui agisce normalmente.

**La variazione della
pressione esterna su di
un liquido
incomprimibile si
traduce in una eguale
variazione di pressione
in ogni punto del fluido**

Esempi di applicazione

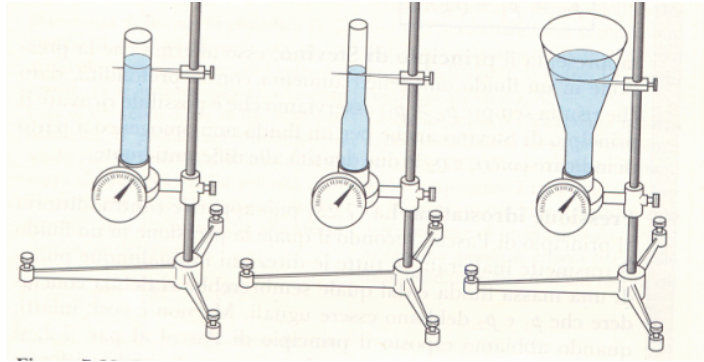
- il materasso ad acqua
- il fluido che circonda completamente il feto
- l'encefalo



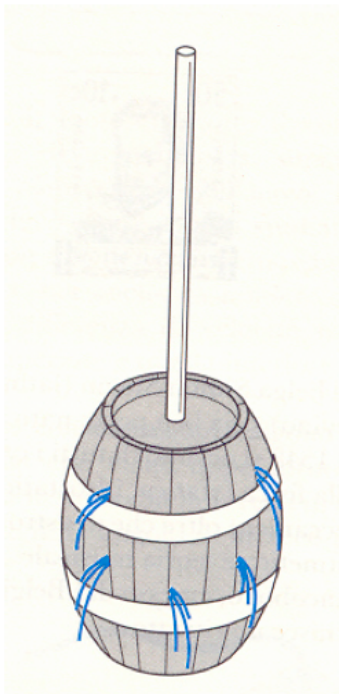
Esempio: materassini ad acqua. Il peso del corpo appoggiato sul materassino lo deforma aumentando la superficie di contatto e su ogni punto il fluido esercita sul corpo la stessa pressione che deve equilibrare il peso del corpo stesso. Aumentando la superficie di contatto la pressione sul corpo risulta minore ed equamente distribuita.

Paradosso idrostatico

Per legge di Stevino la pressione idrostatica non dipende dalla quantità di liquido tra due quote, ma solo dal loro dislivello.



Pertanto, in tubi molto stretti anche piccole quantità di liquido riescono a produrre pressioni notevoli, purché l'altezza della colonna liquida sia molto elevata.



Una conferma di ciò è costituita dal ben noto **paradosso idrostatico della botte di Pascal**. In una robusta botte piena di liquido immergiamo attraverso il coperchio un tubo sottile e molto alto, versando dell'acqua la pressione idrostatica aumenta in modo direttamente proporzionale all'altezza della colonna liquida.

Anche la forza esercitata dal liquido contro le pareti interne della botte aumenta proporzionalmente con l'altezza.

Se l'altezza del liquido versato nel tubicino è sufficientemente elevata, la botte si rompe in quanto non riesce più a sopportare la forza esercitata dal liquido.

Unita' di misura

MKS **Pascal Pa** = $1\text{N}/\text{m}^2$

CGS **baria** = ($1\text{ dina}/\text{cm}^2$) = 0.1 Pa
($1\text{N} = 10^5\text{ dine}$, $1\text{ m}^2 = 10^4\text{ cm}^2$)

Unita' di uso comune

atmosfera (atm)

$1\text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5\text{ Pa} = 1.013 \cdot 10^6\text{ barie} = 760\text{ mmHg}$

bar

$1\text{ bar} = 10^5\text{ Pa} = 10^6\text{ barie}$

$1\text{ mbar} = 10^{-3}\text{ bar} = 1\text{ hPa} = 10^2\text{ Pa}$

torr

$1\text{ torr} = 1\text{ mmHg} = \rho gh = 13.6\text{ gr}/\text{cm}^3 * 980\text{ cm}/\text{s}^2 * 0.1\text{ cm} = 133\text{ Pa}$

$1\text{ atm} = 760\text{ torr}$

Alcune pressioni

	PRESSURE (Pa)
Center of the Sun	2×10^{16}
Center of Earth	4×10^{11}
Highest sustained laboratory pressure	1.5×10^{10}
Deepest ocean trench (bottom)	1.1×10^8
Spike heels on a dance floor	1×10^6
Automobile tire ^a	2×10^5
Atmosphere at sea level	1.0×10^5
Normal blood pressure ^{a, b}	1.6×10^4
Best laboratory vacuum	10^{-12}

^aPressure in excess of atmospheric pressure.

^bThe systolic pressure, corresponding to 120 torr on the physician's pressure gauge.

Esempio.

Calcolare la sovrappressione alla profondita' di 1 km sotto il mare. La densita' relativa del mare puo' essere assunta uguale ad 1.05.

$$p = \rho gh$$

$$\rho_{\text{mare}} / \rho_{\text{acqua}} = 1.05 \rightarrow \rho_{\text{mare}} = 1.05 * 1000 \text{ kg/m}^3 = 1050 \text{ kg/m}^3$$

$$p = \rho gh = 1050 \cdot 9.8 \cdot 1000 \text{ Pa} = 1.03 * 10^7 \text{ Pa} = 1.02 * 10^2 \text{ atm}$$

Il sub in apnea

Supponiamo che un sub tenti di utilizzare un tubo per respirare di lunghezza $L = 6$ m.

Alla profondità L c'è su di lui una pressione esterna

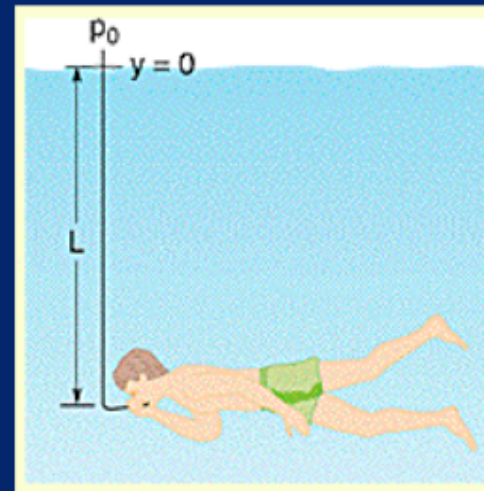
$$P = P_0 + \rho g L$$

che viene compensata da un'aumento della pressione sanguigna e dell'aria già presente nei suoi polmoni

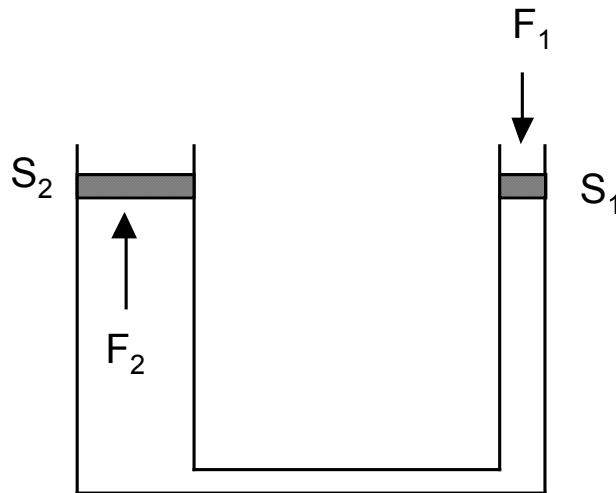
Se il sub tenta di utilizzare il tubo, mette in comunicazione l'aria dei suoi polmoni con aria a pressione inferiore. La differenza di pressione

$$\Delta P = P - P_0 = \rho g L = 0.6 \text{ atm}$$

è sufficiente per causare il collasso dei polmoni



Applicazione: Pressa idraulica o martinetto idraulico



Vaso destra di sezione S_1 . Vaso sinistra di sezione S_2 .
Si esercita a destra una forza F_1 , normalmente allo stantuffo di minor sezione S_1 . Al liquido si comunica una variazione di pressione:

$$\Delta p = \frac{F_1}{S_1}$$

Essa si trasmette a tutti i punti del liquido, quindi anche sul pistone di sezione maggiore S_2 .
Sul secondo pistone agisce quindi una forza F_2 tale che:

$$\Delta p = \frac{F_2}{S_2}$$

quindi

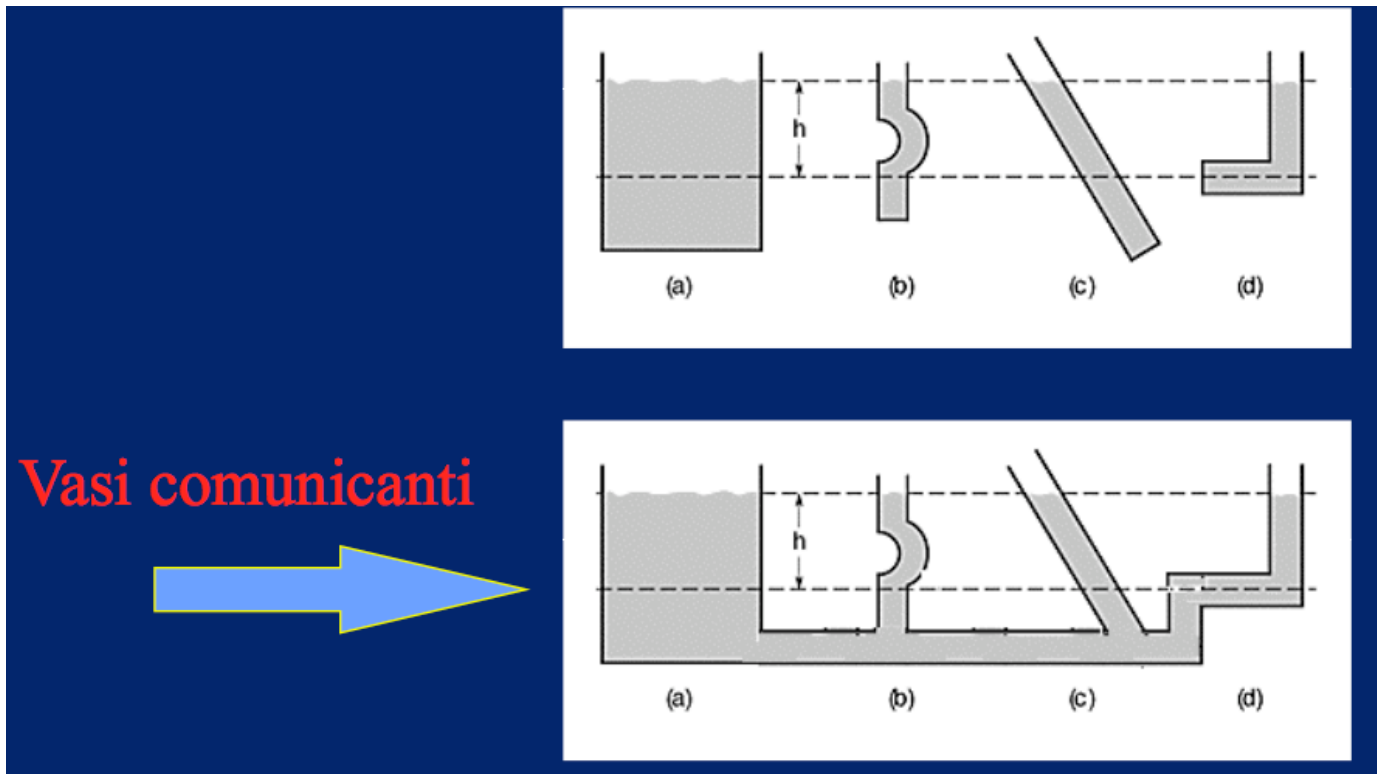
$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

Se S_2 molto maggiore di $S_1 \rightarrow F_2$ molto maggiore di F_1
Si ottengono forze di intensita' elevata partendo da forze piccole.

Vasi comunicanti

I recipienti di forma differente contengono lo stesso liquido che raggiunge in essi la stessa altezza:

la pressione e' la stessa in tutti i punti alla medesima profondita' ed e' indipendente dalla forma del contenitore



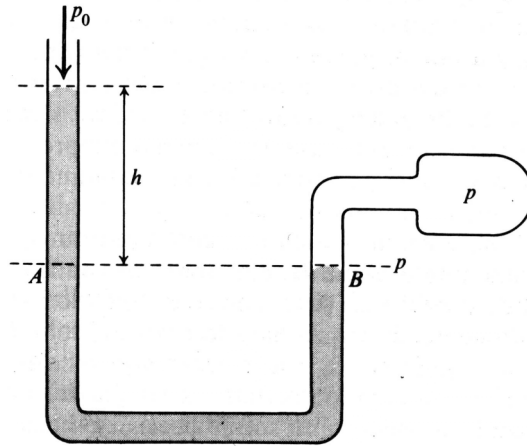
Un liquido in condizione di quiete raggiunge lo stesso livello in recipienti fra loro comunicanti.

Infatti le forze hanno risultante nulla nel tubo comunicante, quindi pressioni ad una certa profondita' h nei contenitori (a), (b), (c), (d) devono essere tutte uguali: per Stevino

$$\rho g h_a = \rho g h_b = \rho g h_c = \rho g h_d$$

$$h_a = h_b = h_c = h_d = h$$

Manometro



Misura pressione nei liquidi e gas.

E' tubo a U contenente mercurio o acqua con ramo aperto verso l'esterno.

Il secondo ramo e' collegato al recipiente

Supponiamo livello ramo aperto e' h rispetto all'altro ramo.

pressione in A = pressione in B (perche' sono allo stesso livello)

Pressione in B e' p (da misurare)

Si puo' ricavare dalla pressione in A nel braccio aperta da altezza h:

$$p - p_0 = \rho g h$$

Barometro di Torricelli

Misura della pressione atmosferica

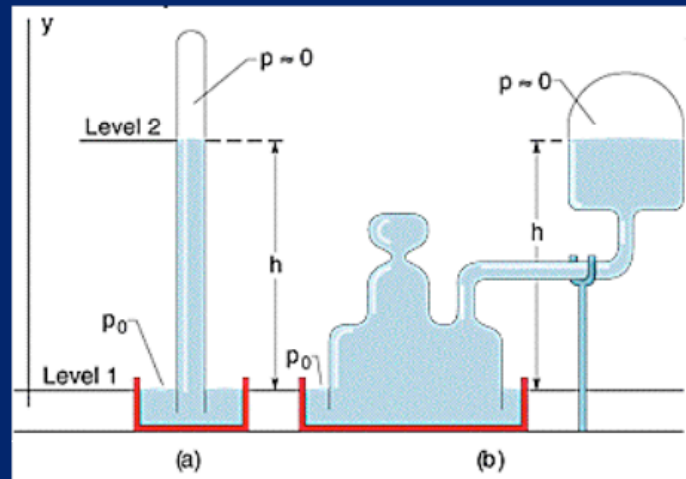
La pressione P_0 è pari alla pressione esercitata dalla colonna di mercurio alta h

$$P_0 = \rho_{\text{Hg}}gh$$

Al livello del mare $h = 760 \text{ mm}$

Per definizione:

$$P_0 = 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ Torr} = 1 \text{ atmosfera}$$



Quesito 1

Supponiamo di considerare un recipiente con due parti cilindriche verticali, 1 e 2 (Fig. F1.4a). Nel recipiente viene messo un liquido, es. acqua.

Qual è la differenza di altezza del liquido nelle due colonne verticali?

Risposta

In una sezione qualunque di area S del tratto orizzontale la forza che si esercita da sinistra verso destra Sp_1 e quella che si esercita da destra verso sinistra Sp_2 , debbono uguagliarsi, per avere equilibrio, (p_1 e p_2 sono le pressioni esercitate dalle due colonne di liquido).

Ma $p_1 = p_H + \rho gh_1$ e $p_2 = p_H + \rho gh_2$

Quindi poiché $p_1 = p_2$ bisogna che $h_1 = h_2$

Questa conclusione si chiama "legge dei vasi comunicanti".

Quesito 2

Consideriamo lo stesso recipiente di figura F1.4a ma questa volta mettiamo nella colonna 1 del mercurio e nella colonna 2 dell'acqua. Questi due liquidi avranno una superficie ben definita di separazione in quanto non sono miscibili.

Il mercurio ha densità $\rho_{Hg} = 13,6 \text{ kg/m}^3$. Quale sarà in questo caso la differenza di quota di due liquidi in equilibrio?

Risposta

Si avrà equilibrio in questo caso quando:

$$\rho_H + \rho_{Hg} gh_1 = \rho_H + \rho_{H_2O} gh_2$$

Da cui $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}} = \frac{1}{13,6 \text{ kg/m}^3} = 0,073$. Le due altezze nelle colonne non sono più uguali, ma stanno fra loro nel rapporto inverso delle loro densità.

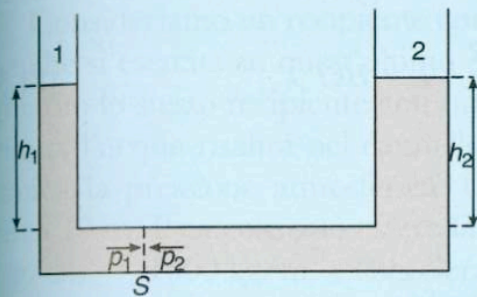


Fig. F1.4a

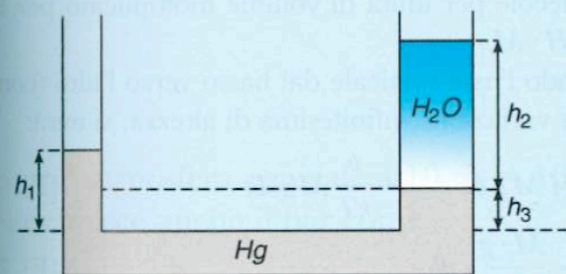


Fig. F1.4b

Quesito 3

In figura F1.4b è rappresentato lo stesso recipiente di figura F1.4a, contenente mercurio e acqua, come nel quesito 2, ma questa volta la superficie di separazione si trova nella colonna di destra. La pressione idrostatica dovuta alla colonna h_1 del mercurio viene in parte compensata da quella dovuta alla colonna h_3 . Potremo scrivere quindi:

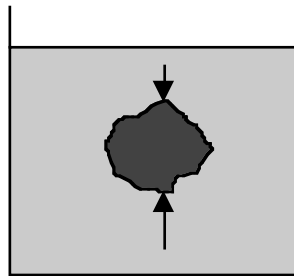
$$\rho_H + (h_1 - h_3) \rho_{Hg} g = \rho_H + h_2 \rho_{H_2O} g,$$

$$\text{da cui: } (h_1 - h_3) = h_2 \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}}.$$

Il principio di Archimede

Un corpo immerso in un fluido (completamente o parzialmente) subisce una spinta dal basso verso l'alto uguale al peso del volume del fluido spostato.

La spinta e' applicata al centro di gravita' del fluido spostato.
E' detta **spinta di galleggiamento**.



Forze risultante e' verso l'alto perche' la pressione aumenta con la profondita' → la forza e' maggiore nella parte inferiore dell'oggetto

Il ragionamento di Archimede e' il seguente:

Supponiamo di sostituire il corpo con un fluido uguale a quello circostante con la stessa forma e volume del corpo stesso.

Il fluido circostante esercita stessa pressione quindi stessa forza che esercitava sul corpo.

La massa di fluido e' in quiete → risultante delle forze totale agenti su questa porzione di fluido e' nulla quindi:

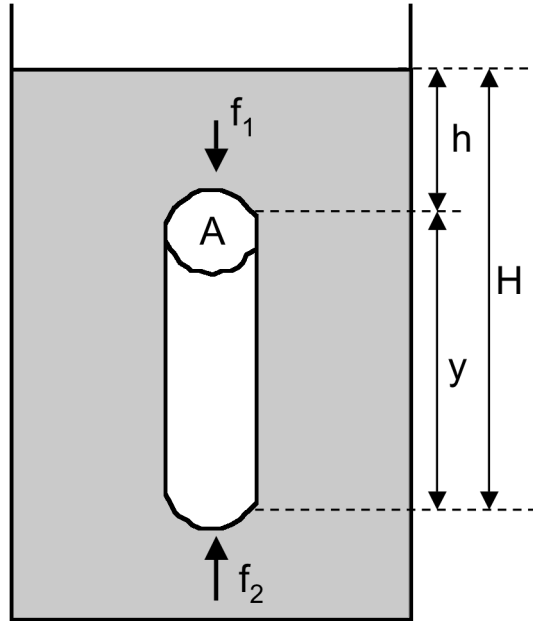
Forza esercitata dal fluido circostante (verso l'alto) e' uguale al peso (verso il basso) della porzione di fluido che ha sostituito il corpo.

La stessa forza e' anche sentita dal corpo quando e' sostituito al fluido.

Se il corpo ha volume V e il fluido ha densita ρ' la spinta di Archimede e':

$$S = \rho' V g$$

Calcolo spinta di Archimede per un corpo geometrico semplice:
cilindro di altezza y , sezione A immerso in un liquido di densità ρ' .
Densità del corpo immerso è ρ .



pressione su superficie superiore

$$p_1 = \rho' g h \rightarrow f_1 = \rho' g h A$$

pressione su superficie inferiore

$$p_2 = \rho' g H \rightarrow f_2 = \rho' g H A$$

Spinta di Archimede e' risultante delle forze:

$$\text{Spinta } S = (f_2 - f_1) = \rho' g A (H - h) = \rho' g V \quad (\text{verso l'alto})$$

Se immergiamo un corpo in un fluido, la spinta di Archimede S che il fluido esercita sul corpo dipende dal volume del fluido spostato, (uguale alla parte immersa del corpo) e dalla densità del fluido.

La spinta di Archimede e' indipendente dalla densita' del corpo.

Esempio

Prendiamo una sfera di ferro e una di piombo, entrambe aventi raggio pari a 12 cm, e immergiamole completamente in un fluido: la spinta di Archimede S che agisce sulla prima e' identica alla spinta di Archimede che agisce sulla seconda.

Per il calcolo di S occorre conoscere solamente la densita' del fluido nel quale sono immerse, oltre al volume del fluido spostato che e' uguale al volume V_{imm} del corpo.

$$S = m_{\text{fluido spostato}} \cdot g = \rho_{\text{fluido}} \cdot V_{imm} \cdot g$$

Calcoliamo la spinta idrostatica che agisce sulle due sfere se vengono immerse in acqua :

$$S = \rho_{\text{acqua}} \cdot V_{imm} \cdot g =$$
$$1000 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3} \pi (0,12 \text{ m})^3 \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \simeq 70,93 \text{ N}$$

Se immergiamo le due sfere nell'olio di oliva la spinta di Archimede risulta inferiore a quella calcolata per l'acqua, perche' la densita' dell'olio ($\rho_{\text{olio}} = 0.92 \text{ g/cm}^3$) e' inferiore a quella dell'acqua.

Al contrario, nel mercurio la spinta ha intensita' 13.6 volte maggiore di quella trovata nel caso dell'acqua ($\rho_{\text{mercurio}} = 13.6 \text{ g/cm}^3$).

Condizioni di galleggiamento

Per sapere se un corpo affonda o galleggia e' necessario calcolare la risultante della forze agenti su di esso: spinta di Archimede e peso del corpo.

$$\text{Spinta } S = f_2 - f_1 = \rho' g A (H - h) = \rho' g V \quad (\text{verso l'alto})$$

$$\text{Peso del corpo } P = \rho g V \quad (\text{verso il basso})$$

$$\text{Risultante } R = \rho g V - \rho' g V = g V (\rho - \rho')$$

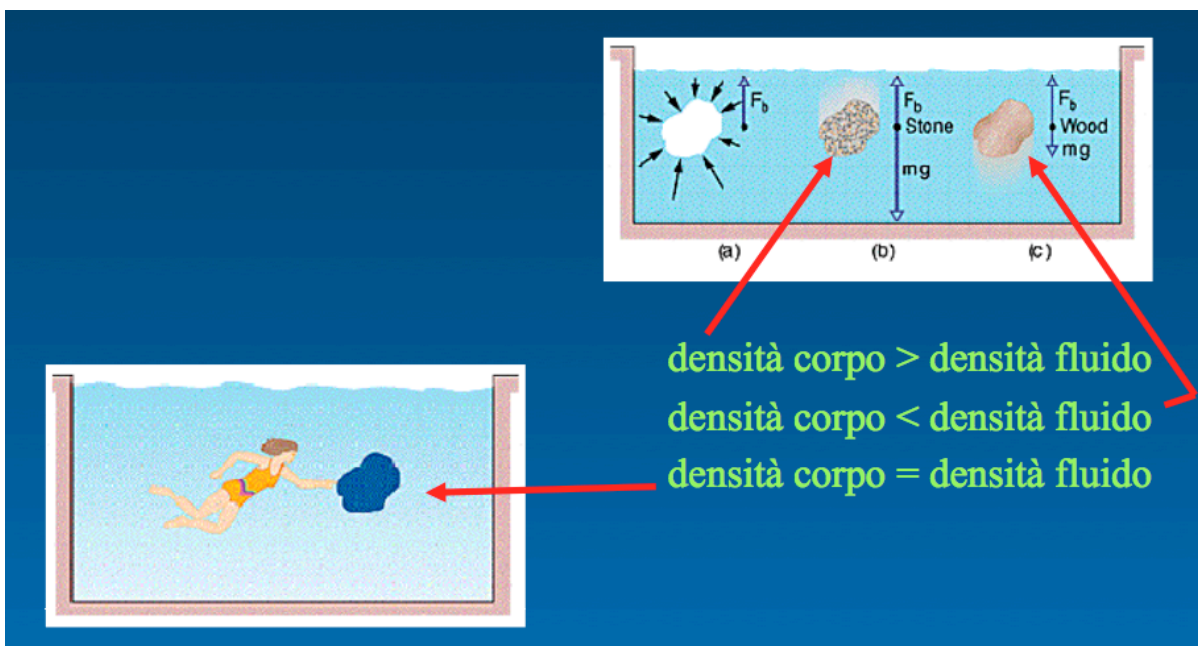
(verso positivo e' verso il basso)

$$\text{Se } (\rho - \rho') > 0 \rightarrow \rho > \rho' \rightarrow R > 0 \text{ corpo affonda}$$

$$\text{Se } (\rho - \rho') = 0 \rightarrow \rho = \rho' \rightarrow R = 0 \text{ corpo in quiete nel liquido}$$

$$\text{Se } (\rho - \rho') < 0 \rightarrow \rho < \rho' \rightarrow R < 0 \text{ corpo galleggia}$$

In questo ultimo caso il corpo sale in superficie e si ferma quando la parte immersa fornisce una spinta uguale al suo peso



Condizione di equilibrio per corpo galleggiante

Corpo densita' ρ e volume V ; liquido densita' ρ_l . Se $\rho < \rho_l$ galleggia
All'equilibrio la spinta di Archimede e' pari al peso del volume del liquido spostato quindi del volume V' della parte immersa del corpo:

$$S = \rho_l g V'$$

Il peso del corpo galleggiante e':

$$P = \rho g V$$

All'equilibrio $S = P$:

$$\rho_l g V' = \rho g V$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho}{\rho_l}$$

Rapporto fra volumi sempre < 1 ed e' sempre piu' grande quanto maggiore e' densita' ρ del materiale galleggiante.

Applicazione :

volume immerso dell'iceberg

Densita' ghiaccio $\rho = 0.92 \text{ g/cm}^3$ e densita' mare $\rho_l = 1.025 \text{ g/cm}^3$

Si ottiene la parte immersa dell'iceberg:

$$\frac{V'}{V} = \frac{0.92}{1.025} \cong 0.90$$



Esempio.

Un tronco di legno stagionato (densità = 450 kg/m^3) viene buttato in mare (densità = 1028 kg/m^3); qual è la percentuale di volume immerso?

$$V_{\text{imm}} = \frac{d_{\text{corpo}}}{d_{\text{fluido}}} \cdot V_{\text{corpo}} = \frac{450 \text{ kg/m}^3}{1028 \text{ kg/m}^3} \cdot V_{\text{corpo}} \simeq 0,44 \cdot V_{\text{corpo}}$$

Il tronco è immerso per il 44% del suo volume (il restante 56% del suo volume è emerso). Il risultato è indipendente dalla forma del corpo. Se, ad esempio, il pezzo di legno è un cubo avente spigolo 180 cm, il livello dell'acqua sarà all'altezza dei 79,2 cm, infatti si moltiplica il valore 0,44 per la lunghezza totale dello spigolo.

Esempio.

Una sfera di acciaio (densità = 7800 kg/m^3), avente la massa di 500 g, è agganciata ad un dinamometro. Cosa segna il dinamometro quando la sfera è in aria? E in acqua?

Il sistema è in equilibrio.

La forza peso della sfera è data da:

$$P = m \cdot g = 0,5 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ N/kg} = 4,9 \text{ N}$$

In aria: poiché nel primo caso non c'è la spinta di Archimede (quella dovuta all'aria è trascurabile), il dinamometro indica $P = 4,9 \text{ N}$.

Nell'acqua: la forza peso (verso il basso) della sfera è sempre $4,9 \text{ N}$, ma ora è presente anche la spinta di Archimede (verso l'alto) S , la risultante è la differenza ($P-S$) che è uguale alla forza indicata dal dinamometro.

La spinta idrostatica vale:

$$F_A = d_{\text{fluido}} \cdot V_{\text{corpo}} \cdot g = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{0,5 \text{ kg}}{7800 \text{ kg/m}^3} \cdot 9,8 \text{ N/kg} \simeq 0,63 \text{ N}$$

Il dinamometro segnerà la differenza tra $4,9 \text{ N}$ e $0,63 \text{ N} = 4,27 \text{ N}$

Misure di densità - densitometro



La densità media di un oggetto, anche non omogeneo, che affonda completamente in acqua può essere determinata mediante 2 misure di forza con un dinamometro.

Mediante una prima misura, appendendo l'oggetto al dinamometro, si determina direttamente il suo peso P .

Si immerge poi l'oggetto, sempre appeso al dinamometro, completamente in acqua e si misura il nuovo peso apparente P' .

A causa della spinta di Archimede P' è minore di P . Si può calcolare S_A :

$$S_A = P - P'$$

Il volume V dell'oggetto completamente immerso è legato alla spinta di Archimede dalla relazione:

$$S_A = \rho_{\text{acqua}} g V$$

Da cui calcolo V :

$$V = S_A / (\rho_{\text{acqua}} g)$$

La misura del peso P in aria permette di determinare la massa come:

$$m = P/g$$

Infine il calcolo della densità può essere effettuato come:

$$\rho_{\text{corpo}} = m/V = (P/g) \rho_{\text{acqua}} g / S_A = \rho_{\text{acqua}} P / S_A$$

Immergendo poi lo stesso corpo in un liquido incognito esso subisce una diversa spinta di Archimede; dalla misura di questa spinta si può calcolarne la densità del liquido:

$$S_A = \rho_{\text{incognito}} g V$$

Esempio.

Un corpo agganciato ad un dinamometro segna 2,68 N; se lo immergiamo in acqua segna 2,33 N. Vogliamo sapere di che materiale e' fatto.

Soluzione

$$P = 2.68 \text{ N}$$

$$P_A = 2.33 \text{ N}$$

La spinta di Archimede S e' data dalla differenza:

$$S = (P - P_A) = (2,68 - 2,33) \text{ N} = 0,35 \text{ N}.$$

Ricordando l'espressione della spinta idrostatica si ha:

$$S = \rho_{\text{acqua}} \cdot V_{\text{corpo}} \cdot g = 0,35 \text{ N}$$

essendo inoltre:

$$P = m \cdot g = \rho_{\text{corpo}} \cdot V_{\text{corpo}} \cdot g = 2,68 \text{ N}$$

Il rapporto P /S e' uguale al rapporto delle densita':

$$P/S = \rho_{\text{corpo}} / \rho_{\text{acqua}} = 2,68 / 0,35 = 7,66$$

Da cui:

$$\rho_{\text{corpo}} = 7,66 \rho_{\text{acqua}} = 7,66 \text{ g/cm}^3$$

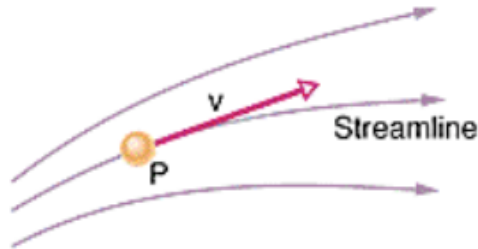
Si tratta del ferro.

IDRODINAMICA

Fluido ideale e': **incomprimibile (densita' costante)**
 assenza di forze di attrito (forze viscosi)

In assenza di forze viscosi c'e' conservazione di energia meccanica
→ non c'e' attrito fra porzioni adiacenti del liquido (in una sezione tutti i punti hanno la stessa velocita')

Linee di flusso sono curve tangenti alla velocita' del fluido in ogni punto del percorso.

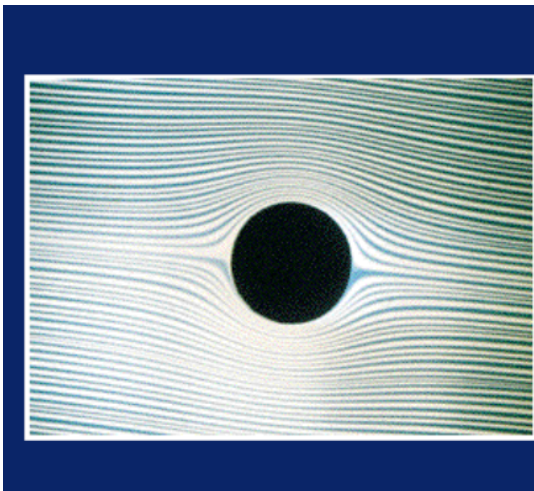


Fluido stazionario. Fluido e' in moto stazionario se le proprieta' in ogni suo punto del percorso non variano nel tempo. La velocita' in ogni punto e' costante nel tempo in modulo, direzione e verso.

Moto laminare = linee di flusso ben definite, ogni particella del liquido segue una traiettoria precisa e non interseca le altre

Moto irrotazionale o turbolento = intersezione di linee di flusso perche' flusso e' troppo rapido o se ci sono ostruzioni

Moto laminare

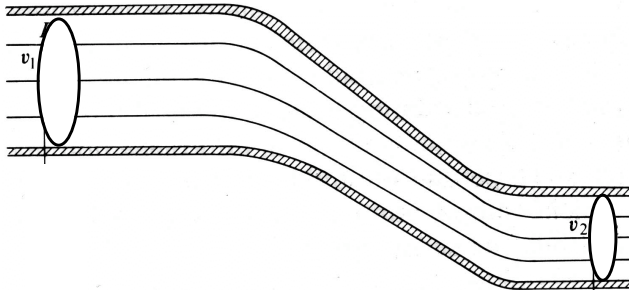


Moto irrotazionale



Principio di continuita' Conservazione della massa

Consideriamo un condotto con due sezione diverse A_1 e A_2 .
In A_1 passa la massa dm_1 nel tempo dt
In A_2 passa la massa dm_2 nel tempo dt



Per conservazione della massa deve essere:

$$dm_1 = dm_2$$

$$dm_1 = \rho A_1 dx_1$$

$$dm_2 = \rho A_2 dx_2$$

La massa che passa nell'unita' di tempo (dividendo per dt) e':

$$\rho A_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho A_2 \frac{dx_2}{dt}$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

La quantita' $v \cdot A$ (sezione * velocita') e' detta **portata**.

E' volume che attraversa la sezione di tubo nell'unita' di tempo.

E' costante in ogni sezione → **equazione di continuita'**

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

velocita' inversamente proporzionale alla sezione

Equazione di Bernoulli

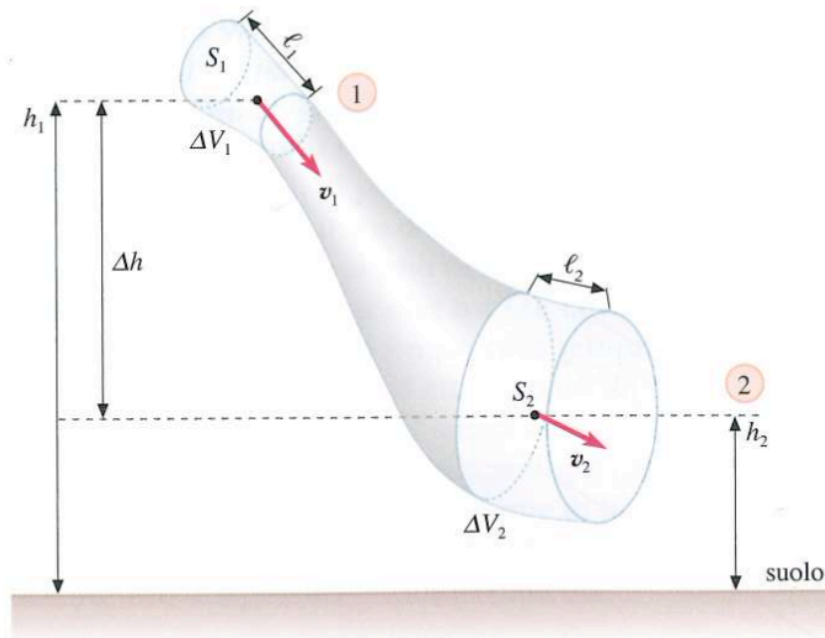
E' il principio di conservazione dell'energia meccanica applicato ad un fluido e lega fra di loro le varie forme di energia per unita' di volume

Ipotesi :

- 1) incomprimibile
- 2) non viscoso
- 3) condotto rigido
- 4) moto stazionario

Il fluido si muove con certa velocita' in un campo conservativo di forze gravitazionali conservativo.

In un condotto l'energia meccanica e' conservata.



Equazione di Bernoulli:

$$p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = E \text{ (costante)}$$

p = pressione in un certo punto del condotto.

E' densita' di energia di pressione.

E' lavoro per unita' di volume fatto dalla forza (p A) dove A e' la sezione del condotto: $L = p A x = p V$

$\rho g h =$ densita' di energia potenziale gravitazionale.

E' lavoro per unita' di volume fatto della forza di gravita' sul fluido per un dislivello h.

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \text{densita' di energia cinetica}$$

Se si considerano due diversi punti del condotto si ha:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

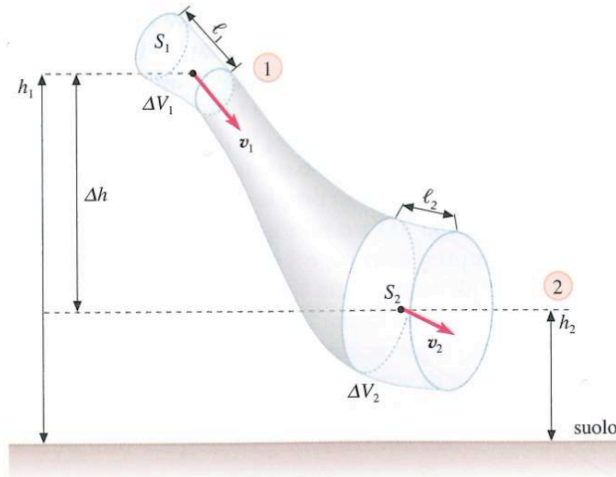
Se $v = 0$ si ha caso idrostatico

$$p + \rho g h = E \text{ (costante)}$$

dove h e' l'altezza dal livello 0.

Si ricava da Stevino.

Dimostrazione del Teorema di Bernoulli



Consideriamo il lavoro compiuto da tutte le forze agenti sul liquido nella regione delimitata fra S_1 e S_2 in un intervallo di tempo Δt in cui si passa dalla configurazione iniziale 1 a quella finale 2.

Il liquido avanza del tratto $l_1 = \Delta t v_1$ nella regione 1 e di conseguenza di $l_2 = \Delta t v_2$ nella regione 2

Per equazione di continuit : $S_1 l_1 = S_2 l_2 = \Delta V$ e la massa contenuta in ΔV risulta $\Delta m = \rho \Delta V$

Lavoro della forza di pressione $p_1 S_1$ sulla superficie S_1 per far avanzare il liquido di tratto l_1 risulta $p_1 S_1 l_1 = p_1 \Delta V$

Lavoro della forza di pressione $p_2 S_2$ sulla superficie S_2 che si oppone nello stesso tempo al moto del liquido e' $- p_2 S_2 l_2 = - p_2 \Delta V$

Lavoro della forza peso agente sulla massa Δm di liquido spostata da quota h_1 a quota h_2 : $\Delta m g (h_1 - h_2)$

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$L = \Delta m g (h_1 - h_2) + p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

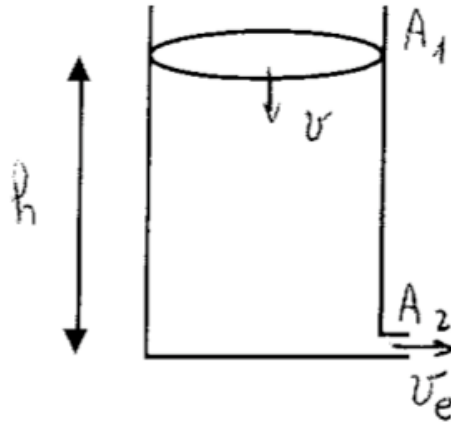
e dividendo per ΔV :

$$\rho g (h_1 - h_2) + p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Esercizio

Calcolo velocità' di efflusso da un recipiente



Pressione all'uscita del foro di sezione A_2 e' la pressione atmosferica p_0
 p_0 e' anche la pressione esercitata sulla superficie del liquido di sezione A_1 .

h = differenza di livello

v = velocità' di abbassamento del liquido

v_e = velocità' di uscita

$$\frac{1}{2} \rho v_e^2 + p_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p_0$$

$$v_e^2 = v^2 + 2gh$$

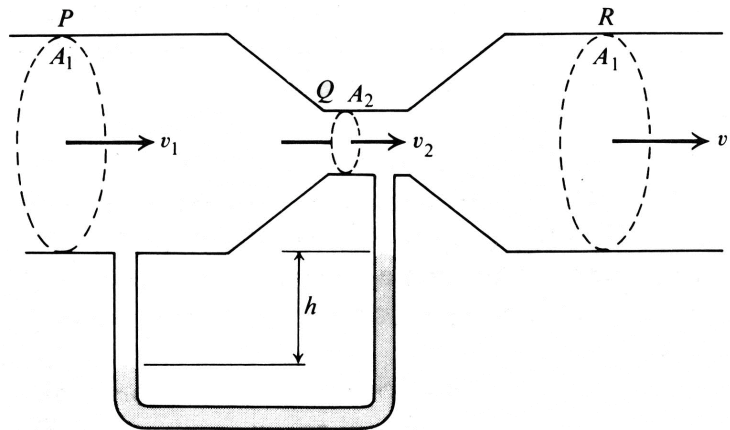
Nel caso in cui il contenitore abbia una sezione A_1 molto maggiore della sezione del foro d'uscita $A_2 \rightarrow v_e \gg v$

Si puo' approssimare l'espressione come:

$$v_e = \sqrt{2gh} \quad \text{Teorema di Torricelli}$$

Nota: la velocità' e' la stessa che si ottiene nella caduta dei gravi con conservazione dell'energia meccanica

Tubo di Venturi



Tubo con strozzatura posto orizzontalmente.
Non c'è differenza di altezza nelle due sezioni.

L'equazione di Bernoulli diventa:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

p_1 è pressione nella sezione A_1

p_2 è pressione nella sezione A_2

Sappiamo dall'equazione di continuità che la portata è costante:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Quindi se $A_1 > A_2$ allora:

$$v_2 > v_1$$

Da Bernoulli, velocità maggiore implica minor pressione, quindi:

$$p_1 > p_2$$

Se un tubo presenta una strozzatura in quel punto la velocità è maggiore e la pressione è minore.

Si puo' misurare la differenza di pressione collegando alle due sezioni un manometro. Se differenza di livello e' h e la densita' del liquido nel manometro e' ρ' :

$$p_1 - p_2 = \rho' g h$$

Flussimetro: dall'equazione di Bernoulli e dall'equazione di continuita' e note le sezioni, si puo' trovare **velocita' del condotto** v_1 e quindi la **portata** misurando la differenza di pressione ($p_1 - p_2$).

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

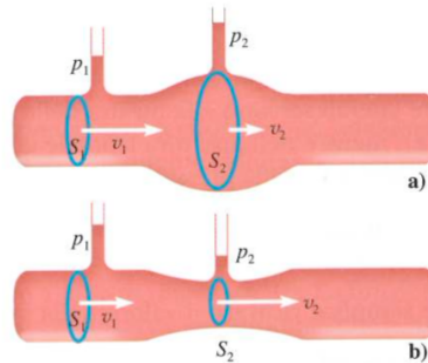
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) v_1^2$$

$$v_1^2 = \frac{2 \rho' g h}{\rho \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)} = \text{costante } h$$

La costante dipende dal tubo di Venturi

Calcolo pressione esercitata dal sangue sulla parete di un'arteria in corrispondenza di una **stenosi (strozzatura) o di un aneurisma (rigonfiamento)**.

Effetto Venturi e' di importanza medica.



Consideriamo la portata dell'arteria costante, nella sezione della **stenosi** (restringimento di vasi) la velocità del sangue aumenta, la pressione e' minore di quella dell'arteria, creando un peggioramento.

In un **aneurisma** (allargamento dei vasi) la velocità diminuisce, la pressione e' maggiore di quella dell'arteria. Quindi la pressione tende a far degenerare l'allargamento.

Per esempio nell'aneurisma:

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} \quad (S_1 < S_2).$$

Quindi velocità nell'aneurisma e' minore ($v_2 < v_1$), quindi pressione e' maggiore perche':

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{dg} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{dg} \quad (h_1 = h_2).$$

Applicazione: aspiratore di Bunsen

Il teorema di Bernoulli viene impiegato nei miscelatori come il tubo *aspiratore di Bunsen*. Si tratta di un tubo A, rastremato all'estremità S (Figura 7.8), in cui viene insufflata aria ad elevate velocità. Superata l'apertura S l'aria fluisce in un altro tubo B, avente un'imboccatura $S' > S$. In base al teorema di Bernoulli, trascurando l'altezza geometrica, nella zona rastremata di sezione S la pressione è minore che altrove (la velocità del fluido è maggiore). Nella zona di depressione S viene allora richiamato il gas della camera C che è collegata, tramite D, ad un recipiente da vuotare. Il gas, convogliato nella zona di depressione S, viene trascinato dal flusso d'aria in uscita che si immette in B.

In questo modo è possibile miscelare in proporzioni accurate gas diversi variando la portata nel condotto A: il dispositivo viene impiegato ad esempio nella combustione di miscele gassose oppure per fornire al paziente gas anestetici miscelati all'aria.

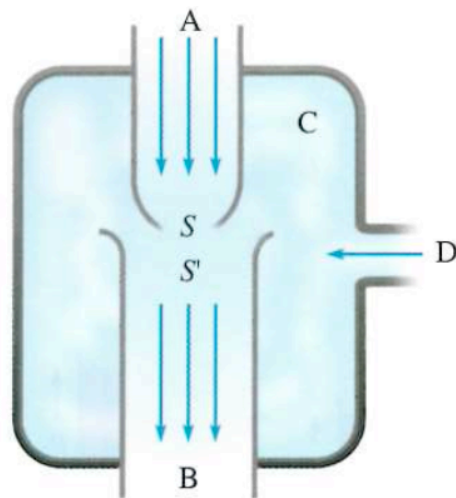


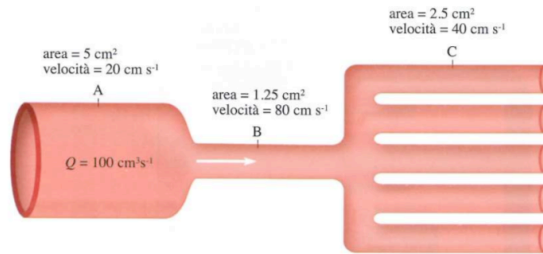
Figura 7.8

Aspiratore di Bunsen. Da un recipiente collegato tramite il condotto D viene aspirato gas. Questo fuoriesce poi dal tubo B miscelato al gas introdotto in A.

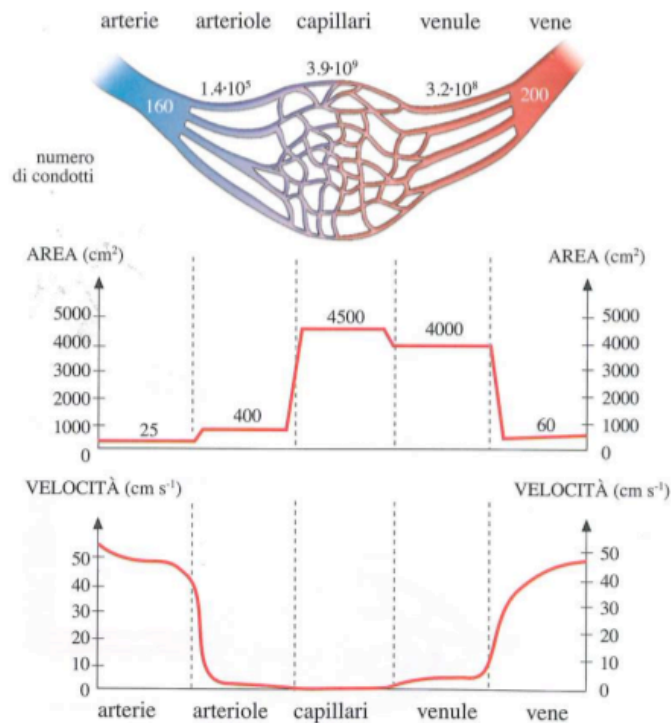
Portata in un sistema idrodinamico

La portata è costante, quindi velocità è inversamente proporzionale all'area della sezione del condotto.

In caso di condotti secondari si calcola l'area della sezione complessiva della rete dei condotti (somma aree delle singole sezioni)



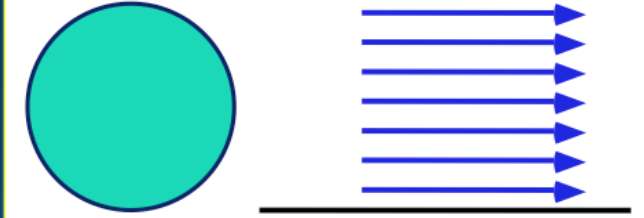
Esempio: in sezione C ci sono 5 condotti uguali di sezione 0.5 cm^2 , area totale è 2.5 cm^2 . La velocità in C è minore che in B: area in B = 1.25 cm^2 , più grande dei singoli rami di C, ma è minore della sezione complessiva.



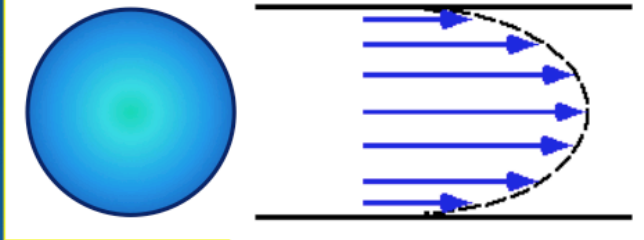
Schema variazione di sezione totale e di velocità media del sangue nei distretti del sistema circolatorio. Area aumenta dall'aorta ai capillari, quindi la velocità nei capillari è molto bassa (~millimetri/sec) facilitando scambi di sostanze fra sangue e tessuti attraverso le pareti capillari.

Fluidi reali

Fluido ideale:
non c'è attrito, la velocità è la stessa su tutta la sezione e non cambia nel tempo (moto stazionario)



Fluido reale a bassa velocità:
moto laminare; moto ancora stazionario
Presenza di attrito, velocità massima al centro decresce verso pareti, velocità zero sulle pareti; profilo parabolico.



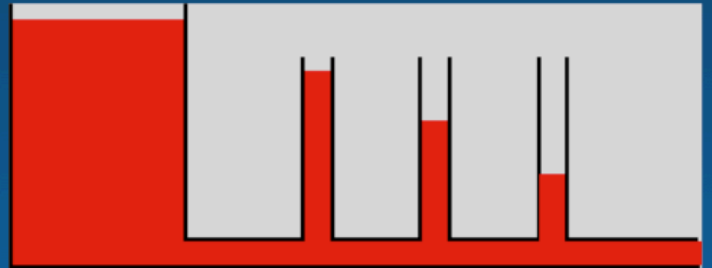
Fluido reale:
Alta velocità, moto turbolento su tutta la sezione e non cambia nel tempo (moto stazionario)



Fluidi reali

Un fluido reale presenta attrito: il flusso può essere mantenuto solo se esiste una forza motrice che vinca l'attrito

In un fluido reale in moto lungo un condotto orizzontale si osserva una caduta di pressione corrispondente all'energia persa per attrito



La proprietà del liquido che determina l'entità della perdita di energia viene chiamata **viscosità** ed indicata col simbolo η

Il teorema di Bernoulli non è più valido, su un tubo orizzontale di lunghezza l a sezione costante le pressioni dovrebbero essere uguali. Si osserva invece un calo di pressione Δp sul tratto di tubo lungo l

$\frac{\Delta p}{l}$ è detto **gradiente di pressione**

La portata Q (volume V che attraversa il tubo per unità di tempo) è:

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta l}$$

Legge di Poiseuille

r = raggio del tubo

η = coefficiente di viscosità

Portata e' proporzionale al gradiente di pressione e dipende dalla quarta potenza del raggio. Per trasferire rapidamente grandi quantita' di liquido conviene aumentare il raggio (foro con diametro doppio portata 16 volte maggiore)

Si definisce la **velocita' media** dalla portata $Q = \text{velocita}' * \text{sezione}$:

$$v_m = \frac{\text{portata}}{\text{sezione}} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l} \frac{1}{\pi r^2} = \frac{r^2 \Delta p}{8\eta l}$$

velocita' e' proporzionale al gradiente di pressione e dipende dal quadrato del raggio r del tubo.

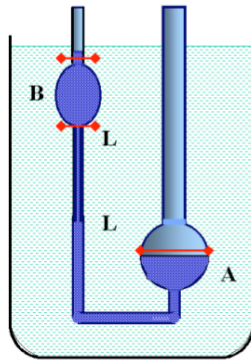
Si definiscono **liquidi newtoniani** se seguono la legge di Poiseuille

La legge di Poiseuille viene usata in alcune tecniche di determinazione della viscosita'. Con **viscosimetri a capillare (viscosimetro di Ostwald)** si determina la viscosita' di un liquido con una misura comparativa: si misura l'intervallo di tempo che un volume del liquido in esame impiega ad attraversare 2 sezioni in un tubo capillare sotto una differenza nota di pressione. Viene fatto lo stesso con un liquido di viscosita' nota.

Misura della viscosità relativa di un liquido con il viscosimetro di Ostwald

La misura della portata nello scorrimento forzato di un fluido lungo uno o più capillari è il principio di base del viscosimetro di Ostwald, che sfrutta il gradiente di pressione dovuto alla gravità per produrre lo scorrimento del fluido.

Il dispositivo è illustrato in fig.1. Entro un grosso contenitore pieno d'acqua a temperatura costante (termostato) è posto verticalmente un capillare LL che è parte di uno dei rami di un tubo ad U. All'imboccatura superiore del capillare c'è un rigonfiamento delimitato da due incisioni, che determina il volume di liquido del quale si misurano i tempi di scorrimento lungo il capillare.

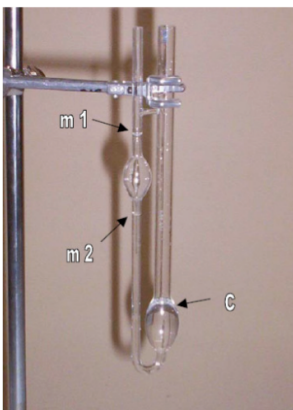


$$\frac{\Delta V}{t_x} = \frac{\pi r^4}{8 \eta_x} \frac{\Delta p_x}{l} = \frac{\pi r^4}{8 \eta_x} \frac{\rho_x g h}{l}$$

In base alla legge di Poiseuille, ΔV è il volume di svuotamento, ΔP_x è la differenza di pressione e h è il dislivello medio del liquido nei 2 rami durante lo svuotamento. In linea di principio si può risolvere η_x e si misura il tempo t_x .

Per ottenere la viscosità incognita η_x , oltre a misurare t_x , occorre misurare la densità ρ_x e si deve conoscere il valore esatto di g , del volume ΔV della bolla B, del raggio r e della lunghezza del capillare. Poiché la conoscenza accurata di tutte queste grandezze e in particolare del raggio r è molto difficile alla misura assoluta è preferibile una misura relativa con un liquido di riferimento del quale sia nota con sufficiente accuratezza la viscosità (di solito acqua distillata). Infatti nel rapporto η_x/η_0 che dà la misura relativa, tutte le caratteristiche geometriche, identiche per entrambi i liquidi, si elidono.

$$\frac{\eta_x}{\eta_0} = \frac{\rho_x \Delta t_x}{\rho_0 \Delta t_0}$$



Sperimentalmente:

Si introduce dapprima acqua dal ramo più largo fino al raggiungimento del livello c . La si aspira quindi per mezzo di una pompetta dal tubo più sottile fino a che il liquido non raggiunge il livello $m1$. Si misura il tempo $t1$ necessario affinché l'acqua passi dall'indice $m1$ all'indice $m2$ per effetto della forza peso.

Si ripete lo stesso procedimento con il liquido di coefficiente di viscosità incognito, misurando anche in questo caso il tempo t

Esercizio

Il raggio dell'aorta negli uomini e' circa 1 cm e l'efflusso cardiaco e' di circa $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ di sangue al minuto.

Quale e' la **velocita' media di flusso** nell'aorta?

$$\text{Portata} = v_m * A$$

$$A = \pi r^2 = \pi (10^{-2})^2 \text{ m}^2$$

$$\text{Portata} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{minuto} = 5 \cdot 10^{-3} / 60 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_m = \text{portata}/A = (5 \cdot 10^{-3} / 60) * (\pi 10^{-4}) = 0.265 \text{ m/s} = 26.5 \text{ cm/s}$$

Coefficiente di viscosita'

Il coefficiente di viscosita' varia molto con la temperatura (decrece rapidamente al crescere della temperatura)

Unita' di misura:

MKS Pa s (Pascal * secondo)

CGS barie * s = poise (simbolo: P)

Poiche' $1 \text{ Pa} = 10 \text{ barie}$ e' anche $1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ P}$

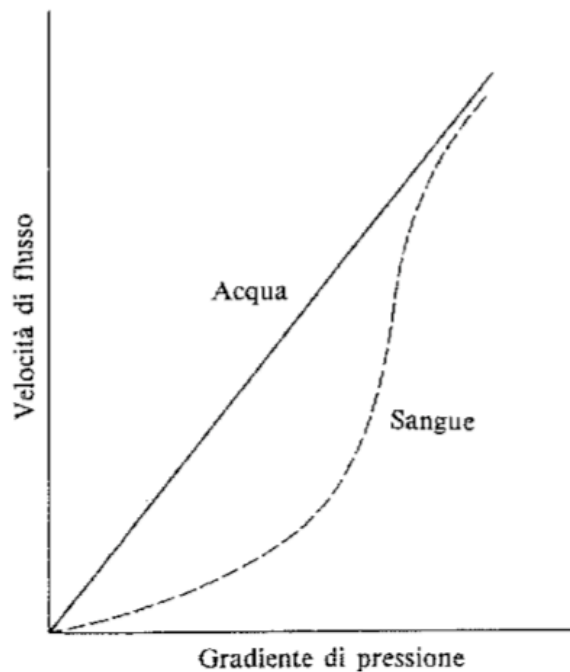
Molto usato il centesimo di poise = cP

Sostanza	Coeff. di Viscosita'
H ₂ O (20 °C)	1.0×10^{-2} Poise
glicerina (20 °C)	1.0 Poise
vetro (20 °C)	10^8 Poise

Il sangue

Il sangue non e' un liquido newtoniano perche' la portata in funzione del gradiente di pressione **non e' lineare**.

Se la differenza di pressione fra due estremita' raddoppia, la portata e quindi la velocita' puo' anche triplicare o quadruplicare.



La viscosita' del sangue diminuisce con l'aumento delle forze di taglio.

Infatti nel sangue sono presenti particelle in sospensione allungate a forma di bastoncini.

Forze di taglio allineano le particelle parallelamente alla direzione del moto e la viscosita' diminuisce.

Legge di Stokes

Viscosita' del fluidi crea una forza contraria al moto su un oggetto in moto nel fluidi (attrito).

Consideriamo una piccola sfera di raggio r e densita' ρ che si muove con velocita' v in un fluido di densita' ρ_0 .

La forza dovuta alla viscosita' e':

$$F = 6 \pi r \eta v \quad \text{Legge di Stokes}$$

Se una sferetta cade per effetto della gravita' le forze presenti sono:

Forza di Stokes (opposta al moto): $6 \pi r \eta v$

Forza peso (nel verso del moto): $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$

Spinta di Archimede (opposta al moto): $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g$

L'equazione del moto e':

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g - 6 \pi r \eta v = ma$$

Si raggiunge la **velocita' di regime costante** quando l'accelerazione $a=0$

$$v = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9\eta}$$

Velocita' di sedimentazione

Dipende dalla forma e dimensioni del corpuscolo e della densita' della sostanza che lo costituisce.

Se in un liquido ci sono molti corpuscoli di natura, forma e dimensione diverse ognuno avra' una **diversa velocita' di sedimentazione**.

Il sistema puo' essere frazionato asportando dal fondo i sedimenti che via via si raccolgono.

Sedimentazione dei globuli rossi.

Si raccolgono sul fondo di una provetta gli **eritrociti o globuli rossi** che si separano per gravita' dal plasma. La misurazione della **velocita' di eritrosedimentazione (v.e.s.)** e' importante per determinare alcuni stati patologici.

Esercizio

Un globulo rosso e' approssimato ad una sferetta di diametro $4 \cdot 10^{-4}$ cm e densita' 1.3 g/cm^3 .

(a) Si calcoli velocita' di sedimentazione a 25°C dei globuli rossi nel plasma (velocita di eritrosedimentazione) sapendo che a tale temperatura il plasma ha densita' 1.03 g/cm^3 e viscosita' 1.65 cP .

(b) Quanto tempo deve trascorrere perche' le particelle sedimentino di 5 cm ?

$$v = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9\eta}$$

$$r = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

$$v = 1.425 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$$

$$t = h/v = 5/1.425 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 9.7 \text{ ore}$$

Metodo di Stokes per misura del coefficiente di viscosita'.

Si misura la velocita' di caduta di una pallina di dimensioni note e densita' nota in un liquido di viscosita' da determinare.

Si riempie un recipiente cilindrico alto, si fa cadere la pallina e si misura il tempo che la pallina impiega per percorrere una parte di cilindro compresa fra 2 tacche.

La prima tacca deve essere in velocita' di regime costante.

Se s e' lo spazio percorso e t e' il tempo impiegato, la viscosita' e' data dalla legge di Stokes:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{r^2}{s} t g (\rho - \rho_0)$$

Numero di Reynolds

Turbolenza

Quando un fluido viscoso è in moto con una certa velocità può accadere che i vari strati di fluido non scorrano più l'uno sull'altro, ma si mescolino creando dei vortici.

Si parla allora di **flusso turbolento**



Per capire se il flusso di un fluido in un condotto di raggio R avviene o no in regime turbolento si può utilizzare il numero di Reynolds

$$N_R = \frac{2\rho\bar{v}R}{\eta}$$

$$N_R < 1000$$



flusso laminare

$$1000 < N_R < 3000$$



flusso instabile

$$N_R > 3000$$



flusso turbolento

Esempio: flusso in un'arteria

Arteria di raggio $R = 2 \text{ mm}$

Velocità media del sangue = 10 cm/s

→ portata = $\pi R^2 v = 1.25 \text{ cm}^3/\text{s}$

A $37 \text{ }^\circ\text{C}$:

densità del sangue = 1.06 g/cm^3 viscosità del sangue = $2.08 \times 10^{-2} \text{ P}$

$NR \sim 200$ → flusso laminare

Supponiamo di ridurre il raggio a 0.3 mm

Se la portata non varia → Velocità media del sangue = $4.4 \times 10^2 \text{ cm/s}$

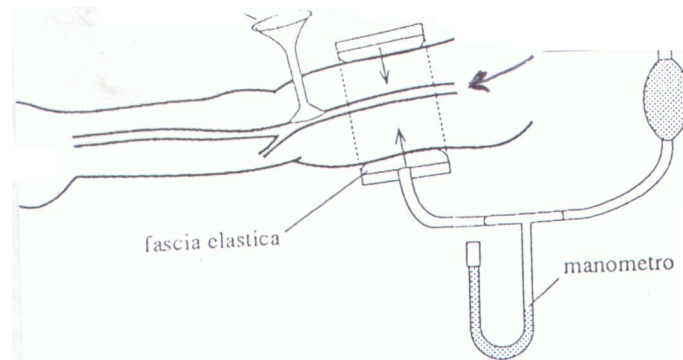
$NR \sim 1300$ → flusso turbolento

→ applicazione: lo sfigmomanometro

Misura della Pressione del Sangue-Sfigmomanometro

La pressione del sangue è la pressione **INTRAMURALE** ovvero la differenza fra la pressione esercitata dal sangue sulle pareti interne del vaso e la pressione esterna al vaso stesso che è la pressione atmosferica.

La pressione arteriosa viene misurata dallo **SFIGMOMANOMETRO** (Materiale non elastico, camera elastica con aria in pressione, pompa aria con valvola, Stetoscopio, Manometro per misurare la pressione nella camera).



Il sistema viene applicato all'articolazione interna dell'avambraccio perché:

- Misure all'avambraccio danno valori molto vicini a quelli del cuore perché sono alla stessa altezza e perché nelle grandi arterie la perdita di Energia e quindi di Pressione per attrito interno è modesta.
- Nell'articolazione interna dell'avambraccio scorre superficialmente l'arteria che può facilmente essere auscultata con lo Stetoscopio.
-

Si pompa aria ad una pressione **$P > \text{Pressione Sistolica}$** in modo da bloccare il trasporto di sangue nella arteria sottostante. Arresto pulsazioni rilevato dallo Stetoscopio.

Agendo sulla valvola si diminuisce lentamente la pressione e con lo stetoscopio si rileva la ripresa del rumore pulsato dovuto alla successiva apertura e chiusura della arteria

($P < P_{\text{sistolica}}$.-- **Pressione Massima**)

Con il diminuire della pressione le pulsazioni allo Stetoscopio cessano di nuovo quando nella fascia la pressione $P < \text{Pressione Distolica}$ (**Pressione Minima**). In questa situazione **l'arteria è sempre completamente aperta , il flusso è laminare e quindi silenzioso.**

La misura ha una precisione di qualche millimetro di mercurio