MECCANICA RAZIONALE

Ing. Civile & Ambientale
Navale

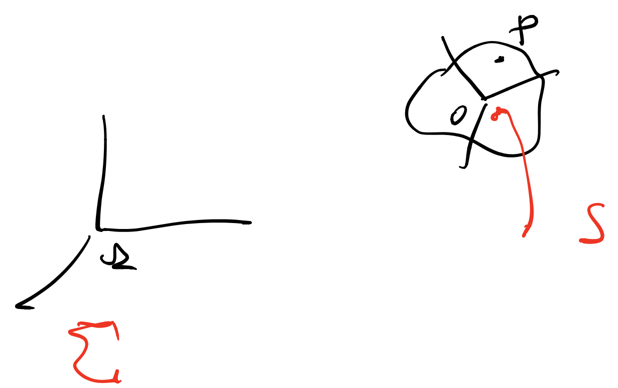
16 marzo 2021

Cinematica del corpo rigido

→ capire come si può muovere un rigido

Teorema di Poisson

$$\frac{d}{dt}\underline{x}_P(t) = \frac{d}{dt}\underline{x}_O(t) + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$$



$\underline{\omega} \longleftrightarrow$ moto

$\underline{\omega} = \underline{0}$ traslazione

$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\, \underline{e}_3$ rotazione intorno all'asse $\underline{e}_3$

$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\, \underline{e}_3 + \dot{\theta}\, \underline{u} + \dot{\psi}\, \underline{k}$ rotazione con punto fisso

$\longrightarrow$ spostamenti virtuali & L.V.

$$L.V. = \sum_{B \in R}' \underset{\text{attive}}{\underline{F}_B} \cdot \delta \underline{x}_B$$

$$\delta \underline{x}_B = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \, dq_i$$

(Spostamenti virtuali reversibili) $\quad L.V. = 0$ all' equilibrio

$$L.V. = \sum_{i=1}^{\ell}{}' \, Q_i \, dq_i$$

Q_i forze generalizzate

Per un rigido

3D $\quad L.V. = \delta \underline{x}_0 \cdot \underline{R} + \underline{\chi} \cdot \underline{M}(O)$

$$\delta \underline{x}_0 = \frac{d}{d\tau} \underline{x}_0 \, d\tau$$

$$\underline{\chi} = \delta\varphi \, \underline{e}_3 + d\theta \, \underline{u} + d\psi \, \underline{k}$$

coordinate libere

Campo di forze : $\nearrow \underline{R} = \sum_{B \in R} \underline{F}_B$ risultante delle forze

$\longrightarrow \underline{M}(O) = \sum_{B \in R}' (\underline{x}_B - \underline{x}_0) \wedge \underline{F}_B$ momento risultante

$$Q_{x_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_1 , \quad Q_{y_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_2 , \quad Q_{z_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_3$$

$$Q_\varphi = \underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3 \qquad Q_\theta = \underline{M}(O) \cdot \underline{u} , \quad Q_\psi = \underline{M}(O) \cdot \underline{k}$$

Rigido 2D (piano)

$$LV_{\substack{\text{rigido}\\ \text{piano}}} = \underbrace{\underline{R} \cdot \delta \underline{x}_0}_{(x_0, y_0)} + \underbrace{\left[\underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3\right] \delta\varphi}_{\delta\varphi}$$

→ atto di moto del rigido

Fissiamo un istante t e studiamo il campo delle velocità del rigido

$$\boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_0)}$$

Teorema di Mozzi:

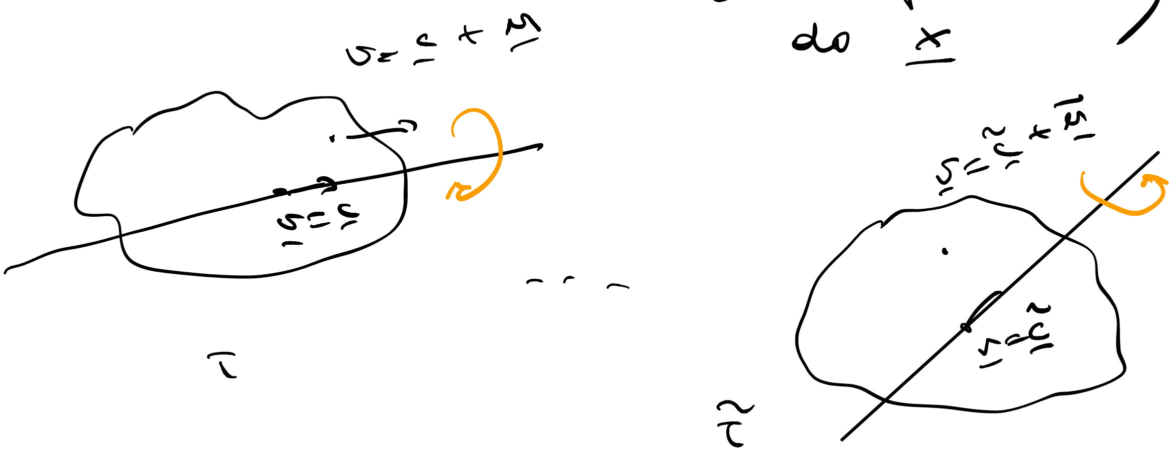
- $\underline{\omega} = \underline{0}$ ⟶ traslatorio
- $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ ⟶ elicoidale

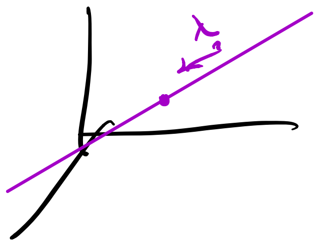
In questo secondo caso: A.I.M.

$$\Longrightarrow \quad \underline{x} = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\omega\|^2} + \lambda\, \underline{\omega} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \in \text{A.I.M.} \qquad \underline{v}(\underline{x}) = \underbrace{\left(\underline{v}_0 \cdot \operatorname{vers}\underline{\omega}\right)}_{\substack{\text{invariante}\\ \text{scalare}}} \operatorname{vers}\underline{\omega} := \underline{c}$$

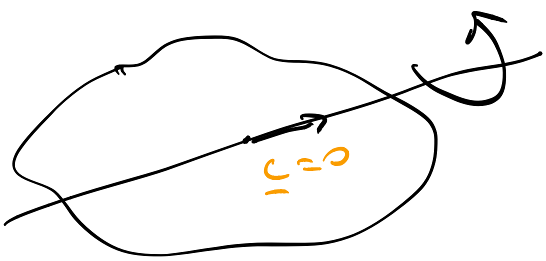
(indipendente da $\underline{x}$)





Caso particolare $\quad \underline{c} = \left(\underline{v}_0 \cdot \operatorname{vers}\underline{\omega}\right) \operatorname{vers}\underline{\omega}$

$$= \underline{0}$$

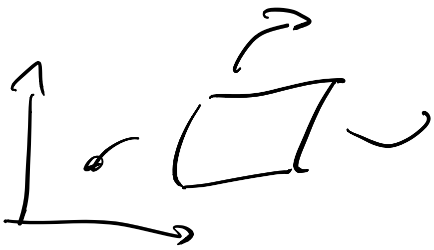


moto puramente rotatorio

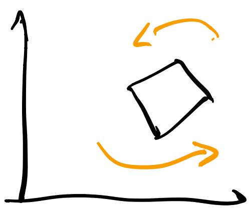
(asse di istantanea rotazione)

Moto rigido piano e centro di istantanea rotazione

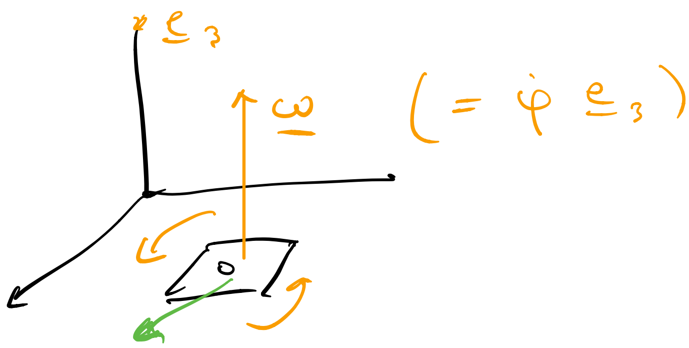
Caso particolare: il moto del rigido (piano) avviene nel suo piano



se $\underline{\omega} \neq \underline{0}$



* $\underline{\omega}$ vettore normale al piano del moto



* $\underline{v}_0$ appartiene al piano del rigido

$$\Rightarrow \quad \underline{c} = (\underbrace{\underline{v}_0 \cdot \text{vers}\, \underline{\omega}}_{\text{sono perpendicolari}})\, \text{vers}\, \underline{\omega} = \underline{0}$$

Nel piano il Teorema di Mozzi si riduce al Teorema di Eulero:

Ogni atto di moto del rigido piano

è : o traslatorio ($\underline{\omega} = \underline{0}$)

o rototorio ($\underline{\omega} \neq \underline{0}$), intorno

ad un punto C (centro di

istantanea rotazione C.I.R.) appartenente

al piano ed è definito da

$$\underline{x}_C = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\underline{\omega}\|^2} \qquad C = C.I.R.$$

<u>Dim</u> Adesso $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_3$, $\underline{v}_0 \cdot \underline{e}_3 = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{c} = \underline{0}$. Quindi l'atto di moto

se non è traslatorio ($\underline{\omega} = \underline{0}$) è

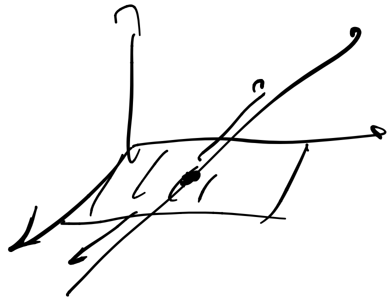
di pura rotazione perché, $\underline{c} = \underline{0}$

Allora consideriamo l'intersezione

dell' A.I.M. con il piano $\underline{e}_1, \underline{e}_2$

(cioè poniamo $\lambda = 0$ nell' A.I.M.)

$$\underline{x}_C = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\underline{\omega}\|^2} \quad \Big(+ \underset{\overset{\|}{0}}{\lambda}\, \underline{\omega}\Big)$$



$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\omega\|^2} + \underbrace{t\,\underline{\omega}}_{t=0}$$

Seconda parte

Conseguenze del Teorema di Eulero

- Traslatorio $(\underline{\omega} = \underline{0})$
- rotatorio $(\underline{\omega} \neq \underline{0})$

$$\underline{x}_c = \underline{x}_0 + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_0}{\|\omega\|^2}$$ centro di istantanea rotazione

$\underline{x}_0, \underline{v}_0 \in$ piano

$\underline{\omega}$ ortogonale

Conseguenze:

1) Se $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ (moto non traslatorio) allora il C.I.R. è l'unico punto con velocità nulla

Infatti $\forall P \in R$, $\underline{v}_P = \underline{v}_C + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$

(per Poisson con $O \equiv C$)

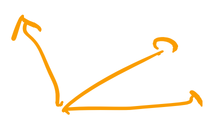
essendo $\underline{v}_C = 0$

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$$

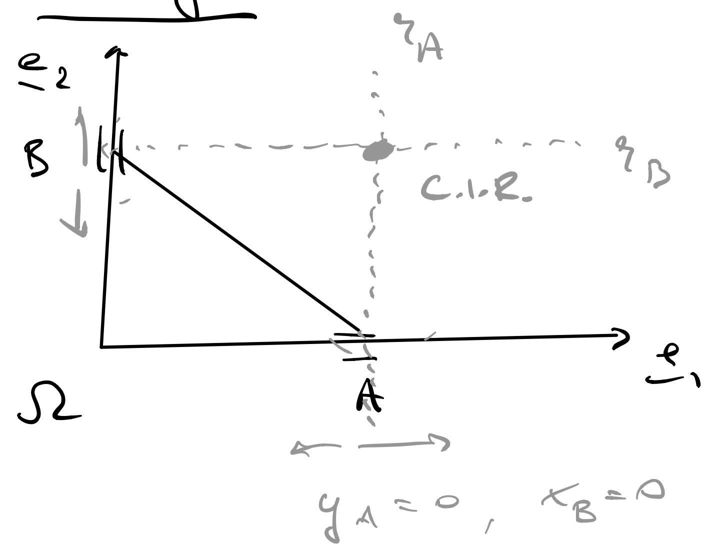
2) Teorema di Chasles

segue che $\forall\, P \in \mathcal{R}$, $\underline{v}_P$ è ortogonale al vettore $(\underline{x}_P - \underline{x}_C)$

$$\left(\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C) \right)$$



Esempio



Asta AB vincolata con due pattini

Consideriamo A.

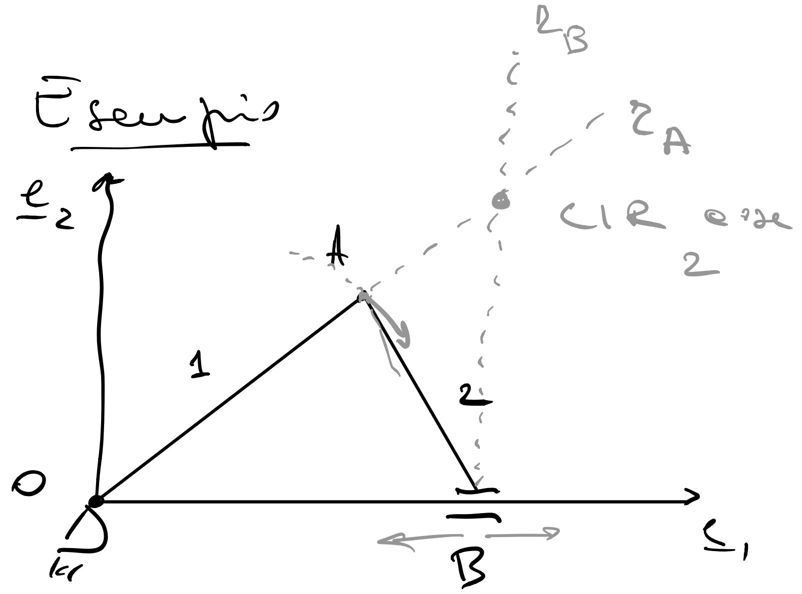
$\underline{v}_A$ a causa del vincolo è diretto lungo $\underline{e}_1$

Quindi $(\underline{x}_A - \underline{x}_C)$ è normale ad $\underline{e}_1$

$\Rightarrow$ $C \in$ retta passante per A e ortogonale a $\underline{e}_1$

Stesso discorso per B. $\underline{v}_B \parallel \underline{e}_2$

<u>Esempio</u>

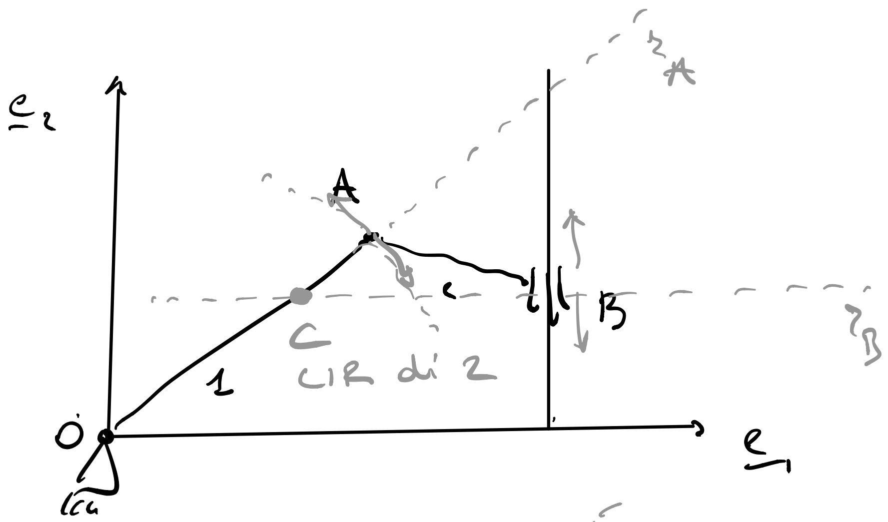


Asta 1 C.I.R. = O

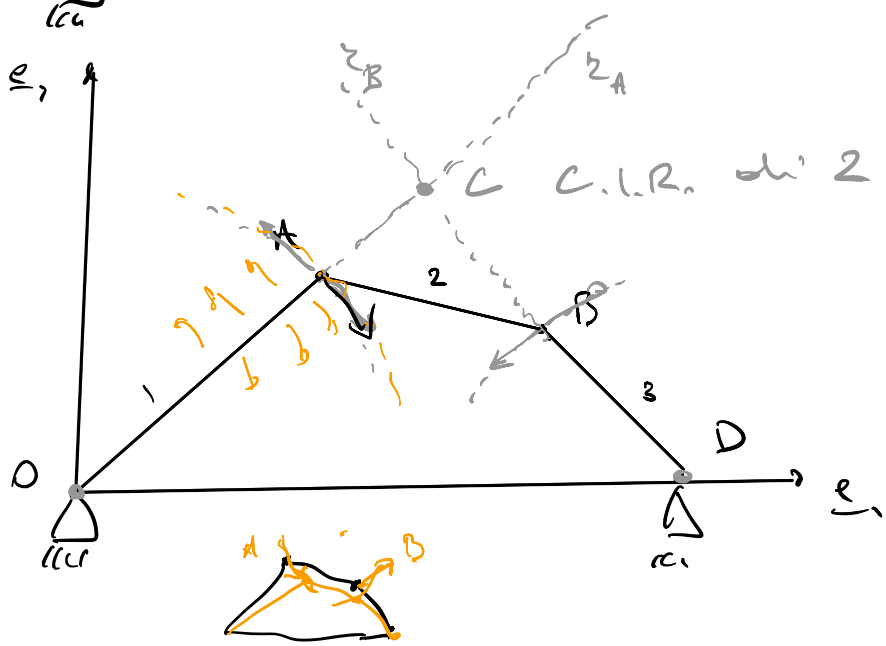
($\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$)

$\underline{v}_P$ ortogonale a $(\underline{x}_P - \underline{x}_C)$

Consideriamo $\underline{v}_B$



Asta 1 : CIR = O



3 aste vincolate

Guardiamo 2

$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$

$\forall P$ di 2

$\underline{v}_P \perp (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$

Scegliamo P = A , P = B

$\underline{v}_A = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_A - \underline{x}_C)$ $\quad C \in r_A$

$\underline{v}_B = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_C) \quad C \in r_B$

In generale: $\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$

spostamento virtuale di P

$$\delta \underline{x}_P = \frac{d}{dt} \underline{x}_P \, \delta t = \underline{v}_P \, \delta t = \underline{\omega} \, dt \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$$

poniamo $\underline{\omega} \, dt = \frac{d\varphi}{dt} dt \, \underline{e}_3 = \delta\varphi \, \underline{e}_3$

$$\delta \underline{x}_P = \delta\phi \, \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)$$

Terza parte

Abbiamo visto alcuni aspetti della cinematica

campo di velocità del corpo rigido $\rightarrow \underline{v}_P$ atto di moto

Sistema di forze $\Rightarrow$ azione sul rigido $\rightarrow \underline{F} = m \, \underline{a} \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2}$

$(L.V. = \sum_i Q_i \, \delta q_i)$

Spostamento virtuale $\longleftrightarrow$ cinematica del rigido

$$\delta \underline{x}_P = \frac{d\underline{x}_P}{d\tau}\,\delta\tau = \underline{v}_P\,\delta\tau$$

$\delta \underline{x}_O$

$\delta\varphi,\ \delta\theta,\ \delta\psi$

CAMPI DI FORZE & FORZE CONSERVATIVE

Esempi di forze

1. forza viscosa $\underline{F} = -\lambda\,\underline{v}$

2. forza di Lorentz $\underline{F} = \frac{q}{c}\,\underline{v} \wedge \underline{B}$

3. forza elastica $\underline{F} = -c\,(\underline{x} - \underline{x}_Q)$

4. forza gravitazionale $\underline{F}_P = -\gamma \frac{m_P m_Q}{\|\underline{x}_P - \underline{x}_Q\|^2}\ \text{vers}\,(\underline{x}_P - \underline{x}_Q)$

Concetto di campo di forze.

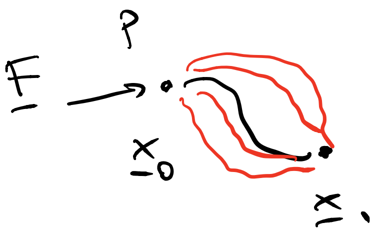
Ad esempio: la massa m_Ω crea un campo di forze = ogni punto dello spazio circondante Ω ha la proprietà che se ci mettiamo m_P, questo è soggetto alla forza gravitazionale.

Campo vettoriale: legge che ad ogni punto dello spazio associa un vettore

Noi ci concentreremo sulle forze <u>posizionali</u>: dipendono solo dalle posizioni.

Sono di particolare importanza le forze conservative $\rightarrow$ energia meccanica totale si conserva

Consideriamo una forza posizionale $\underline{F}$, che agisce su un punto P in $\underline{x}_0$



$\underline{F}$ è conservativa se il lavoro che essa compie per passare da $\underline{x}_0$ a $\underline{x}_1$, non dipende dalla traiettoria, ma solo dalle posizioni $\underline{x}_0$, $\underline{x}_1$

<u>Def)</u> $\underline{F}$ è conservativa se esiste una funzione $V(\underline{x})$ tale che il lavoro di $\underline{F}$ per andare da $\underline{x}_0$ a $\underline{x}_1$ è dato da $-\left(V(\underline{x}_1) - V(\underline{x}_0)\right)$

Consideriamo

$\underline{x}_0 = \underline{x}_E$ configurazione di equilibrio

$\underline{x}_1 = \underline{x}_E + \delta\underline{x}$ facciamo uno spostamento virtuale

Se $\underline{F}$ è conservativa

$$L_V = -\left[V(\underline{x}_E + \delta\underline{x}) - V(\underline{x}_E) \right]$$

PLV che se $\underline{x}_E$ è configurazione di equilibrio:

$$L V = - \left[V(\underline{x}_E + \delta \underline{x}) - V(\underline{x}_E) \right] \leq 0 \quad \forall \delta \underline{x}$$

(oppure $= 0$ se tutti $\delta \underline{x}$ invertibili)

Nostro caso: tutti $\delta \underline{x}$ invertibili e V è regolare

$$L.V. = - \left[V(\underline{x}_E + \delta \underline{x}) - V(\underline{x}_E) \right] = 0$$

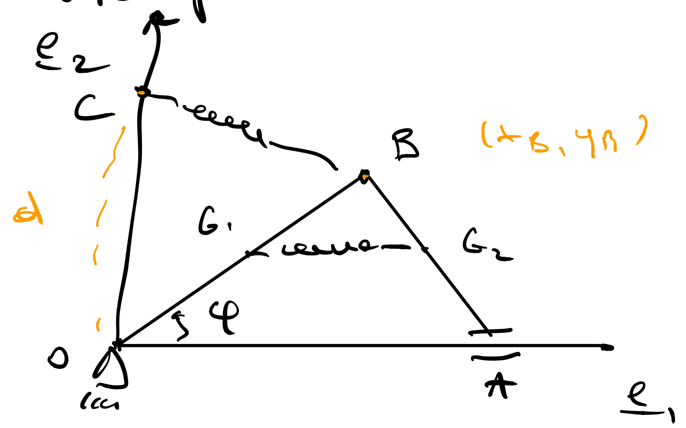
$$= - \nabla V \Big|_{\underline{x}_E} \cdot \delta \underline{x} = - dV$$

differenziale di V

$\underline{x}_E$ di equilibrio $\iff$ $\underline{x}_E$ punto di stazionarietà di V

<u>Equilibrio di sistemi olonomi soggetti a forze conservative</u>

Esempio



$$\overline{OB} = \overline{AB} = L$$

omogenee m e M

$$L.V. = -dV$$

Peso:

$-g\,\underline{e}_2$

$$V_1 = -m\,\underline{g}\cdot \underline{x}_{G_1} - M\,\underline{g}\cdot \underline{x}_{G_2}$$

$$LV = -dV_1 = m\,\underline{g}\cdot \delta\underline{x}_{G_1} + M\,\underline{g}\cdot \delta\underline{x}_{G_2}$$

Molla in B

punto fisso esterno

$$V_2 = \frac{c}{2}\,\|\underline{x}_B - \underline{x}_C\|^2$$

punto del sistema

$-c(\underline{x}_B - \underline{x}_C)$

$$LV = -c(\underline{x}_B - \underline{x}_C)\cdot \delta\underline{x}_B \qquad (\underline{F}_B\cdot \delta\underline{x}_B)$$

$$= -c(\underline{x}_B - \underline{x}_C)\cdot \delta(\underline{x}_B - \underline{x}_C)$$

tanto $\delta\underline{x}_C = 0$

$$= -dV_2$$

- Molla tra G_1 e G_2

$$V_3 = \frac{c}{2} \| \underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2} \|^2$$

$$L_c V_c = - c (\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2}) \cdot d\underline{x}_{G_1} +$$

$$+ c (\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2}) \cdot d\underline{x}_{G_2}$$

$$= - c (\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2}) \cdot d (\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2})$$

$$= - dV_3 \qquad \underline{x} = (x, y)$$

$$\underline{x}_{G_1} = (x_{G_1}, y_{G_1}) \dots$$

Energia potenziale complessiva

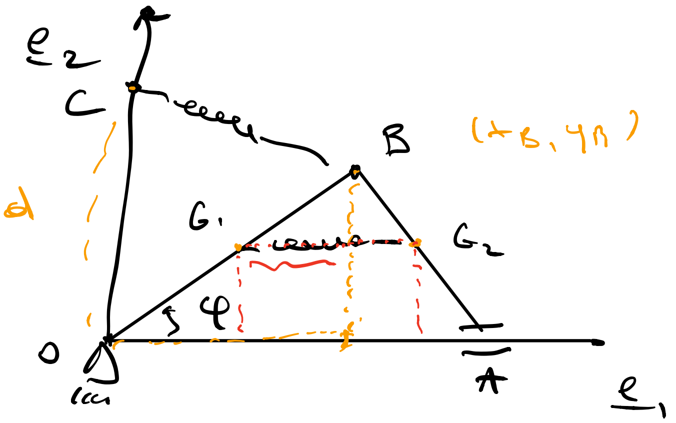
$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = \underline{mg\, y_{G_1} + Mg\, y_{G_2}} + \frac{c}{2} \left[(x_B \underline{e}_1 + y_B \underline{e}_2) + \right.$$

$$\left. - (d \underline{e}_2) \right]^2 + \frac{c}{2} (\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2})^2$$

$$= mg\, y_{G_1} + Mg\, y_{G_2} + \frac{c}{2} \left[x_B^2 + (y_B - d)^2 \right]$$

$$+ \frac{c}{2} (x_{G_1} - x_{G_2})^2$$



$\downarrow g$

$OB = BA = L$

$$y_{G_1} = y_{G_2} = \frac{L}{2}\sin\varphi$$

$$x_B = L\cos\varphi$$

$$y_B = L\sin\varphi$$

$$(x_{G_1} - x_{G_2})^2 = (L\cos\varphi)^2$$

$$\left[(x_B \underline{e}_1 + y_B \underline{e}_2) - (d\, \underline{e}_2)\right]^2 =$$

$$= \left[x_B\, \underline{e}_1 + (y_B - d)\, \underline{e}_2\right]^2$$

$$= x_B^2 \underbrace{\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1}_{=1} + x_B (y_B - d) \underbrace{\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2}_{0} + (y_B - d)^2 \underbrace{\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2}_{1}$$

$$= x_B^2 + (y_B - d)^2$$

$$V = (m + M)\, g\, \frac{L}{2}\sin\varphi + \frac{c}{2}\left[L^2\cos^2\varphi + \right.$$

$$\left. + (L\sin\varphi - d)^2\right] + \frac{c}{2} L^2 \cos^2\varphi$$