Esercizi su Derivate parziali, differenziabilità e piani tangenti

1. Per le funzioni che seguono, determinare il gradiente della funzione data nel punto indicato e l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto indicato.

   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ in $(2, 2)$

   (b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ in $(1, 1)$

   (c) $f(x, y) = x^y$ in $(1, 5)$

2. Determinare la direzione di massima crescita della funzione data nel punto indicato:

   (a) $f(x, y) = \log(x^2 + 3y^2)$ in $(2, 1)$

   (b) $f(x, y, z) = xe^{-y^2} \cos(z)$ in $(1, 1, \pi)$

   (c) $f(x, y, z) = xyz$ in $(1, 1, 1)$

   (d) $f(x, y, z) = \sin(x) \cos(yz)$ in $(\pi/2, \sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$

3. Determinare la derivata direzionale della funzione data nel punto indicato e nella direzione specificata

   (a) $f(x, y) = e^{xy}$ in $(1, 1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

   (b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ in $(1, 2)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

   (c) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$ in $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

   (d) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2+2y^2+4z^2}$ in $(1, 1, 1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$.

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   Calcolare il vettore gradiente di f in $(0, 0)$ e la derivata direzionale di f in $(0, 0)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Come mai la formula del gradiente non vale?

5. Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ e la funzione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = (t^2, 1 - t, \cos(t))$. Si calcoli la derivata della funzione composta $f \circ \alpha$.

6. La temperatura T in una regione dello spazio i cui punti vengono descritti da una terna di coordinate cartesiane (x, y, z) viene espressa dalla funzione $T(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Un osservatore si muove in tale regione e le sue coordinate variano nel tempo con la legge $x(t) = 2 - t^3$, $y(t) = t$, $z(t) = t^2 + 1$. Calcolare la derivata temporale della temperatura percepita dall'osservatore al variare del tempo t.

Soluzioni

1. (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ in $(2, 2)$
   Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x, y) è dato da
   $$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$$
   Il gradiente nel punto di coordinate $(2, 2)$ è dunque $\nabla f(2, 2) = (6, 6)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(2, 2)$ è dunque:
   $$z = 4 + 6(x - 2) + 6(y - 2)$$

   (b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ in $(1, 1)$
   Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x, y) è dato da
   $$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{x + y} - \frac{x - y}{(x + y)^2}, -\frac{1}{x + y} - \frac{x - y}{(x + y)^2} \right)$$
   Il gradiente nel punto di coordinate $(1, 1)$ è dunque $\nabla f(1, 1) = (1/2, -1/2)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 1)$ è dunque:
   $$z = \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$$

   (c) $f(x, y) = x^y$ in $(1, 5)$
   Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x, y) è dato da
   $$\nabla f(x, y) = \left(\frac{ye^{y \log(x)}}{x}, \log(x)e^{y \log(x)} \right)$$
   Il gradiente nel punto di coordinate $(1, 5)$ è dunque $\nabla f(1, 5) = (5, 0)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 1)$ è dunque:
   $$z = 1 + 5(x - 1)$$

2. (a) $f(x,y) = \log(x^2+3y^2)$ in $(2,1)$
Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x,y) è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+3y^2}, \frac{6y}{x^2+3y^2}\right)$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(2,1)$ è dato da

$$\nabla f(2,1) = \left(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right),$$

che indica la direzione di massima crescita della funzione a partire dal punto $(2,1)$.

(b) $f(x,y,z) = xe^{-y^2}\cos(z)$ in $(1,1,\pi)$
Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x,y,z) è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = (e^{-y^2}\cos(z), -2xye^{-y^2}\cos(z), -xe^{-y^2}\sin(z))$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(1,1,\pi)$ è dato da

$$\nabla f(1,1,\pi) = (-e^{-1}, 2e^{-1}, 0)$$

che indica la direzione di massima crescita della funzione a partire dal punto $(1,1,\pi)$.

(c) $f(x,y,z) = xyz$ in $(1,1,1)$ Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x,y,z) è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(1,1,1)$ è dato da

$$\nabla f(1,1,1) = (1,1,1)$$

che indica la direzione di massima crescita della funzione a partire dal punto $(1,1,1)$

(d) $f(x,y,z) = \sin(x)\cos(yz)$ in $(\pi/2, \sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x,y,z) è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = (\cos(x)\cos(yz), -z\sin(x)\sin(yz), -y\sin(x)\sin(yz))$$

Il gradiente nel punto di coordinate $(\pi/2, \sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ è dato da

$$\nabla f(\pi/2, \sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}) = (0, -\sqrt{\pi/2}, -\sqrt{\pi/2})$$

che indica la direzione di massima crescita della funzione a partire dal punto $(\pi/2, \sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$.

3. (a) $f(x,y) = e^{xy}$ in $(1,1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$
Utilizziamo la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \mathbf{v}$, dato che f è differenziabile in $(1,1)$ (è immediato verificare che le derivate parziali sono funzioni continue). Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x,y) è dato da

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy}),$$

quindi il vettore gradiente nel punto di coordinate $(1,1)$ è $\nabla f(1,1) = (e,e)$, e la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = (e,e)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e + \frac{1}{2}e$$

(b) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ in $(1,2)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$
Utilizziamo la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \mathbf{v}$. Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x,y) è dato da

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right),$$

quindi il vettore gradiente nel punto di coordinate $(1,2)$ è $\nabla f(1,2) = (2/5, 4/5)$, e la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = (2/5, 4/5)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

(c) $f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$ in $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$
Utilizziamo la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = \nabla f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \cdot \mathbf{v}$. Il vettore gradiente nel generico punto di coordinate (x,y,z) è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = (2x\cos(x^2+y^2+z^2), 2y\cos(x^2+y^2+z^2), 2z\cos(x^2+y^2+z^2)),$$

quindi il vettore gradiente nel punto di coordinate $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ è

$$\nabla f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = -2(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})),$$

e la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = (-2\sqrt{\pi}, -2\sqrt{\pi}, -2\sqrt{\pi})\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (\sqrt{2}-2)\sqrt{\pi}$$

(d) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+2y^2+4z^2}$ in $(1,1,1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$.

Utilizziamo la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1) = \nabla f(1,1,1)\cdot\mathbf{v}$. Le tre derivate parziali nel generico punto di coordinate (x,y,z) sono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{yz}{x^2+2y^2+4z^2} - \frac{2x^2yz}{(x^2+2y^2+4z^2)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{xz}{x^2+2y^2+4z^2} - \frac{4xy^2z}{(x^2+2y^2+4z^2)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{xy}{x^2+2y^2+4z^2} - \frac{8xyz^2}{(x^2+2y^2+4z^2)^2},
\end{aligned}$$

quindi il vettore gradiente nel punto di coordinate $(1,1,1)$ è $\nabla f(1,1,1) = (5/49, 3/49, -1/49)$, e la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1) = (5/49, 3/49, -1/49)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{49}$$

4. la funzione f è identicamente nulla sugli assi coordinati, quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, quindi il gradiente di f nel punto $(0,0)$ è il vettore nullo:

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

La derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione del vettore v è data da:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}h}{h} = \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Si noti che in questo caso non vale la formula del gradiente, infatti $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{v} = 0$, mentre $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Questo è dovuto al fatto che f non è differenziabile in $(0,0)$, infatti non esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

5. La funzione composta $f\circ\alpha$ è data da

$$f\circ\alpha(t) = \sin(t^2(1-t)\cos(t))$$

quindi

$$\frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) = \cos(t^2(1-t)\cos(t)) \big((2t - 3t^2)\cos(t) - \sin(t)(t^2 - t^3)\big)$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato utilizzando le regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

dove

$$\nabla f(\alpha(t)) = \cos(t^2(1-t)\cos(t))((1-t)\cos(t), t^2\cos(t), t^2(1-t))$$

e $\alpha'(t) = (2t, -1, -\sin(t)$.

6. La temperatura T in una regione dello spazio i cui punti vengono descritti da una terna di coordinate cartesiane (x, y, z) viene espressa dalla funzione $T(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Un osservatore si muove in tale regione e le sue coordinate variano nel tempo con la legge $x(t) = 2 - t^3$, $y(t) = t$, $z(t) = t^2 + 1$. Calcolare la derivata temporale della temperatura percepita dall'osservatore al variare del tempo t.
Utilizzando la formula di derivazione di funzione composta otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} T(x(t), y(t), z(t)) &= \nabla T(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) \\
&= (2x(t), 4y(t), 6z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) \\
&= (2(2 - t^3), 4t, 6(t^2 + 1)) \cdot (-3t^2, 1, 2t) \\
&= 6t^5 + 12t^3 - 12t^2 + 16t
\end{aligned}$$

Potevamo arrivare allo stesso risultato esplicitando la funzione composta e derivandola rispetto alla variabile t, infatti:

$$T(x(t), y(t), z(t)) = (2 - t^3)^2 + 2t^2 + 3(t^2 + 1)^2 = t^6 + 3t^4 - 4t^3 + 8t^2 + 7$$

la cui derivata è la funzione

$$\frac{d}{dt} T(x(t), y(t), z(t)) = 6t^5 + 12t^3 - 12t^2 + 16t$$