SISTEMI DINAMICI

16 marzo 2021

Dinamica $\longrightarrow$ $$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t))$$

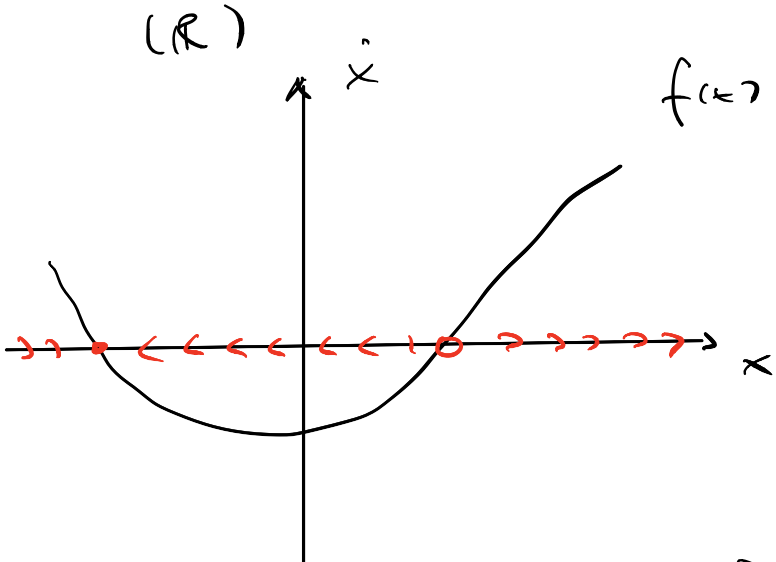
$$\longrightarrow \quad \varphi^t : M \longrightarrow M$$

Sistemi dinamici continui 1-dim

$\dot{x} = f(x)$ $\qquad$ $x = x(t)$ funzione di una variabile reale a valori in $\mathbb{R}$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ liscia

$(\mathbb{R})$

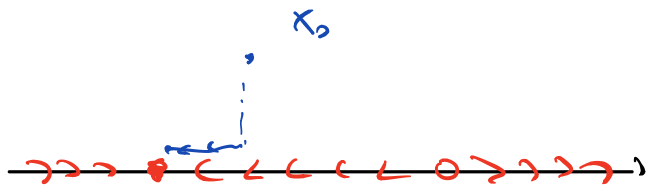


$\leftarrow$ asse x è lo spazio delle fasi

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ $\quad f(x) > 0$

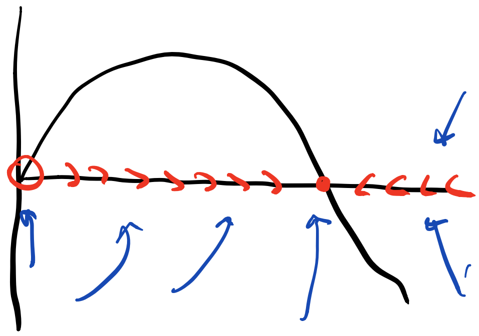
$\leftarrow\leftarrow\leftarrow$ $\quad f(x) < 0$

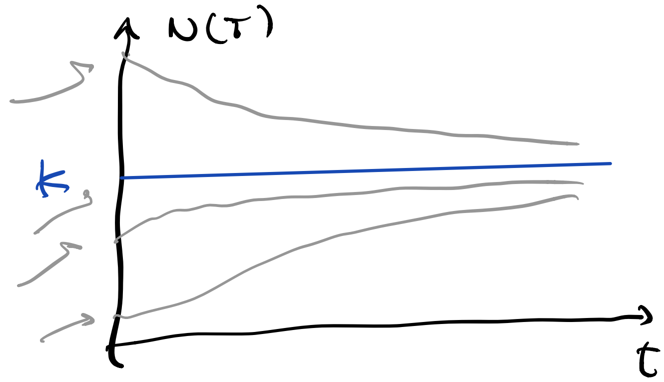
Ritratto di fase



Dinamica popolazioni

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$





Biforcazioni

"cambio qualitativo della dinamica al variare di un parametro"

$$\frac{d}{dt}x(t) = f_\mu(x(t)) = f(x;\mu)$$

x^* punto fisso, μ^* t.c. $\boxed{f_{\mu^*}(x^*)=0}$, $\boxed{f'_{\mu^*}(x^*)\neq 0}$

$\longrightarrow$ punto critico iperbolico

[$f_\mu(x)=0$]

"posso invertire per trovare $\bar{x}(\mu)$"

Teorema funzione implicita $\longrightarrow$ punto critico non può essere rimosso con una variazione dei parametri.

Ricordiamo: sotto quali condizioni un'eq del tipo $g(x,\mu)=0$ può essere risolta univocamente per determinare una funzione $x = x(\mu)$.

Nel nostro caso: il Teorema implica che $\exists$ un'unica funzione regolare $\bar{x}(\mu)$ per $\mu \in U$ (U aperto di μ^*) tale che

U $\mathbb{R}$

μ^* $\quad f_{\mu^*}(x^*)=0$

$$\begin{cases} \bar{x}(\mu^*) = x^* \\ f_\mu(\bar{x}(\mu)) = 0 \end{cases}$$ identicamente in μ

$$f_{\mu^*}(x^*)=0 \qquad f_\mu(\bar{x}(\mu)) = 0$$

A parole: punti critici iperbolici permangono per piccole variazioni del parametro μ

Punto iperbolico ($\boxed{f'_{\mu}(x^*) \neq 0}$) $\to$ funzione implicita $\to$ al variare di μ ("poco") $\to$ punto critico è strutturalmente stabile.

Cosa succede per punti critici non iperbolici $\to$ biforcazioni

<u>Biforcazione Tangente</u>: punti critici vengono creati o distrutti

Consideriamo $\dot{x} = \varepsilon + x^2 = f(x;\varepsilon)$

Punti fissi $f(x;\varepsilon) = 0 \to x^2 = -\varepsilon$

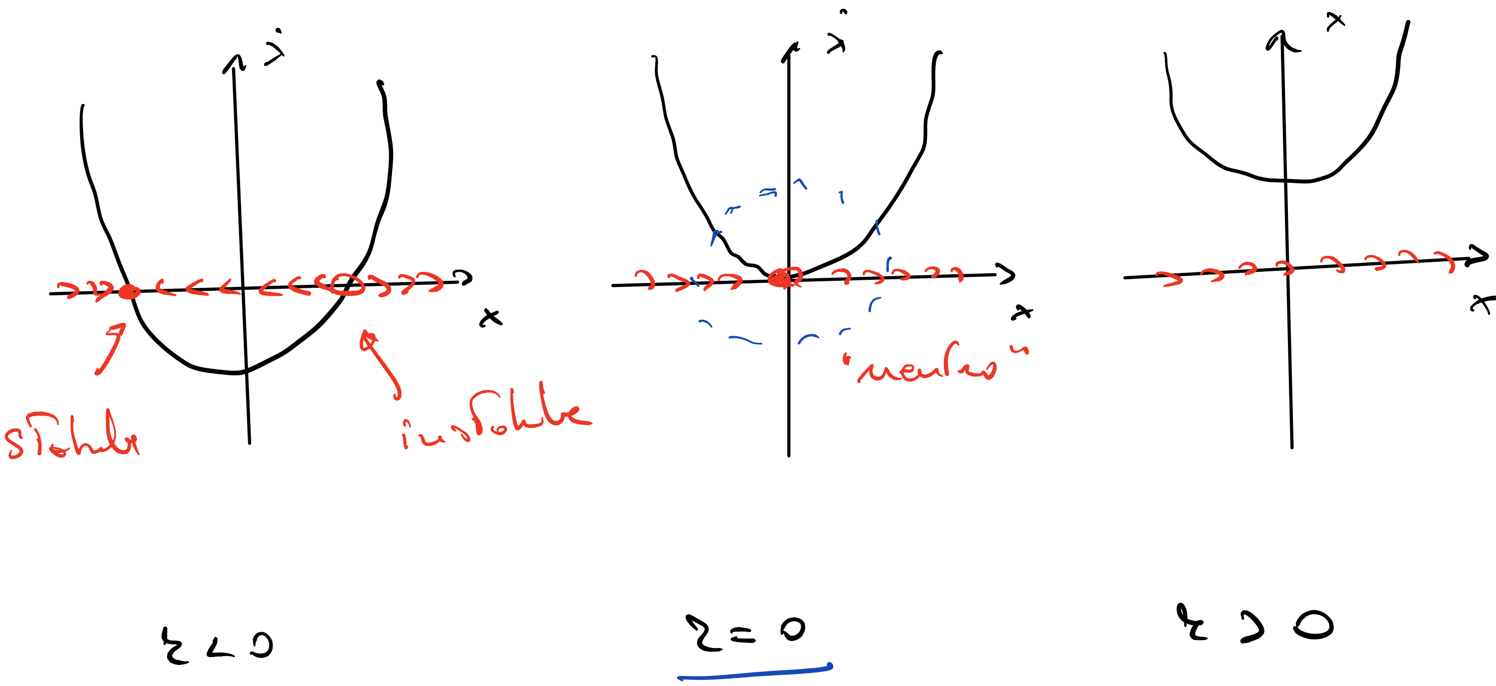
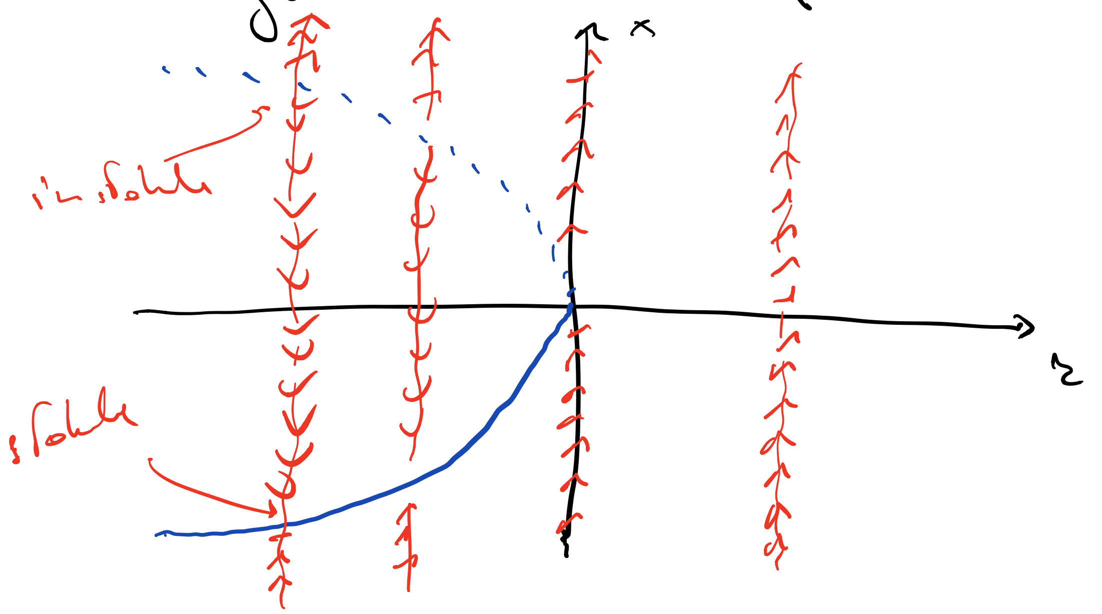


Diagramma di biforcazione ($r = -x^2$)



linea continua $\downarrow$ stabile

linea tratteggiata $\downarrow$ instabile

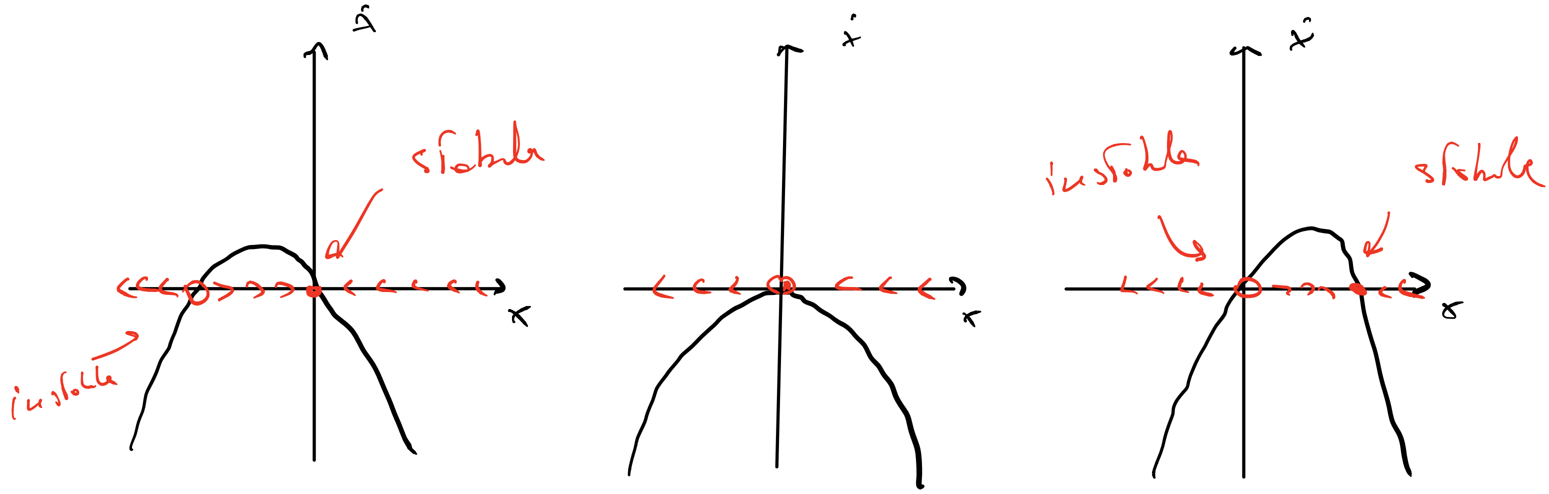
Idea $\quad \dot{x} = r + x^2 \quad$ "forma canonica"

$\dot{x} = f(x,r)$ sotto determinate condizioni ha un'espansione in serie vicino al punto critico $\quad \dot{x} = f(x,r) \sim r + x^2$

Seconda parte

<u>Biforcazione transcritica</u> In questo tipo di biforcazione cambia la stabilità di un punto fisso

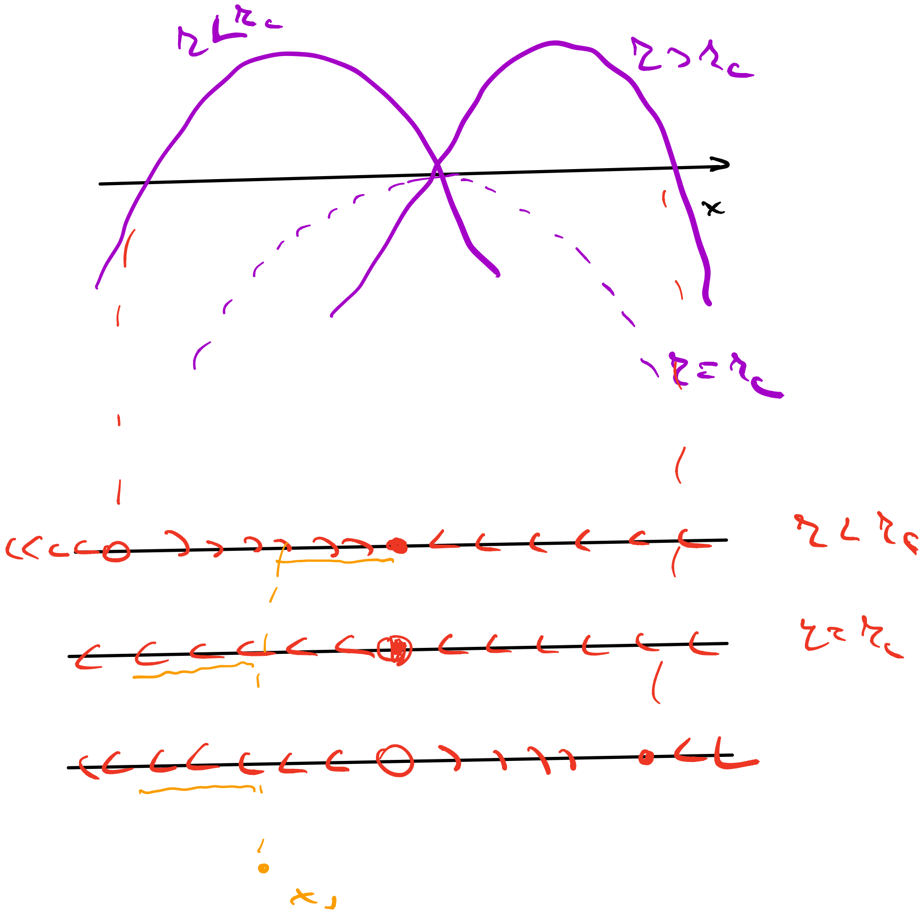
$$\dot{x} = rx - x^2 \longrightarrow x^* = 0 \text{ è punto critico } \forall r$$



$r < 0$ $\qquad$ $r = 0$ $\qquad$ $r > 0$

Punti critici $\quad rx - x^2 = 0 = x(r - x)$

All'aumentare di r, due punti critici si fondono al valore $r_c = 0$. Quando $r > 0$, $x^* = 0$ diventa instabile



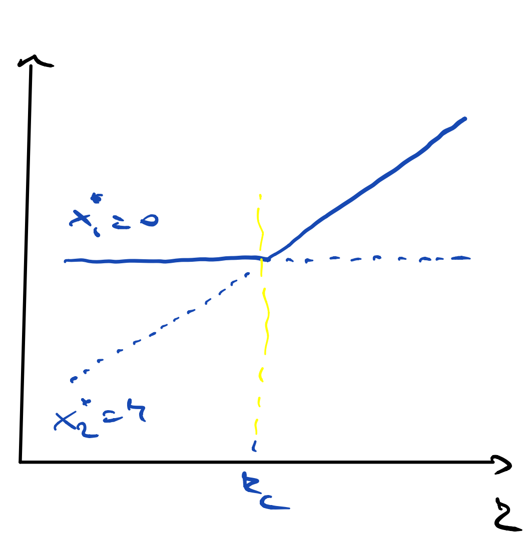


diagramma di biforcazione

Esempio $\left[\ \dot{x} = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})\ \right]$

biforcazione transcritica a $x=0$

Vicino a $x=0$

$$\dot{x} \simeq x - a\left(bx - \frac{1}{2}b^2x^2\right) + o(x^3)$$

$$= (1-ab)\,x + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x^2 + O(x^3)$$

struttura di $\dot{x} = rx - x^2 = x(r-x)$

Secondo punto critico:

$$(1-ab) + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x = 0$$

$$x^* = \frac{2(ab-1)}{ab^2}$$

$r \longrightarrow (1-ab)$

Biforcazione transcritica per $1-ab=0$ curva di biforcazione

$(r_c = 0) \Rightarrow \boxed{ab = 1}$

Invece di avere un solo parametro r $(r = r_c = 0)$

abbiamo due parametri $\rightarrow$ biforcazione

$ab = 1$

Biforcazione a forchetta (pitchfork)

Può essere super-critica o sub-critica

$$\dot{x} = rx + x^3$$

La forma normale è

$$\dot{x} = rx - x^3$$

Notiamo la simmetria $x \longrightarrow -x$

$$\frac{d}{dt}x = rx - x^3 \longleftrightarrow -\frac{d}{dt}x = -rx + x^3$$

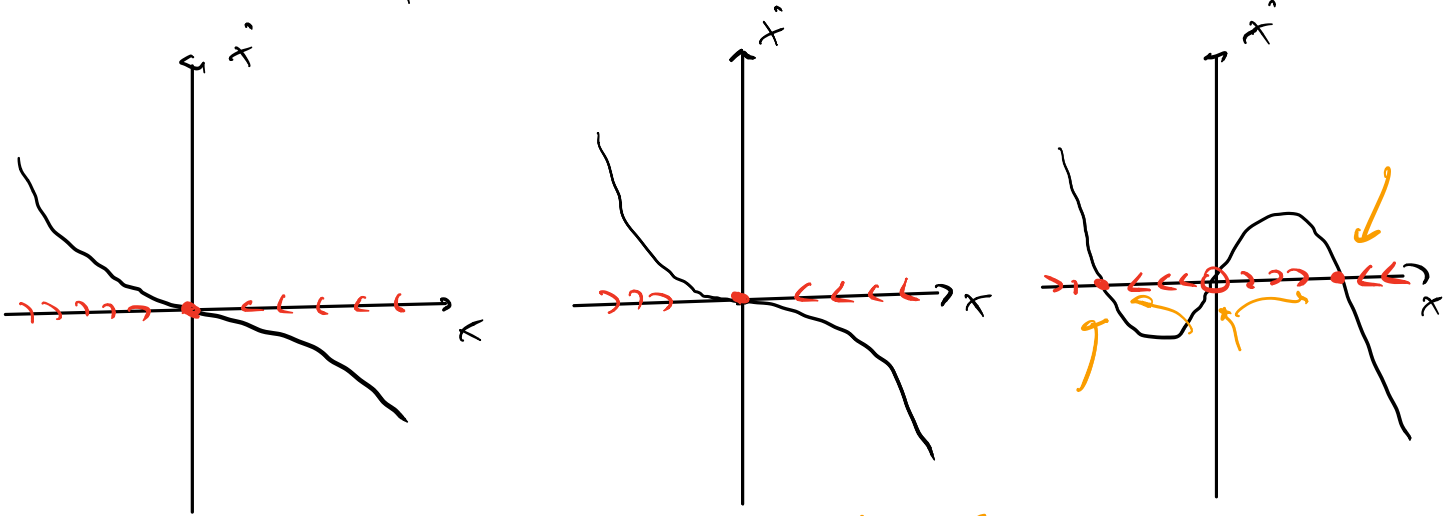
Il punto $x^* = 0$ è punto di equilibrio per ogni valore di r

$$rx - x^3 = x(r - x^2)$$

$$x = 0$$

$$x^2 = r \leftarrow$$

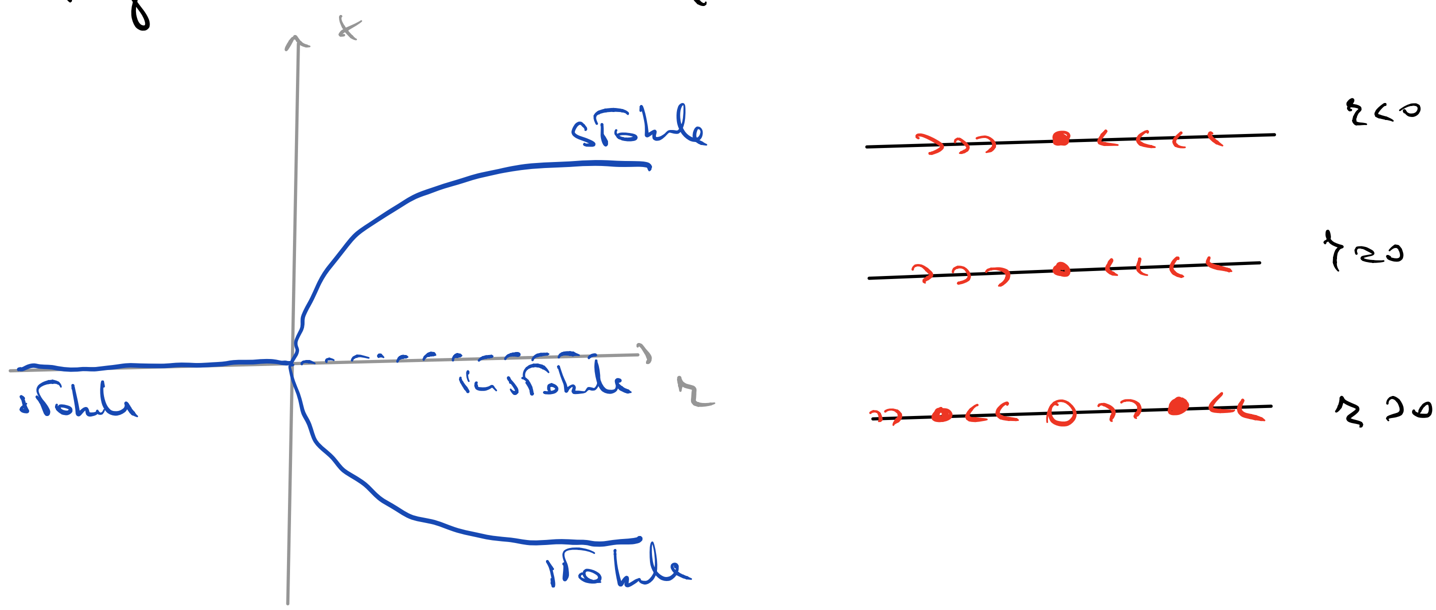
Per $r < 0$, $x^* = 0$ è l'unico punto critico



$r < 0$ $\qquad$ $r = 0$ $\quad \dot{x} = -x^3$ $\qquad$ $r > 0$

All'aumentare di r, quando $r>0$ l'origine diventa instabile e appaiono due nuovi punti critici per $x^* = \pm\sqrt{r}$ entrambi stabili.

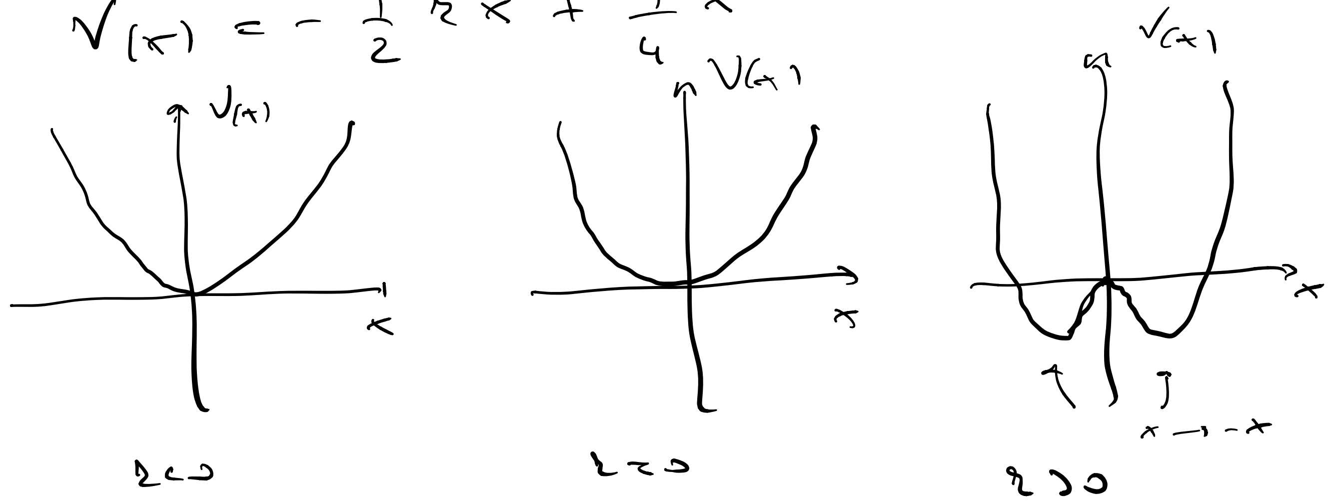
Diagramma di biforcazione



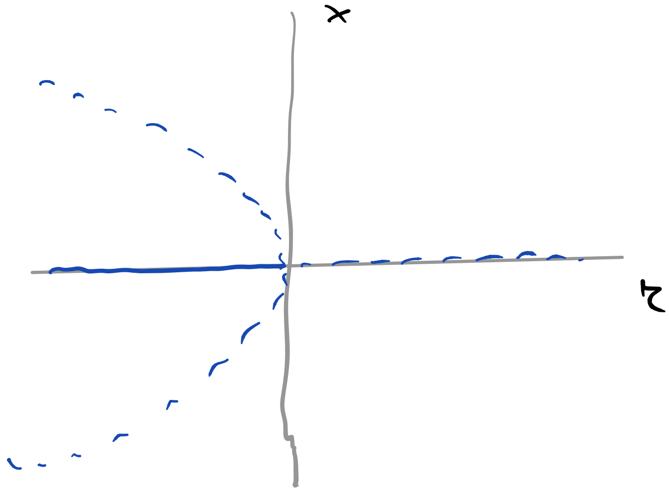
Commenti

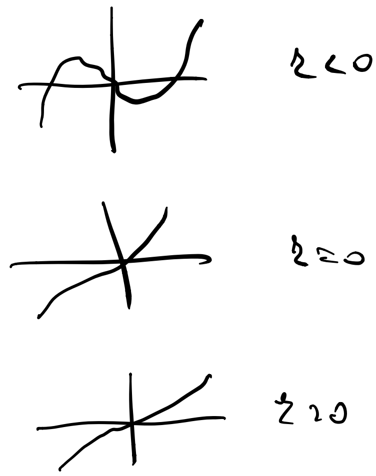
•) $\dot{x} = rx - x^3 = f(x) = -\dfrac{dV}{dx}$

$$V(x) = -\frac{1}{2} r x^2 + \frac{1}{4} x^4$$

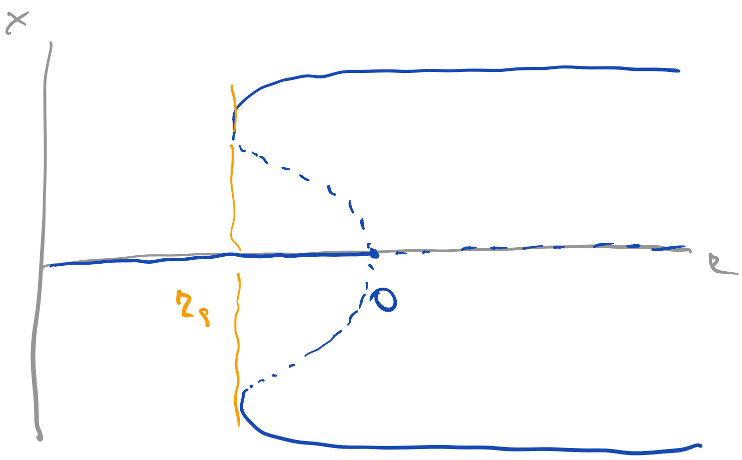


•) biforcazione subcritica $\dot{x} = rx + x^3$





<u>Esercizio</u> disegnare il diagramma di biforcazione $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$



r_s valore per il quale nascono dei punti fissi $\neq 0$