Formula di riduzione di LSZ [IZ.5.1.3, S.6.1, Se.2.3, M.5.2]

La formula di riduzione di LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann) mette in relazione gli elementi di matrice S con funzioni di Green dei campi quantistici $\varphi(x)$

OSSERVABILI

$\Big\downarrow$

SEZIONI D'URTO $\sigma(I \to F)$

DECAY RATES $\Gamma(X \to YZ)$

ELEMENTI DI MATRICE S

$\Big\downarrow$ LSZ

$$_{out}\langle f | i \rangle_{in} = {}_{in}\langle f | S | i \rangle_{in}$$

stati generati dagli operatori asintotici $\varphi_{in/out}(x)$

FUNZIONI DI GREEN DEL CAMPO INTERAGENTE

$$\langle 0 | T\{\varphi(x_1) \dots \varphi(x_N)\} | 0 \rangle$$

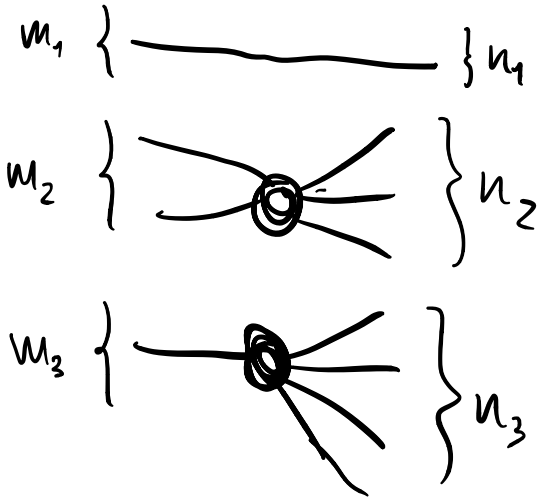
$$S_{i\to f} = {}_{out}\langle p_1,\dots,p_n | q_1,\dots,q_m \rangle_{in}$$ [Se.2.2]

Due eventi a distanza di tipo spazio $\Delta x^2 < 0$ non possono essere in correlazione tra loro.
Nel contesto degli elementi di matrice S, questo viene chiamato PRINCIPIO DI CLUSTER DECOMPOSITION.

Se il processo $\{m\} \to \{n\}$ può essere scomposto in N sottoprocessi separati $\{m_i\} \to \{n_i\}$, $i=1,\dots,N$ allora dobbiamo avere che $S_{m\to n}$ si fattorizza in:

$$S_{m\to n} = \prod_{i=1,\dots,N} S^c_{m_i\to n_i}$$ ← parte connessa della matrice S

esempio:



In particolare, per la componente $S^c_{m_i\to n_i}$ abbiamo che $q_i \neq p_j \;\; \forall\, i,j$ dato che altrimenti implicherebbe che 1 stato non ha partecipato all'interazione.

Formula di riduzione di LSZ

$$S^c_{i\to f} = {}_{out}\langle p_1,\dots,p_n | q_1, q_2, \dots, q_m\rangle_{in} = \sqrt{2\omega_{q_1}}\ {}_{out}\langle p_1 \dots p_n | a^\dagger_{in}(q_1) | q_2, \dots, q_m\rangle_{in}$$

Usiamo:

$$\sqrt{2\omega_{q_1}}\, a^\dagger_{in/out}(q_1) = -i \int_t d^3x\, e^{-iq_1x} \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi_{in/out}(x)$$

$$\sqrt{2\omega_{q_1}}\, a_{in/out}(q_1) = i \int_t d^3x\, e^{iq_1x} \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi_{in/out}(x)$$

any t since it is independent of time

$$S^c_{i\to f} = -i\int_t d^3x\, e^{-iq_1x} \overleftrightarrow{\partial_0}\ {}_{out}\langle p_1, \dots, p_n | \varphi_{in}(x) | q_2, \dots, q_m\rangle_{in}$$

Dimostrazione:

$$\varphi_{in}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_p}} \left(a(\vec p)_{in}\, e^{-ipx} + a^\dagger(\vec p)_{in}\, e^{+ipx} \right)$$

$$\partial_0 \varphi_{in}(x) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2}} \sqrt{\omega_p} \left(-a(\vec p)_{in}\, e^{-ipx} + a^\dagger(\vec p)_{in}\, e^{ipx} \right)$$

$$\partial_0 e^{-iq_1x} = -i\omega_{q_1} e^{-iq_1x}$$

$$\frac{1}{i}\int_t d^3x \left(e^{-iq_1x}\, \partial_0 \varphi_{in}(x) - \varphi_{in}(x)\, e^{-iq_1x}\, (-i\omega_{q_1}) \right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{i}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3x}{\sqrt{2}} \left[\cancel{i}\sqrt{\omega_p}\left(-a(\vec p)\, e^{-i(p+q_1)x} + a^\dagger(\vec p)\, e^{i(p-q_1)x} \right) + \cancel{i}\, \frac{\omega_{q_1}}{\sqrt{\omega_p}} \left(a(p)\, e^{-i(p+q_1)x} + a^\dagger e^{i(p-q_1)x} \right) \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega_{q_1}} \left[-\cancel{\delta(p+q_1)\, a(p)} + a^\dagger(p)\, \delta(p-q_1) + \cancel{a(p)\, \delta(p+q_1)} + a^\dagger(p)\, \delta(p-q_1) \right] =$$

$$= \sqrt{2\omega_{q_1}}\, a^\dagger(q_1) \quad \leftarrow \text{ it is independent of time}$$

Scegliendo $t \to -\infty$ possiamo usare $\langle\beta|\varphi(x)|\alpha\rangle \xrightarrow{t\to-\infty} Z^{1/2}\langle\beta|\varphi_{in}(x)|\alpha\rangle$

$$S^c_{i\to f} = -i \lim_{t\to-\infty} Z^{-1/2}\int_t d^3x\, e^{-iq_1x}\overleftrightarrow{\partial_0}\ {}_{out}\langle p_1 \ldots|\varphi(x)|q_2\ldots\rangle_{in}$$

Usiamo il fatto che per un integrale:

$$\left(\lim_{t\to+\infty} - \lim_{t\to-\infty}\right)\int d^3x\, f(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\, f(\vec{x},t)$$

$\sqrt{2\omega_{q_1}}\ {}_{out}\langle p_1\ldots|a^\dagger_{out}(q_1)|q_2\ldots\rangle_{in}$

$$S^c_{i\to f} = -i \lim_{t\to+\infty} Z^{-1/2}\int_t d^3x\, e^{-iq_1x}\overleftrightarrow{\partial_0}\ {}_{out}\langle p_1 \ldots|\varphi(x)|q_2\ldots\rangle_{in}$$

$$+ i Z^{-1/2}\int d^4x\, \partial_0\left[e^{-iq_1x}\overleftrightarrow{\partial_0}\ {}_{out}\langle p_1 \ldots|\varphi(x)|q_2\ldots\rangle_{in}\right]$$

$$i Z^{-1/2}\int d^4x \langle p_1,\ldots,p_n|\, \partial_0\underbrace{\left(e^{-iq_1x}\partial_0\varphi(x) - \varphi(x)\partial_0 e^{-iq_1x}\right)}|q_2,\ldots,q_m\rangle$$

$$= e^{-iq_1x}\partial_0^2\varphi(x) - \varphi(x)\partial_0^2 e^{-iq_1x} = \qquad \leftarrow q_1^2 = m^2$$

$$= e^{-iq_1x}\partial_0^2\varphi(x) - \varphi(x)(\nabla^2 - m^2)e^{-iq_1x} = e^{-iq_1x}(\Box + m^2)\varphi(x)$$

Assumendo che $\varphi(x)$ sia condotto in un pacchetto d'onda localizzato nello spazio possiamo integrare per parti ∇^2.

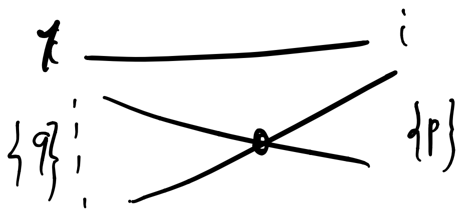
$$S^c_{i\to f} = \sqrt{2\omega_{q_1}}\ {}_{out}\langle p_1,\ldots,p_n|\,a^\dagger_{out}(q_1)|q_2,\ldots,q_m\rangle_{in} +$$

$$+ i Z^{-1/2}\int d^4x\, e^{-iq_1x}(\Box + m^2)\ {}_{out}\langle p_1,\ldots,p_n|\varphi(x)|q_2,\ldots,q_m\rangle_{in}$$

Il primo termine nel membro di destra è non-zero solo quando una particella non interviene nello scattering e quindi ha momento invariato:

${}_{out}\langle p_i| = \sqrt{2\omega_{p_i}}\,\langle 0|a_{out}(p_i)$

$${}_{out}\langle p_1,\dots,p_n|\,a^\dagger_{out}(q_1)\,|q_2,\dots,q_m\rangle_{in} = \sum_{i=1}^{n} 2\omega_{q_1}(2\pi)^3\delta^3(p_i-q_1)\;{}_{out}\langle p_1,\dots,\overset{\text{rimosso}}{\overset{\downarrow}{(p_i)}},\dots,p_n|q_2,\dots,q_m\rangle_{in}$$



→ DIAGRAMMI SCONNESSI

Dato che ogni $q_i \neq p_j$ → nessun diag. sconnesso.

$$\Rightarrow S^{\overset{\leftarrow \text{connessa}}{c}}_{i\to f} \equiv {}_{out}\langle p_1,\dots,p_n|q_1,\dots,q_m\rangle_{in} = \quad (= iT_{i\to f})$$

$$= iZ^{-1/2}\int d^4x_1\, e^{-iq_1x_1}\left(\Box_1+m^2\right)\,{}_{out}\langle p_1,\dots,p_n|\varphi(x_1)|q_2,\dots,q_m\rangle_{in}$$

Iteriamo questa procedura eliminando tutti gli stati in e out in favore dei campi $\varphi(x)$.

Procediamo con ${}_{out}\langle p_1 | = \sqrt{2\omega_{p_1}} \langle 0 | a_{out}(p_1)$:

$${}_{out}\langle p_1, \dots, p_n | \varphi(x) | q_2, \dots, q_m \rangle_{in} = \sqrt{2\omega_{p_1}} \; {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | a_{out}(p_1) \, \varphi(x_1) | q_2, \dots, q_m \rangle$$

come prima

$$= \lim_{y_1^0 \to +\infty} i Z^{-1/2} \int d^3 y_1 \, e^{i p_1 y_1} \overleftrightarrow{\partial_0} \; {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | \varphi(y_1) \, \varphi(x_1) | q_2, \dots, q_m \rangle \qquad (1)$$

Per poter usare la stessa strategia di prima ci serve che $a_{in}(p_1)$ dal limite inferiore di integrazione si applichi a $|q_2, \dots, q_m\rangle$ per dare i termini sconnessi.

$$\left(\lim_{t \to +\infty} - \lim_{t \to -\infty} \right) \int d^3x \, f(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \, f(\vec{x}, t)$$

Definiamo quindi il T-PRODOTTO

$$T\{\varphi(y)\varphi(x)\} \equiv \begin{cases} \varphi(y)\varphi(x) & \text{se } y^0 > x^0 \\ \varphi(x)\varphi(y) & \text{se } x^0 > y^0 \end{cases} = \varphi(y)\varphi(x)\,\theta(y^0 - x^0) + \varphi(x)\varphi(y)\,\theta(x^0 - y^0)$$

e consideriamo, come prima, l'integrale :

$$i Z^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1^0 \int d^3 y_1 \, \partial_0 \left[e^{i p_1 y_1} \overleftrightarrow{\partial_0} \; {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | T\{\varphi(y_1) \, \varphi(x_1)\} | q_2, \dots, q_m \rangle \right] =$$

$$= \lim_{y_1^0 \to +\infty} i Z^{-1/2} \int d^3 y_1 \, e^{i p_1 y_1} \overleftrightarrow{\partial_0} \; {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | \varphi(y_1) \, \varphi(x_1) | q_2, \dots, q_m \rangle$$

$$- \lim_{y_1^0 \to -\infty} i Z^{-1/2} \int d^3 y_1 \, e^{i p_1 y_1} \overleftrightarrow{\partial_0} \; {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | \varphi(x_1) \, \varphi(y_1) | q_2, \dots, q_m \rangle$$

$$= \lim_{y_1^0 \to +\infty} i Z^{-1/2} \int d^3 y_1 \, e^{i p_1 y_1} \overleftrightarrow{\partial_0} \; {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | \varphi(y_1) \, \varphi(x_1) | q_2, \dots, q_m \rangle \leftarrow \text{termine in (1)}$$

$$- \; {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | \varphi(x_1) \, a_{in}(p_1) | q_2, \dots, q_m \rangle_{in}$$

Possiamo quindi riscrivere (1) come:

$$(1) = \lim_{y_1^0 \to +\infty} i Z^{-1/2} \int d^3 y_1 \, e^{i p_1 y_1} \overleftrightarrow{\partial_0} \, {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | T\{\varphi(y_1)\, \varphi(x_1)\} | q_2, \dots, q_m \rangle$$

$$= {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | \varphi(x_1)\, a_{out}(p_1) | q_2, \dots, q_m \rangle_{in} + \quad \leftarrow \text{termini sconnessi}$$

$$+ i Z^{-1/2} \int d^4 y_1 \, e^{i p_1 y_1} (\Box_{y_1} + m^2) \, {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | T\{\varphi(y_1)\, \varphi(x_1)\} | q_2, \dots, q_m \rangle_{in}$$

Mettendo insieme quanto ottenuto finora:

$$S^c_{i \to f} = {}_{out}\langle p_1, \dots, p_n | q_1, q_2, \dots, q_m \rangle_{in} = (i Z^{-1/2})^2 \int d^4 x_1 \, e^{-i q_1 x_1} (\Box_{x_1} + m^2) \int d^4 y_1 \, e^{+i p_1 y_1} (\Box_{y_1} + m^2)$$

$$ {}_{out}\langle p_2, \dots, p_n | T\{\varphi(y_1)\, \varphi(x_1)\} | q_1, \dots, q_m \rangle_{in}$$

Iterando: Formula di riduzione di Lehmann-Symanzik-Zimmermann

$$\boxed{\begin{aligned} S^c_{i \to f} = {}_{out}\langle p_1, \dots, p_n | q_1, q_2, \dots, q_m \rangle_{in} &= (i Z^{-1/2})^{n+m} \int \prod_{i=1}^{m} d^4 x_i \prod_{j=1}^{n} d^4 y_j \, e^{i(p_j y_j - q_i x_i)} \\ &\times (\Box_{x_1} + m^2) \dots (\Box_{y_n} + m^2) \, \langle 0 | T\{\varphi(x_1) \dots \varphi(y_n)\} | 0 \rangle^c \end{aligned}}$$

$\uparrow$ funzione di Green connessa

$$\boxed{\text{La teoria dei campi si occupa di calcolare le funzioni di Green } \langle 0|T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(y_n)\}|0\rangle}$$

Definiamo la funzione di Green a N punti

$$G^{(N)}(x_1,\dots,x_N) \equiv \langle 0|T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N)\}|0\rangle$$

e la sua trasformata di Fourier $\tilde{G}^{(N)}$

$$\tilde{G}^{(N)}(k_1,\dots,k_N) = \int \prod_{i=1}^{N} d^4x_i \; e^{-i\sum_{i=1}^{N} x_i k_i} \; G^{(N)}(x_1,\dots,x_N) \, .$$

$$(\Box_{x_j}+m^2)\, G^{(N)}(x_1,\dots,x_N) = -\int \prod_{i=1}^{N} \frac{d^4k_i}{(2\pi)^4} (k_j^2-m^2)\, e^{i\sum_{i=1}^{N} x_i k_i} \; \tilde{G}^{(N)}(k_1,\dots,k_N)$$

Dato che per particelle on-shell $k_j^2-m^2=0$, questo va inteso come il $\lim_{k_j^2\to m^2}$. Estrae il residuo dal polo del propagatore della linea esterna in $\tilde{G}^{(N)}$.

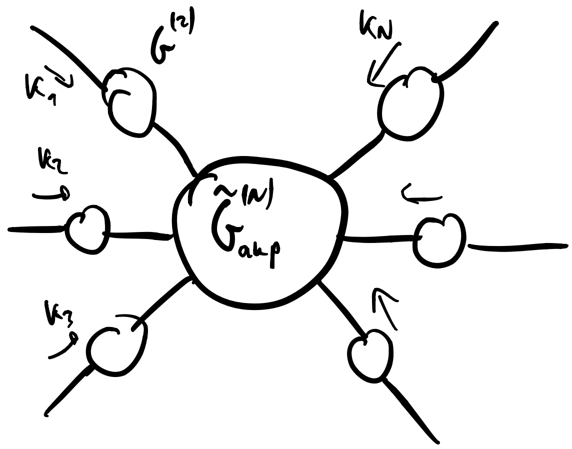
LSZ diventa:

$$\boxed{S^c_{i\to f} = \prod_{i=1}^{m} \lim_{q_i^2\to m^2} \frac{q_i^2-m^2}{iZ^{1/2}} \prod_{j=1}^{n} \lim_{p_j^2\to m^2} \frac{p_j^2-m^2}{iZ^{1/2}} \; \tilde{G}^{(n+m)}(q_1,\dots,q_m,-p_1,\dots,-p_n)}$$

Nota: Abbiamo già visto che $G^{(2)}(p) = i\tilde{\Pi}(p^2) = i\frac{Z}{p^2-m^2+i\epsilon} + i\int dq^2 \frac{\hat{\rho}(q^2)}{p^2-q^2+i\epsilon}$

Usando $\lim_{p^2\to m^2} G^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2-m^2}$ definiamo la funzione di Green AMPUTATA rimuovendo i propagatori esterni e la delta della conservazione del momento da $\tilde{G}^{(N)}$:

$$\tilde{G}^{(N)}(k_1,\dots,k_N) = (2\pi)^4\delta^4\Big(\sum_i k_i\Big)\left(\prod_{i=1}^{N} G^{(2)}(k_i)\right)\tilde{G}_{amp}^{(N)}(k_1,\dots,k_N)$$

$\tilde{G}^{(N)} =$  $\times\ (2\pi)^4\delta^4\Big(\sum_i k_i\Big)$

LSZ diventa:

$$\boxed{S^{c}_{i\to f} = (2\pi)^4\delta^4\Big(\sum_i q_i - \sum_j p_j\Big)\, Z^{(n+m)/2}\, \tilde{G}^{(n+m)}_{amp}(q_1,\dots,q_m,-p_1,\dots,-p_n)\Big|_{q_i^2=p_j^2=m^2}}$$

CROSSING SYMMETRY

L'unica differenza tra avere particelle nello stato finale o iniziale sta nel segno del momento. Per "spostarle" basta invertire $p\to -p$ (o $q\to -q$).