Matrice S

[S.5.1]

Le leggi della MECCANICA QUANTISTICA descrivono come un sistema fisico manipola stati in uno SPAZIO DI HILBERT.

Nella teoria quantistica dei campi lo spazio di Hilbert è sostituito dallo spazio di Fock: la somma di spazi di Hilbert per stati con numero arbitrario di particelle:

$$\mathcal{F} = \oplus_n \mathcal{H}_n \quad \leftarrow \text{2}^{\text{nd}} \text{ quantization}$$

Le osservabili sono riconducibili a PROBABILITÀ di ottenere un certo stato finale a partire da un certo stato iniziale del sistema.

Sono date dal modulo quadro del prodotto interno fra i due stati:

$$dP \sim |\langle f; T_f | i; T_i \rangle|^2 \leftarrow$$

Rappresentazione di Schrödinger: stati evolvono con il tempo

La TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI si occupa di calcolare tali ampiezze di scattering per sistemi relativistici.

Stati in e out [IZ 5.1.2, Srednicki 2.1, R 2.1]

Interessandoci principalmente a problemi di scattering, pensiamo di preparare il sistema in uno stato iniziale $|in; T_i\rangle$ (con $T_i \to -\infty$) e di voler studiare la sua evoluzione nello stato finale $\langle out; T_f|$ (con $T_f \to +\infty$).

Gli stati a $t = \pm\infty$ sono STATI ASINTOTICI e si assume che le interazioni modifichino il sistema in un intervallo di tempo finito.

Assunzioni:

- Gli stati dello spazio di Fock sono generati dall'azione di CAMPI LIBERI $\varphi_{in}(x)$ sullo stato di vuoto (unico e stabile) $|0\rangle$.
- Osservabili fisiche sono espresse in termini di $\varphi_{in}(x)$.

L'idea è che l'interazione venga spenta adiabaticamente per $t \to \pm\infty$. Questo è il caso per processi di scattering fra pacchetti d'onda ben separati spazialmente.

Gli stati in sono generati a partire dal vuoto $|0\rangle_{in}$

$$|\vec{p}\rangle_{in} = \sqrt{2\omega_p}\, a^\dagger(\vec{p})_{in}\, |0\rangle_{in}$$

Stati out sono un'altra rappresentazione della stessa teoria libera. Esiste perciò un isomorfismo che mappa fra i due:

$$S\,|i\rangle_{out} = |i\rangle_{in} \quad \leftarrow \text{ MATRICE } S$$

$$_{out}\langle f | i \rangle_{in} = {}_{in}\langle f | S | i \rangle_{in} \equiv S_{fi}$$

Proprietà della matrice S

- Stabilità del vuoto: $|0\rangle_{out} = |0\rangle_{in} = |0\rangle$, $\boxed{\langle 0|0\rangle = 1}$
- Stabilità di stati a 1 particella: $\boxed{|\vec{p}\rangle_{out} = |\vec{p}\rangle_{in} \equiv |\vec{p}\rangle}$
- $\phi_{in}(x) = S\,\phi_{out}(x)\,S^{-1}$ Possiamo esprimere tutto in termini di stati in
- S è unitaria:

$$\delta_{ji} = {}_{out}\langle j | i \rangle_{out} = {}_{in}\langle j | S S^\dagger | i \rangle_{in} = {}_{in}\langle j | i \rangle_{in} \rightarrow \boxed{S S^\dagger = 1}$$

- S è invariante di Lorentz:

$$\phi_{in}(x') = U\,\phi_{in}(x)\,U^{-1} = U S \phi_{out}(x) S^{-1} U^{-1} = U S U^{-1} \phi_{out}(x') U S^{-1} U^{-1}$$

$$\hookrightarrow = S\,\phi_{out}(x')\,S^{-1} \longrightarrow \boxed{S = U(\Lambda)\, S\, U(\Lambda)^{-1}}$$

In esperimenti di scattering le osservabili principali sono SEZIONI D'URTO differenziali

$$d\sigma = \frac{1}{T}\frac{1}{\Phi} dP \qquad [d\sigma] = \ell^2$$

T: durata dell'esperimento

Φ: flusso normalizzato ad una sola particella

dP: probabilità quantistica:

$$dP = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle \langle i|i\rangle} d\Pi \leftarrow \text{spazio delle fasi}$$

$$\underbrace{dN}_{\text{numero di eventi}} = L \, d\sigma \qquad [L] = \ell^{-2}$$

L: luminosità integrata

Nella teoria libera $S = \mathbb{1}$, definiamo quindi

$$\underbrace{S}_{\text{Unitaria}} = \mathbb{1} + iT$$

T: matrice di trasmissione

Fattorizzando la conservazione del momento:

$$\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i p_i^\mu - \sum_f p_f^\mu\right) \mathcal{M} \leftarrow \text{ELEMENTO DI MATRICE } \mathcal{M}$$

$$\langle f|S-\mathbb{1}|i\rangle = i\,(2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i p_i^\mu - \sum_f p_f^\mu\right) \mathcal{M}$$

Nel caso di scattering $2 \to n$ $\quad (p_1 + p_2 \to \{p_i\})$

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{LIPS}$$

$$\underbrace{d\Pi_{LIPS}}_{\text{Lorentz-invariant phase space}} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \prod_{\text{final states } j} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}$$

DERIVAZIONE FORMULA SEZIONE D'URTO

[5.5]

$$d\sigma = \frac{1}{T}\frac{1}{\Phi}\, dP \qquad \Phi = \frac{|\Delta \vec{v}|}{V} \leftarrow \text{volume} \qquad dP = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle}\, d\Pi$$

In un intervallo di dimensione L i momenti sono discretizzati:

$p_n = \frac{2\pi}{L} n \rightarrow$ il numero di stati disponibili è $N = \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p$

$$\rightarrow \quad d\Pi = \prod_{\substack{\text{stati} \\ \text{finali} \\ j}} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_j$$

regione dello spazio dei momenti che ci interessa

Dalla normalizzazione $a_k^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}|k\rangle$ per gli operatori di creazione / distruzione

$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(p-q)$

$(2\pi)^3 \delta^3(p) = \int d^3x\, e^{ipx}$

$\hookrightarrow \quad \langle p|q\rangle = (2\pi)^3 (2\omega_p)\, \delta^3(p-q)$

$\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$

$\langle p|p\rangle = 2\omega_p V = 2E_p V$

$\downarrow$

$$\left.\begin{aligned} |i\rangle &= |p_1\rangle|p_2\rangle \\ |f\rangle &= \prod_j |p_j\rangle \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \langle i|i\rangle &= (2E_1V)(2E_2V) \\ \langle f|f\rangle &= \prod_j (2E_jV) \end{aligned}$$

$\delta^4(0) = \frac{TV}{(2\pi)^4}$

Per $|f\rangle \neq |i\rangle$

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = \delta^4(0)\, \delta^4(\Sigma p)\, (2\pi)^8 |\mathcal{M}|^2 = TV (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) |\mathcal{M}|^2$$

$$\Rightarrow dP = \frac{T\cancel{V}(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)}{(2E_1V)(2E_2\cancel{V})} |\mathcal{M}|^2 \prod_j \frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_j}{2E_j\cancel{V}} = \frac{T}{V} \frac{1}{(2E_1)(2E_2)} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{LIPS}$$

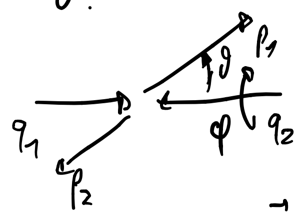
$$d\sigma = \frac{V}{T}\frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} dP = \frac{1}{2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{LIPS}$$

$\rightarrow$ Verificare che $d\Pi_{LIPS}$ sia invariante di Lorentz

ESERCIZIO SPAZIO DELLE FASI IN DUE PARTICELLE e $\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)$

- Nel sistema del centro di massa l'ampiezza può dipendere solamente da $s=(p_1+p_2)^2=(q_1+q_2)^2=E_{cm}^2$ e l'angolo ϑ.

$$\vec{q}_1+\vec{q}_2=\vec{p}_1+\vec{p}_2=0$$



$$\int d\Pi_{LIPS}=\int (2\pi)^4\,\delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2)\,\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\,\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\qquad \vec{p}_2=-\vec{p}_1$$

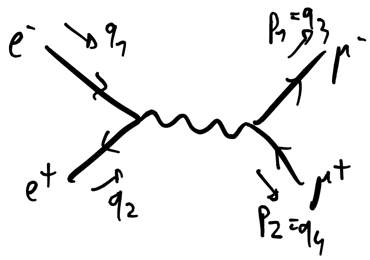
$$=\frac{1}{4(2\pi)^2}\int \delta(E_{cm}-E_1-E_2)\,\frac{p^2\,dp\,d\Omega}{E_1E_2}\qquad q_1^0+q_2^0=E_{cm}$$

$$\delta\left(E_{cm}-\sqrt{p^2+m_1^2}-\sqrt{p^2+m_2^2}\right)\rightarrow\quad p=\frac{E_{cm}}{2}\bar{\beta}\quad,\quad \bar{\beta}\equiv\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{E_{cm}^2}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{E_{cm}^4}}$$

$$\delta=\frac{1}{p/E_1+p/E_2}\,\delta\left(p-\frac{E_{cm}}{2}\bar{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{4(2\pi)^2}\,\frac{p^{\cancel{2}}}{E_1E_2}\,\frac{1}{\cancel{p}/E_1+\cancel{p}/E_2}\,d\Omega=\frac{d\Omega}{4(2\pi)^2}\,\frac{p}{E_1+E_2}=\frac{d\Omega}{4\pi}\,\frac{1}{8\pi}\left(\frac{2p}{E_{cm}}\right)\equiv\frac{d\Omega}{4\pi}\,\frac{1}{8\pi}\,\bar{\beta}$$

- Calcolare $\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)$ dato $|M|^2$ (per energie $\sqrt{s}\gg m_\mu$) [S.13.3.2]



$$\frac{1}{4}\sum_{spin}|M|^2=\frac{2e^4}{s^2}\left(t^2+u^2\right)$$

$$s=(q_1+q_2)^2\qquad s+t+u=0$$
$$t=(q_1-q_3)^2$$
$$u=(q_1-q_4)^2$$

Nel sist del centro di massa $q_1=(E,\vec{k})$, $q_2=(E,-\vec{k})$, $q_3=(E,\vec{p})$, $q_4=(E,-\vec{p})$

$$s=E_{cm}^2=4E^2,\quad t=-2E^2+2\vec{k}\cdot\vec{p}=-2E^2(1-\cos\vartheta),\quad u=-2E^2-2\vec{k}\cdot\vec{p}=-2E^2(1+\cos\vartheta)\qquad |\vec{k}|=|\vec{p}|$$

$$\frac{2(t^2+u^2)}{s^2}=\frac{1}{8E^4}\left(4E^4-\cancel{8E^2(\vec{k}\cdot\vec{p})}+4(\vec{k}\cdot\vec{p})^2+4E^4+\cancel{8E^2(\vec{k}\cdot\vec{p})}+4(\vec{k}\cdot\vec{p})^2\right)=1+\cos^2\vartheta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2E_{cm}^2}\left(e^4(1+\cos^2\vartheta)\right)\frac{1}{4\pi}\frac{1}{8\pi}=\frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2}(1+\cos^2\vartheta)\qquad \int d\Omega=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}d\cos\vartheta$$

Integrating in the angular variables
$$\sigma_0=\frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}$$

Teoria Asintotica [12.5.1.2, Se. 2.1]

- Lo spazio di Fock è generato dai campi liberi $\varphi_{in}(x)$
- Tutte le osservabili, incluso il campo quantistico $\varphi(x)$ sono espresse in termini dei $\varphi_{in}(x)$.
- Le interazioni sono spente adiabaticamente per $t \to \pm\infty$.

Il campo libero $\varphi_{in}(x)$ è riconducibile al campo quantistico $\varphi(x)$ nel limite $x^0 \to -\infty$ a meno di una costante:

$$\varphi(x) \xrightarrow{x_0 \to -\infty} Z_{in}^{1/2} \varphi_{in}(x)$$

Analogamente $\varphi(x) \xrightarrow{x_0 \to +\infty} Z_{out}^{1/2} \varphi_{out}(x)$

Questo è un <u>LIMITE DEBOLE</u>: solo per elementi di matrice.
Infatti per tutti i campi:

$$[\varphi(x), \dot{\varphi}(x)] = [\varphi_{in/out}(x), \dot{\varphi}_{in/out}(x)] = i\,\delta^3(x-y) \quad \text{ma} \quad Z_{in/out} \neq 1$$

I campi asintotici soddisfano Klein-Gordon:

$$(\Box + m^2)\, \varphi_{in/out}(x) = 0 \qquad \Big[\text{invece } (\Box + m^2)\, \varphi(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{interazione}}}{j(x)}\Big]$$

$$\rightarrow \varphi_{in/out}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \left(a(\vec{p})_{in/out}\, e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})_{in/out}\, e^{+ipx} \right) \qquad (1)$$

$px = p^\mu x_\mu = \omega_p x_0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$

$\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$$\left[a(\vec{p})_{in/out} , a^\dagger(\vec{p})_{in/out} \right] = (2\pi)^3\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

Per il campo interagente $(\Box + m^2)\varphi(x) \neq 0$, vediamo il caso dell'ampiezza $\langle 0 | \varphi(x) | \vec{p} \rangle$

$$\varphi(x) = e^{i\hat{p}x}\, \varphi(0)\, e^{-i\hat{p}x} \qquad \leftarrow \text{invarianza per traslazioni}$$

$$\langle 0 | \varphi(x) | \vec{p} \rangle = \underbrace{\langle 0 | \varphi(0) | \vec{p} \rangle}_{\text{indipendente da } t.}\, e^{-ipx} \longrightarrow \text{Soddisfa Klein-Gordon}$$

$$\rightarrow (\Box_x + m^2)\, \langle 0 | \varphi(x) | \vec{p} \rangle = \langle 0 | \varphi(0) | \vec{p} \rangle \left(-p^2 + m^2 \right) = 0$$

Invertendo la (1): $$a(\vec{p})_{in/out} = i \int_t d^3x\, \underbrace{\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\omega_p}}}_{h_p(x)}\, \overleftrightarrow{\partial_0}\, \varphi_{in/out}(x),$$

$h_p(x) \rightarrow (\Box + m^2)\, h_p(x) = 0$

dove $\overleftrightarrow{\partial_0} = \overrightarrow{\partial_0} - \overleftarrow{\partial_0}$, è <u>indipendente da t.</u>

Anche $\quad A \equiv \int_t d^3x \; h_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle 0|\phi(x)|p\rangle$ <u>è indipendente da t</u>

per ogni $\; h_p(x) \;$ tale che $\; (\Box + m^2)\, h_p(x) = 0$

In quanto $\langle 0|\varphi(x)|\vec{p}\rangle$ soddisfa Klein-Gordon.

$$\partial_0 A = \int d^3x \; \partial_0 \left[h_p\, \partial_0 \langle \varphi(x)\rangle - \langle \varphi(x)\rangle\, \partial_0 h_p \right] =$$

$$= \int d^3x \left(h_p\, \partial_0^2 \langle \varphi(x)\rangle - \langle \varphi(x)\rangle\, \partial_0^2 h_p \right) =$$

Klein Gordon $\quad (\Box + m^2) = (\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2)$

$$\hookrightarrow = \int d^3x \left(h_p \left(\nabla^2 \cancel{- m^2}\right)\langle \varphi(x)\rangle - \langle \varphi(x)\rangle \left(\nabla^2 \cancel{- m^2}\right) h_p \right)$$

by part

$$\hookrightarrow = \int d^3x \left(h_p\, \nabla^2 \langle \varphi(x)\rangle - h_p\, \nabla^2 \langle \varphi(x)\rangle \right) = 0$$

Per $\quad \langle 0|\varphi_{in/out}(x)|p\rangle = e^{-ipx} \leftarrow$ <u>esercizio</u> : verificare

Prendiamo il limite di A per $t \to \pm\infty$, con A indip da t.

$$\lim_{t\to\pm\infty} \int_t d^3x \; h_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle 0|\phi(x)|p\rangle = \langle 0|\phi(0)|p\rangle \lim_{t\to\pm\infty} \overbrace{\int_t d^3x \; h_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \left(e^{-ipx}\right)}^{t\text{-indep.}}$$

$$\downarrow$$

$$Z_{out/in}^{1/2} \int_t d^3x \; h_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle 0|\phi_{out,in}(x)|p\rangle = Z_{out/in}^{1/2} \int_t d^3x \; h_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \left(e^{-ipx}\right)$$

Si ha che necessariamente $\quad Z_{in} = Z_{out} \equiv Z = \langle 0|\varphi(0)|\vec{p}\rangle$

$$\Rightarrow \quad \langle 0|\varphi(x)|\vec{p}\rangle = Z^{1/2} e^{-ipx} \qquad |\langle 0|\varphi(x)|\vec{p}\rangle|^2 = Z$$

A causa delle interazioni $\varphi(x)$ genera anche stati a più particelle quindi ci si aspetta $|Z| \leq 1$. $|Z|$: prob di $\varphi(x)$ di generare stati a 1 particella.

Rappresentazione spettrale di Källen-Lehmann [S.24.2]

Considera la funzione a due punti $\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$

Inseriamo un INSIEME COMPLETO DI STATI A ENERGIA POSITIVA

$$\mathbb{1} = \sum_X \int d\Pi_X \, |X\rangle\langle X| \quad , \quad d\Pi_X = \prod_{j\in X} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}$$

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \sum_X \int d\Pi_X \, \langle 0|\varphi(x)|X\rangle\langle X|\varphi(y)|0\rangle =$$

$$= \sum_X \int d\Pi_X \, \langle 0| e^{i\hat{P}x} \varphi(0) e^{-i\hat{P}x} |X\rangle\langle X| e^{i\hat{P}y} \varphi(0) e^{-i\hat{P}y} |0\rangle =$$

$$= \sum_X \int d\Pi_X \, e^{-ip_X(x-y)} \, |\langle 0|\varphi(0)|X\rangle|^2$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left\{ \sum_X \int d\Pi_X \, (2\pi)^4 \delta^4(p-p_X) \, |\langle 0|\varphi(0)|X\rangle|^2 \right\}$$

Il termine tra parentesi è scalare: può solo dipendere da p^2 e ha supporto su stati fisici: $p_x^2 \geq 0$, $p_x^0 > 0$ quindi

$$\sum_x \int d\Pi_x \, (2\pi)^4 \delta^4(p - p_x) \, |\langle 0|\varphi(0)|X\rangle|^2 \equiv 2\pi \, \theta(p^0) \, \rho(p^2)$$

FUNZIONE SPETTRALE

$$\Rightarrow \quad \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} \theta(p^0) \rho(p^2)$$

Definiamo

$$D(x,y,m^2) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2)$$

$$\Rightarrow \quad \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int_0^\infty dq^2 \, \rho(q^2) \, D(x,y,q^2)$$

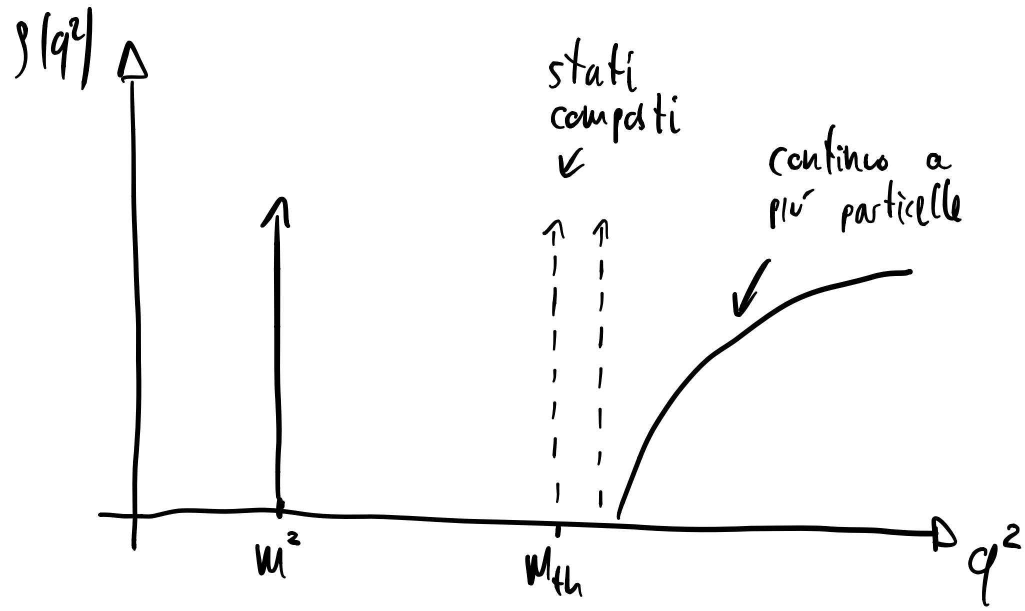
Possiamo separare il contributo a 1 particella usando

$$\langle 0|\varphi_{in}(x)\varphi_{in}(y)|0\rangle = D(x,y,m^2)$$

$$\Rightarrow \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = Z \, D(x,y,m^2) + \int_{m_{th}^2}^\infty dq^2 \, \hat{\rho}(q^2) \, D(x,y,q^2)$$

ovvero
$$\rho(q^2) = Z \, \delta(q^2 - m^2) + \hat{\rho}(q^2) \, \theta(q^2 - m_{th}^2)$$

dove m_{th}^2 è la soglia in q^2 sopra la quale possiamo produrre stati fisici con più di 1 particella.



Per il T-prodotto:

$$\langle 0|\, T\{\varphi(x)\,\varphi(y)\}\,|0\rangle = \int_0^\infty dq^2 \left[\overbrace{D(x,y,q^2)\,\theta(x^0-y^0) + D(y,x,q^2)\,\theta(y^0-x^0)}^{\text{Propagatore di Feynman}}\right] \rho(q^2)$$

$$= \int_0^\infty dq^2\, \rho(q^2) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{p^2-q^2+i\varepsilon}\, e^{ip(x-y)}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip(x-y)}\; i\,\Pi(p^2)$$

$$\Pi(p^2) \equiv \int_0^\infty dq^2\, \frac{\rho(q^2)}{p^2-q^2+i\varepsilon} = \frac{Z}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \int_{m_{th}^2}^\infty dq^2\, \frac{\hat{\rho}(q^2)}{p^2-q^2+i\varepsilon}$$