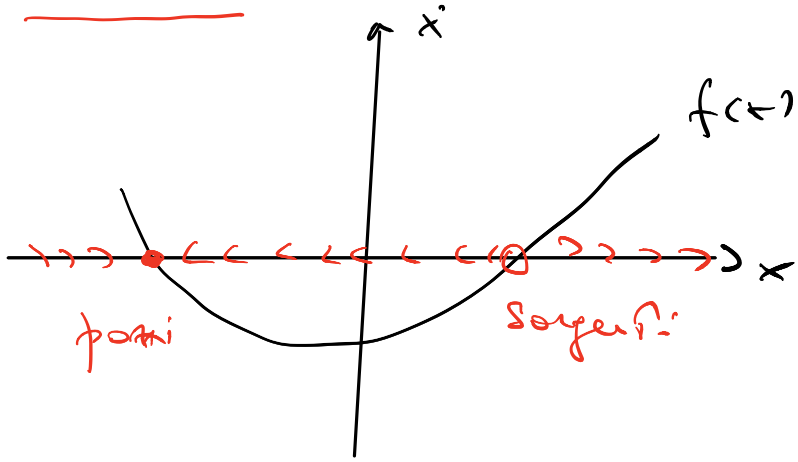
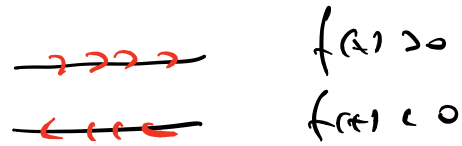
SISTEMI DINAMICI

17 marzo 2021

Sistemi dinamici 1-dim

$\dot{x} = f(x)$ $\qquad f : I \to R$





x^* t.c. $f(x^*) = 0$

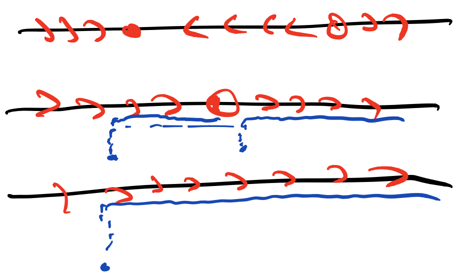
Introduciamo parametro :

$$\dot{x} = f_\mu(x) = f(x;\mu)$$

→ biforcazioni = cambiamenti qualitativi della dinamica al variare di un parametro

Biforcazione

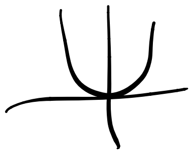
Tangente



$$\dot x = r + x^2$$

$$x^2 = -r$$

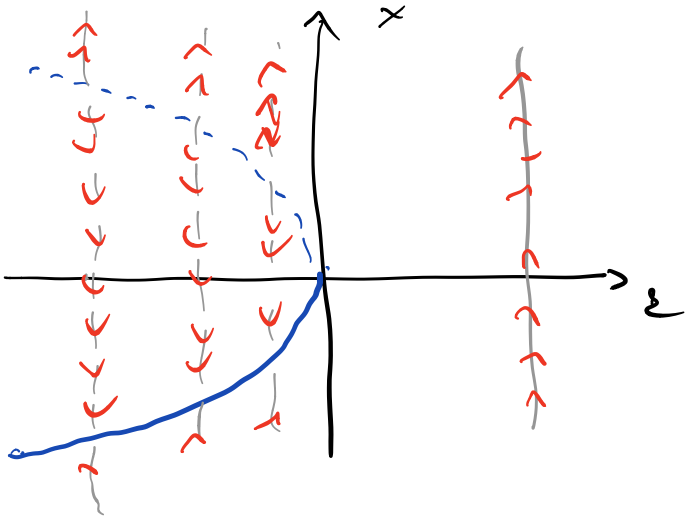
$$x^2 = 0$$



$$x^2 = -r = -3$$

$f(x,r)=0$

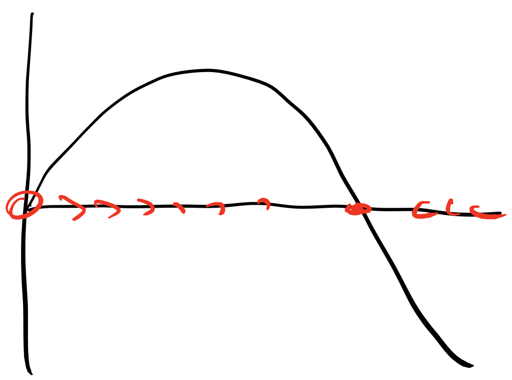
$\downarrow$

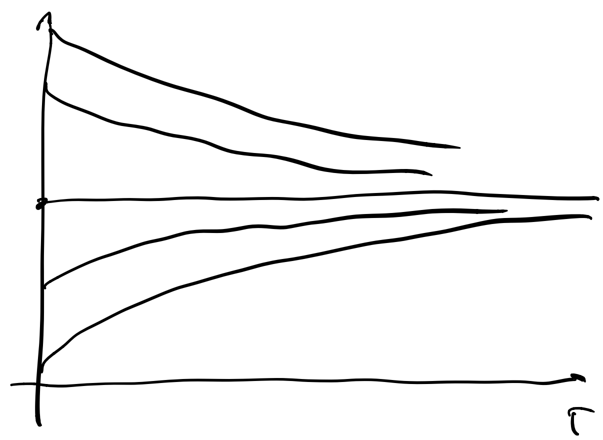


$r=0$ $\quad \dot x = x^2$

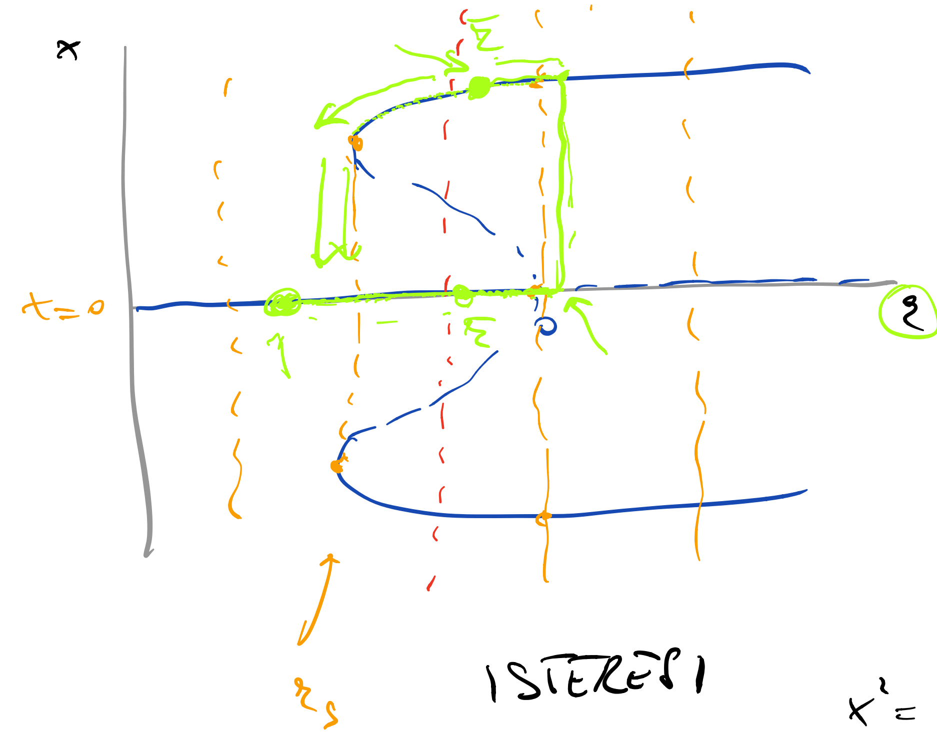
$r>0$ $\quad \dot x = r + x^2$

$$\dot N = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$





$$\dot x = rx + x^3 - x^5 = x(r + x^2 - x^4)$$



ISTERESI

Punti critici

$$x(\varepsilon + x^2 - x^4) = 0$$

$x = 0$

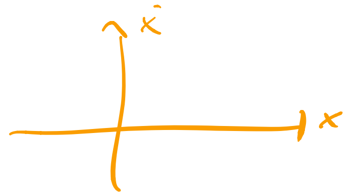
$$\varepsilon + x^2 - x^4 = 0$$

quante radici reali ci sono al variare di ε

$$x^2 = y \qquad \varepsilon + y - y^2 = 0$$

$\uparrow$

$$\varepsilon = 0 \longrightarrow x^4 - x^2 = 0 \qquad x^2(x^2 - 1) = 0$$

$r \longrightarrow$ 

Biforcazioni 1-dim

Prendiamo: $\dot{x} = f(x;\mu)$ e supponiamo (x^*, μ^*) punto fisso $f(x^*, \mu^*) = 0$

Linearizzare: $\dot{\eta} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*, \mu^*)} \eta$

$f(x^*, \mu^*) = 0$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*, \mu^*)} \neq 0 \rightarrow$ punto iperbolico e quindi (x funzione implicita)

$\exists!$ funzione $x(\mu)$ tale che

$$f(x(\mu); \mu) = 0 \leftarrow$$

per μ abbastanza vicini a μ^*
(dove abbiamo $x(\mu^*) = x^*$)

Per la continuità rispetto ai parametri,
per μ sufficientemente vicino a μ^*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(\mu), \mu) \neq 0$$

$\Rightarrow$ punti fissi iperbolici permangono
iperbolici per piccole variazioni di μ

Identifica $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \neq 0 \rightarrow$ cambiamenti
qualitativi della dinamica

Per semplicità: $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$

Seconda parte

Biforcazione tangente

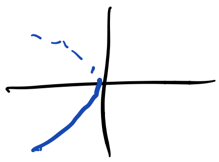
Abbiamo una coppia di punti fissi

$\mu(x)$ che passa per $(\mu, x) = (0,0)$

1. Tangente alla linea $\mu = 0$ in $x = 0$

$$\frac{d\mu}{dx}\Big|_{x=0} = 0$$

2. giace interamente da un lato di $\mu = 0$ $\longrightarrow$ localmente $\frac{d^2\mu}{dx^2}\Big|_{x=0} \neq 0$



Consideriamo $\dot{x} = f(x; \mu)$

$f(0,0) = 0$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = 0$

Se abbiamo $\frac{\partial f}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} \neq 0$, allora il

Teorema funzione implicita: $\exists!\ \mu = \mu(x)$

tale che $\mu(0) = 0$ (mantenendo x

abbastanza piccolo $\longrightarrow$ $f(x, \mu(x)) = 0$)

Sotto quali condizioni

$$\boxed{\frac{d\mu}{dx}\Big|_0 = 0} \qquad \frac{d^2\mu}{dx^2}\Big|_0 \neq 0 \quad ?$$

Partiamo da $f(x, \mu(x)) = 0$

$$\frac{d}{dx} f(x, \mu(x)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dx}$$

calcoliamo in $(x, \mu) = (0, 0)$

$$\left. \frac{d\mu}{dx} \right|_0 = \frac{- \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 0}{\left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} \neq 0} = 0$$

Seconda condizione

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x, \mu(x)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \frac{d\mu}{dx} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \left(\frac{d\mu}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{d^2 \mu}{dx^2}$$

$f = f(x, \mu(x))$ $\qquad f(x, \mu(x)) = 0$

Calcoliamo in $(0, 0)$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} + \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} \left. \frac{d^2 \mu}{dx^2} \right|_0 = 0$$

$$\rightarrow \left. \frac{d^2 \mu}{dx^2} \right|_0 = \frac{- \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} \neq 0}{\left. \partial f / \partial \mu \right|_{(0,0)}} \leftarrow$$

necessariamente $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \neq 0$

Ricapitolando: abbiamo dimostrato che per avere una biforcazione tangente

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \end{array}\right\} \text{ punto fisso non iperbolico}$$

e $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0$, $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \neq 0$

Se pensiamo di espandere f

$$f(x,\mu) = a_0 \mu + a_1 x^2 + a_2 \mu x + a_3 \mu^2 + \dots$$

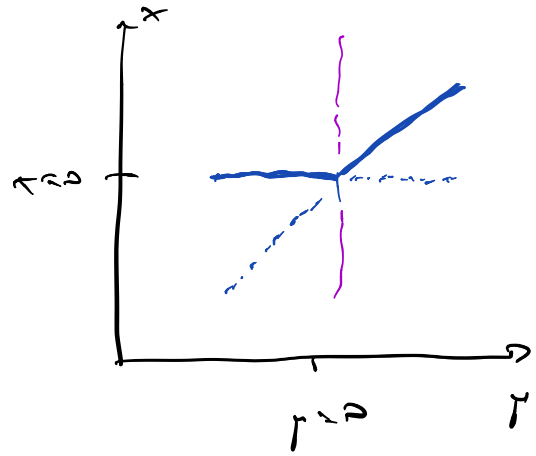
Taylor

Biforcazione Transcritica

In questo caso la struttura vicino al punto di biforcazione $(0,0)$

1. due curve di punti fissi che passano per $(0,0)$

$$\begin{cases} x = \mu \\ x = 0 \end{cases} \leftarrow$$



2. entrambe le curve esistono da tutti i due lati di $\mu = 0$

$$(x^*, \mu^*) = (0,0)$$

$$x = x^* \rightarrow \mu = 0$$

3. La stabilità lungo ogni curva cambia attraversando $\mu = 0$

Solite condizioni $\quad \dot{x} = f(x, \mu)$

$$f(0,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$$

punto critico non iperbolico

Siccome abbiamo due curve di punti fissi che passano per $(0,0)$, deve essere

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = 0$$

Altrimenti, per il teorema della funzione implicita, esisterebbe un'unica curva di punti fissi per l'origine.

Supponiamo che ci sia uno cambio di punti fissi $x=0$

$$\dot{x} = \underline{f(x,\mu)} = x\, \underline{F(x,\mu)}$$

$$F(x,\mu) = \begin{cases} \dfrac{f(x,\mu)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \underline{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,\mu)} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\left[\quad \frac{f(x,\mu)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,\mu)} \quad \right]$$

In particolare $F(0,0)=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{(0,0)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)}$$

Vogliamo che $\mu(x)$ non coincida con $x=0$, sia percorsa da entrambi i lati di $\mu=0$ $\rightarrow$ $\underline{0 < \left| \frac{d\mu}{dx}\Big|_0 \right| < \infty}$

Assumiamo $\left.\frac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0$

allora per il teorema della funzione implicita $\exists\ \mu(x)$ (per x abbastanza piccolo)

tale che $F(x, \mu(x)) = 0$

$$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_{(0,0)} = \frac{-\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} = \frac{-\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)}} \neq 0$$

$\left(\frac{d}{dx} F(x, \mu(x)) = 0\right)$

Riassumendo: per una biforcazione transcritica di un punto fisso non iperbolico, devono valere:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \neq 0$$