Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 6

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x,y,z,u,v,w)=0$$

4) Determinare per quale valore di α il piano tangente al grafico di $f(x,y) = \operatorname{sen}(\alpha x + y^2)$ nel punto $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ è parallelo alla retta $x = y = 2z$.
Esistono valori di α per cui è perpendicolare?

$$f_x(x,y) = \alpha \cos(\alpha x + y^2) \qquad f_y(x,y) = 2y\cos(\alpha x + y^2)$$

$$f_x(0,\sqrt{\pi}) = -\alpha \qquad f_y(0,\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}$$

$\Rightarrow z = -\alpha x - 2\sqrt{\pi}\,(y - \sqrt{\pi})$ equazione piano tangente in $(0,\sqrt{\pi},0)$ alla superficie di equazione $z = \operatorname{sen}(\alpha x + y^2)$

$x = y = 2z \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ equazione parametrica retta r

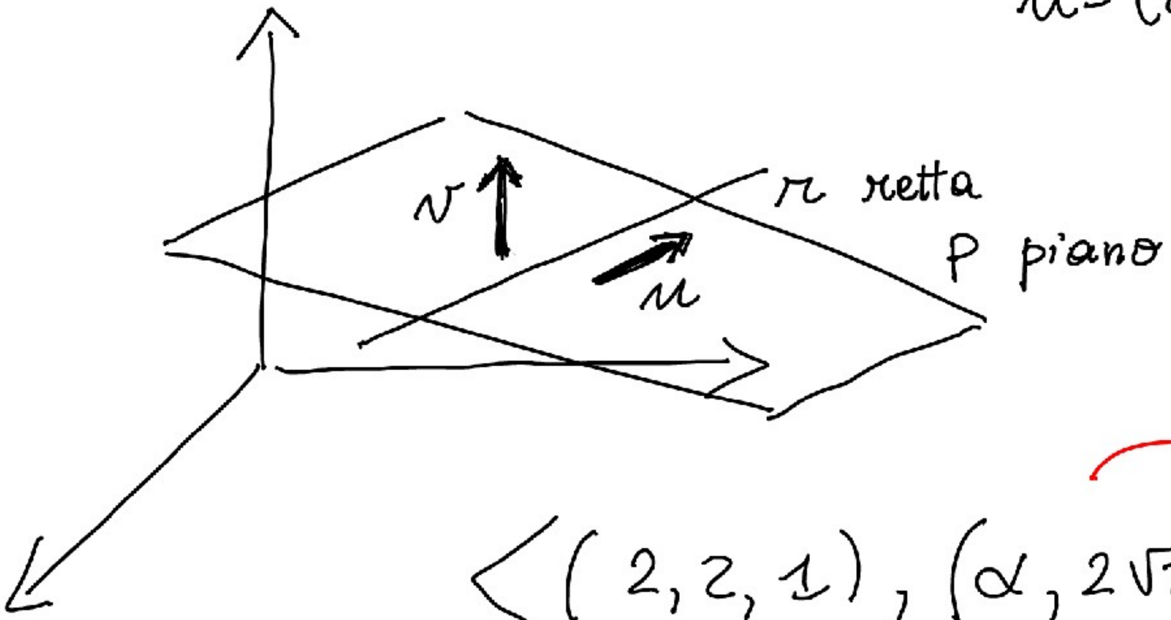
$\begin{cases} x = y \\ y = 2z \end{cases}$ EQUAZIONE COME INTERSEZIONE DI PIANI

$v = (2, 2, 1)$ vettore parallelo alla retta r

$\alpha x + 2\sqrt{\pi}\, y + z - 2\pi = 0$ equazione piano tangente p

$u = (\alpha, 2\sqrt{\pi}, 1)$ vettore perpendicolare al piano p

$\Rightarrow$ IMPONIAMO CHE I DUE VETTORI SIANO PERPENDICOLARI



$u = (2,2,1) \quad v = (\alpha, 2\sqrt{\pi}, 1)$

$$\boxed{\begin{array}{l} u \parallel r, \quad v \perp p \\ p \parallel r \iff v \perp u \end{array}}$$

$\longrightarrow$ CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ

$$\langle (2,2,1), (\alpha, 2\sqrt{\pi}, 1) \rangle = 0$$

$$\iff 2\alpha + 4\sqrt{\pi} + 1 = 0 \iff \alpha = -2\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}$$

La retta r è perpendicolare al piano p

$\Longleftrightarrow$ $u \parallel v$

$\boxed{\begin{array}{l} u \parallel r,\ v \perp p \\ r \perp p \Longleftrightarrow u \parallel v \end{array}}$

$\Longleftrightarrow \exists\, k : u = (2,2,1) = k\,(\alpha, \sqrt{2\pi}, 1) = kv$

$\Longleftrightarrow \exists\, k : \begin{cases} 2 = k\alpha \\ 2 = k\sqrt{2\pi} \\ 1 = k \cdot 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad k = 1 \ \text{ e } \ 2 = \sqrt{2\pi} \quad$ NO!

$\Longrightarrow$ NON ESISTE $k : u = kv$

$\Longrightarrow$ il piano tangente non è perpendicolare alla retta per nessun valore di α.

a) $f(x) = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\qquad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ con v versore in $\mathbb{R}^n$

Si ha $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\cancel{2} x_i}{\cancel{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}$ per $x \neq 0$

$\Rightarrow$ posso applicare il teor. del differenziale totale.

$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_n \setminus \{0\}$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ in un intorno di $\bar{x}$ (in tutto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

e queste sono continue in $\bar{x}$ (in tutto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

$\Rightarrow$ f è differenziabile in $\bar{x}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow$ posso applicare la regola del gradiente: $\forall x \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i v_i}{\|x\|} = \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|}$$

b) Calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)$ di

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$$ con v versore in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cdots\cdots = \frac{-x^2+y^2-2xy+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cdots\cdots = \frac{-y^2+x^2-2xy+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

PER CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ BASTA SCAMBIARE x CON y IN $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

Le due derivate parziali esistono in $\mathbb{R}^2$ per i teoremi noti dalla teoria di derivazione di funzioni in una variabile.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono funzioni continue in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ f è differenziabile e posso applicare la regola del gradiente

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \langle \nabla f(1,1), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) v_2 =$$

$$= \left\langle \left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right), (v_1, v_2) \right\rangle = -\frac{v_1 + v_2}{9}$$

c) $f(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{se } x>0 \\ x+y\,e^{-x^2} & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$ È derivabile parzialmente? È differenziabile?

Se $x>0$ si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1$

Se $x<0$ si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1-2xy\,e^{-x^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{-x^2}$$

$\Rightarrow$ La funzione ammette derivate parziali continue negli aperti $\{(x,y) \mid x>0\}$ e $\{(x,y) \mid x<0\}$

Se $x=0$ $f(x,y)=f(0,y)=y$

Consideriamo dunque $(0,y_0)$ ed esaminiamo la derivabilità

$$\varphi_1(t)=f(t,y_0)=\begin{cases} t+y_0 & \text{se } t>0 \\ t+y_0 e^{-t^2} & \text{se } t\le 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_1(t)-\varphi_1(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t+y_0-y_0}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t+y_0 e^{-t^2}-y_0}{t} = 1+y_0 \lim_{t\to 0^-} \frac{e^{-t^2}-1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^-} 1+y_0 \frac{-2t e^{-t^2}}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = 1$$

$$\varphi_2(t) = f(0, y_0+t) = y_0+t \Rightarrow \varphi_2'(t) = 1$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = 1$$

$\Rightarrow f$ è derivabile (parzialmente in tutto il suo dominio)

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 1-2xye^{-x^2} & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Cerchiamo di applicare il teorema del differenziale totale.

Dimostriamo che le derivate parziali sono continue in tutto il dominio ($\mathbb{R}^2$).

$\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in $\{(x,y) \mid x \neq 0\}$

Consideriamo $(0, y_0)$.

$(x,y) = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x\geq 0}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x<0}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} 1 - 2xy e^{-x^2} = 1$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua su $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x\geq 0}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} 1 = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x<0}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} e^{-x^2} = 1$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua su $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ posso applicare il Teorema del differenziale totale $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 7

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x, y, z, u, v, w, s) = 0$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$$\mathcal{C}^1(A) = \{ f: A \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile in } A \text{ e tutte le sue derivate parziali sono continue in } A \}$$

Corollario (del Teorema del differenziale totale) ;

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in \mathcal{C}^1(A) \Rightarrow f$ differenziabile in A

Dim: Basta applicare il teor. del differenziale totale in ogni $x \in A$, prendendo come intorno di x l'insieme A (aperto). $\square$

Operazioni algebriche

Per il calcolo delle derivate valgono le usuali operazioni algebriche

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial g}{\partial x_i}\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(f\cdot g)=\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g+f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{f}{g}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g-\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot f}{g^2}$$

Simili proprietà valgono anche per il differenziale.

Ad esempio: $d(\alpha f+\beta g)=\alpha\, df+\beta\, dg$

Derivate e differenziali di ordine superiore

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, v versore in $\mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in A$

Supponiamo che $\exists \ \frac{\partial f}{\partial v}(x) \ \forall x$ in un intorno $U_{\bar{x}}$ di $\bar{x}$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial v} : U_{\bar{x}} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione ben definita

Dato un altro versore $w \in \mathbb{R}^n$ si può studiare l'esistenza

di $\frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial v}(x)$ per $x \in U_{\bar{x}}$

$\frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial}{\partial v} f(x)$ DERIVATA SECONDA DI f NELLE DIREZIONI v E w

(nell'ordine), indicata con $D^2_{wv} f(x)$

Nei casi $v = e_i$, $w = e_j$, cioè con versori elementi della base canonica di $\mathbb{R}^n$ si hanno le

DERIVATE PARZIALI SECONDE RISPETTO x_i e x_j (nell'ordine) indicate con uno dei seguenti simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \qquad f_{x_j x_i}(x) \qquad D_{x_j x_i} f(x) \qquad D^2_{x_j x_i} f(x) \qquad \partial_{x_j x_i} f(x)$$

Se $j \neq i$ si hanno le derivate seconde MISTE, se $j = i$ si chiamano PURE e il primo simbolo si scrive $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$.

Esempi

a) $f(x,y) = x^3 y + 2\,\mathrm{sen}(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y + 2y\cos(xy) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy - 2y^2\,\mathrm{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2x\cos(xy) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x^2\,\mathrm{sen}(xy)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 y + 2y\cos(xy)\right) = 3x^2 + 2\left[\cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy)\right] \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + 2x\cos(xy)\right) = 3x^2 + 2\left[\cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy)\right] \end{cases}$$

SONO UGUALI! UN CASO?

b)

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Calcoliamo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$

$$\varphi_2(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) \qquad \varphi_2'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_2(t)-\varphi_2(0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$$

$\Rightarrow$ MI SERVE PRIMA $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y) - f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\, y\, \frac{t^2 - y^2}{t^2+y^2}}{\cancel{t}} = -y$$

$f(0,y) = 0 \ \forall y$

$$\varphi_2(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = -t \Rightarrow \varphi_2'(0) = -1 = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Analogamente

$$\varphi_1(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,0) \qquad \varphi_1'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

$\Rightarrow$ MI SERVE PRIMA $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x\cancel{t}\,\frac{x^2-t^2}{x^2+t^2}}{\cancel{t}} = x$$

$f(x,0)=0\ \forall x$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = t \qquad \varphi_1'(0) = 1 = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

COME MAI QUI SONO DIVERSE??

Teorema (di Schwarz)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\overline{z} \in A$

$\exists\, U_{\overline{z}}$ intorno di $\overline{z}$: $\forall z \in U_{\overline{z}}$ $\exists$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(z)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(z)$

con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ continue in $\overline{z}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{z}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{z})$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 8

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, u, v, w, s, t) = 0$$

Teorema (di Schwarz)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\overline{z} \in A$

$\exists\, U_{\overline{z}}$ intorno di $\overline{z}$: $\forall z \in U_{\overline{z}}$ $\exists$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(z)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(z)$

con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ continue in $\overline{z}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{z}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{z})$$

NB: si può dimostrare un teorema analogo per derivate direzionali seconde qualunque

Il concetto di derivata seconda si può estendere a derivate di ordine superiore

Ad esempio, se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ è definita in un intorno $U_{\bar{x}}$, si può studiare la derivata terza $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}$, A aperto

$\mathcal{C}^k(A) = \{ f: A \to \mathbb{R}$ che hanno tutte le derivate parziali fino all'ordine k e queste sono continue in $A \}$

Se $f \in \mathcal{C}^k(A)$ si dice anche che f è di classe $\mathcal{C}^k$ su A.

$\mathcal{C}^\infty(A) = \{ f: A \to \mathbb{R}$ derivabili parzialmente infinite volte con derivate parziali di qualunque ordine continue $\}$

Il teorema di Schwarz si può generalizzare a derivate di ordine superiore.

$f \in C^k(A) \Rightarrow$ tutte le derivate parziali miste dello stesso ordine rispetto le stesse variabili sono uguali

Esempio

$$f \in C^4(A) \Rightarrow \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial y \partial x}$$

Def.: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in A

Se le sue derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,\dots,n)$ sono differenziabili in x

f è detta 2 VOLTE DIFFERENZIABILE e

$$d^2 f(x) : h \longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, h_i h_j$$

è il DIFFERENZIALE SECONDO DI f in x.

Inoltre la matrice

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

è detta MATRICE HESSIANA DI f

Di conseguenza

$$d^2f(x)(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j = \left\langle H_f(x) h, h \right\rangle$$

Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$

$$H_f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}$$

$$d^2f(\bar{x}, \bar{y})(h) = \left\langle H_f(\bar{x}, \bar{y}) h, h \right\rangle =$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x},\overline{y}) h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x},\overline{y}) h_2 , \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x},\overline{y}) h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x},\overline{y}) h_2 \right), (h_1, h_2) \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x},\overline{y}) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x},\overline{y}) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x},\overline{y}) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x},\overline{y}) h_2^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x},\overline{y}) h_i h_j$$

NB: Per una funzione f di 2 variabili due volte differenziabile non è detto a priori che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ siano continue
$\Rightarrow$ non è detto si possa applicare il teor. di Schwarz per dimostrare che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Tuttavia vale il seguente teorema

Teorema

f due volte differenziabile in $x \Rightarrow$ l'ordine di derivazione nelle derivate seconde miste è invertibile.

Si possono definire anche le funzioni k volte differenziabili

f con tutte le derivate parziali di ordine $k-1$ in un intorno di x
e queste sono differenziabili in x

$\Rightarrow$ f è detta k VOLTE DIFFERENZIABILE IN x

Teorema (di derivazione della funzione composta)

a) $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g:]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to A$, A aperto

g derivabile in $\bar{t} \in]a,b[$, f differenziabile in $\bar{x} = g(\bar{t})$

$\Rightarrow h = f \circ g$ derivabile in $\bar{t}$ e si ha

$$h'(\bar{t}) = \langle \nabla f(g(\bar{t})), g'(\bar{t}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\bar{t}))\, g_i'(\bar{t})$$

dove $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ e $g'(t) = (g_1'(t), \dots, g_n'(t))$

b) $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $g:]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(A) \subseteq]a,b[$, f differenziabile in $\bar{x} \in A$, g derivabile in $\bar{t} = f(\bar{x})$

$\Rightarrow h = g \circ f$ è differenziabile in $\bar{x}$ e si ha

$$\nabla h(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \nabla f(\bar{x})$$

__Teorema__ (del valore medio)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in A.
Siano $x_0, x_1 \in A$ ($x_0 \neq x_1$), tali che il segmento $[x_0, x_1] \subseteq A$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in [x_0, x_1]$, $\bar{x} \neq x_0$, $\bar{x} \neq x_1$ tale che

$$f(x_1) - f(x_0) = \langle \nabla f(\bar{x}), x_1 - x_0 \rangle$$

Dim: Sia $x(t) = t x_1 + (1-t) x_0$ con $t \in [0,1]$, che descrive i punti del segmento $[x_0, x_1]$

Sia poi

$$g = f \circ x \qquad \begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & A \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

g è continua perché composta di continue e derivabile per il teor. di derivazione della funzione composta in $]0,1[$.

$\Rightarrow$ per il teor. del valor medio per funzioni in una variabile si ha

$\exists\, \bar{t} \in \,]0,1[\, : \; g(1) - g(0) = g'(\bar{t})(1-0) = g'(\bar{t})$

$\Rightarrow$ posto $\bar{x} = \pi(\bar{t})$ si ha $\bar{x} \in [x_0, x_1]$ e $\bar{x} \neq x_0, \bar{x} \neq x_1$

Inoltre

$$f(x_1) - f(x_0) = g(1) - g(0) = g'(\bar{t}) = \langle \nabla f(\bar{x}), \pi'(\bar{t}) \rangle =$$

$$= \langle \nabla f(\bar{x}), x_1 - x_0 \rangle$$

TEOR. DERIV. FUNZ. COMPOSTA $\square$

CASO a)

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL TEOR. DEL VALOR MEDIO

$z = f(x,y)$ superficie grafico di f

$$z - f(\bar{x},\bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x},\bar{y}), (x-\bar{x}, y-\bar{y}) \rangle$$

Piano tangente a $z = f(x,y)$ in $(\bar{x},\bar{y}, f(\bar{x},\bar{y}))$

$$\left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}), \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}), -1 \right)}, (x-\bar{x}, y-\bar{y}, z - f(\bar{x},\bar{y})) \right\rangle = 0$$

vettore $n \perp$ al piano tangente in $(\bar{x},\bar{y}, f(\bar{x},\bar{y}))$

Retta r per $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)),\ (x_1, y_1, f(x_1, y_1))$

$$r \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = f(x_0, y_0) + (f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0))t \end{cases}$$

$$\boxed{v = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0))}$$

VETTORE $\parallel$ a r

Teorema del valore medio $(n=2)$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile, $(x_0,y_0), (x_1,y_1) \in A$ aperto tali che

$[(x_0,y_0),(x_1,y_1)] \subseteq A$

$\Rightarrow \exists\, (\bar{x},\bar{y}) \in [(x_0,y_0),(x_1,y_1)]$, $(\bar{x},\bar{y}) \neq (x_0,y_0)$, $(\bar{x},\bar{y}) \neq (x_1,y_1)$:

$$f(x_1,y_1) - f(x_0,y_0) = \left\langle \nabla f(\bar{x},\bar{y}), (x_1-x_0, y_1-y_0) \right\rangle$$

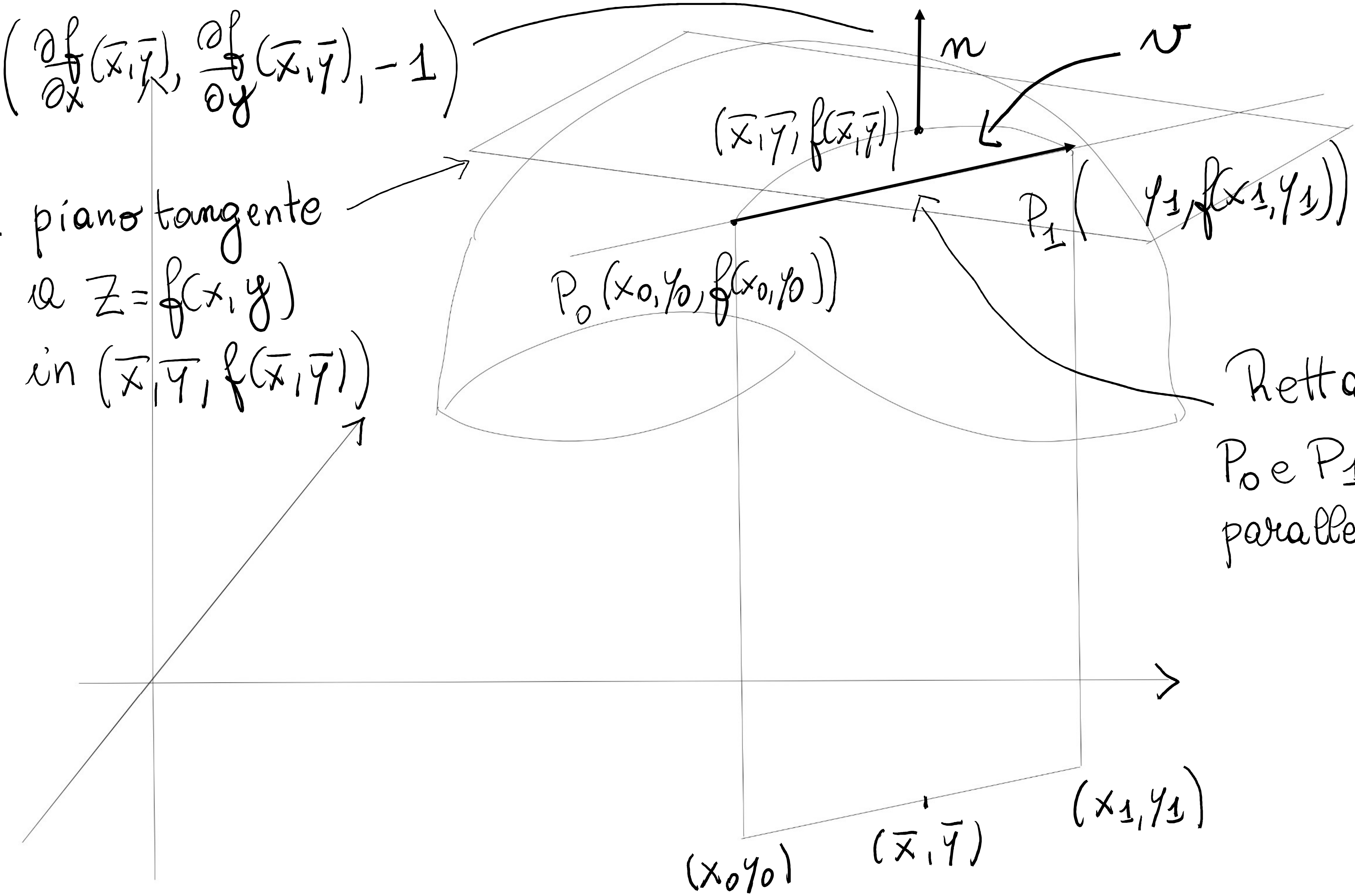
$$\longrightarrow \left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}), \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}), -1\right)}_{\text{vettore } \perp \text{ piano tangente}}, \underbrace{\left(x_1-x_0, y_1-y_0, f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)\right)}_{v \text{ vettore } \parallel r} \right\rangle = 0$$

$\Rightarrow n \perp v$

cioè piano tangente e retta sono paralleli

$$n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}), \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}), -1 \right)$$

$n \perp$ piano tangente
a $z = f(x,y)$
in $(\bar{x},\bar{y}, f(\bar{x},\bar{y}))$



Retta per
P_0 e P_1
parallela a v

Teorema (di derivazione della funzione composta)

a) $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g:]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to A$, A aperto

g derivabile in $\bar{t} \in]a,b[$, f differenziabile in $\bar{x} = g(\bar{t})$

$\Rightarrow h = f \circ g$ derivabile in $\bar{t}$ e si ha

$$h'(\bar{t}) = \langle \nabla f(g(\bar{t})), g'(\bar{t}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\bar{t}))\, g_i'(\bar{t})$$

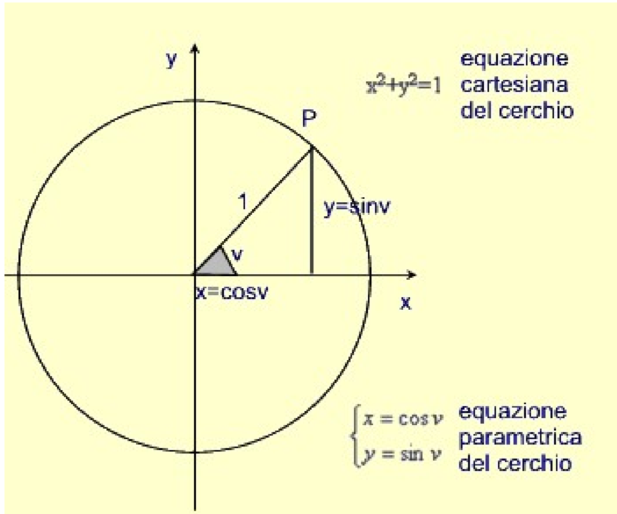
dove $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ e $g'(t) = (g_1'(t), \dots, g_n'(t))$

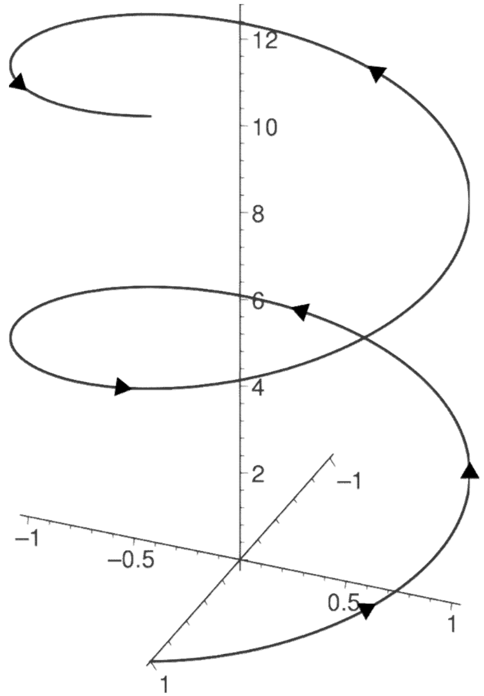
In $\mathbb{R}^2$ $g(t)=(g_1(t), g_2(t))$ rappresenta in generale una curva nel piano

Esempio: $g(t)=(r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t) \Rightarrow$ circonferenza

In $\mathbb{R}^3$ $g(t)=(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ rappresenta in generale una curva nello spazio

Esempio: $g(t)=(a\cos t, b\sin t, ct) \Rightarrow$ elica cilindrica a sezione ellittica





$(\cos t, \sin t, t)$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL TEOR. DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA ($n=2$)

$$h(\bar{t}) = \left\langle \nabla f(g(\bar{t})), g'(\bar{t}) \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(g(\bar{t}))\, g_1'(\bar{t}) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(\bar{t}))\, g_2'(\bar{t}) \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(\bar{t})), \frac{\partial f}{\partial y}(g(\bar{t})), -1\right)}, \underbrace{\left(g_1'(\bar{t}), g_2'(\bar{t}), h'(\bar{t})\right)} \right\rangle = 0$$

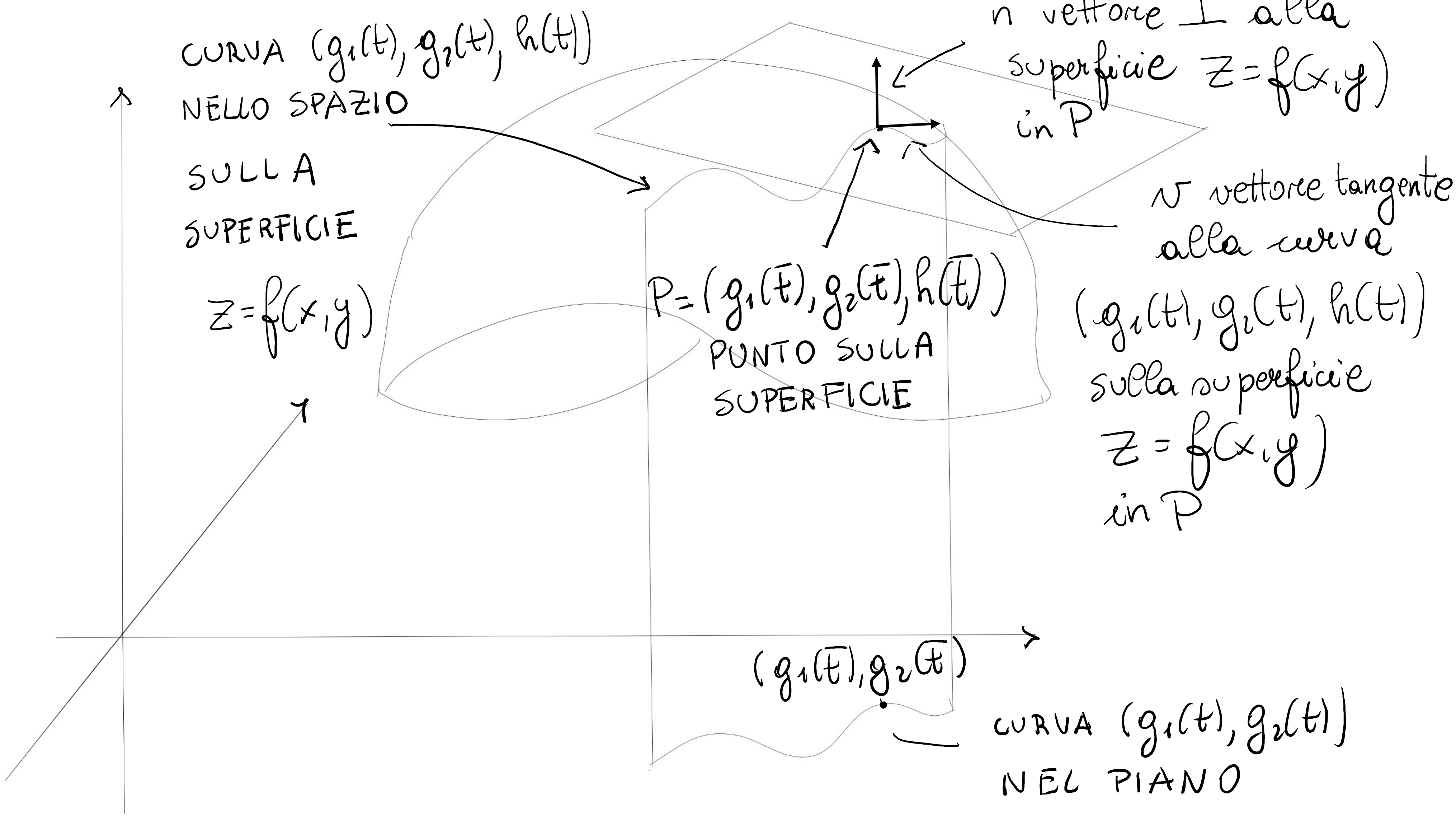
n vettore $\perp$ alla superficie $z = f(x,y)$ nel punto $(g_1(\bar{t}), g_2(\bar{t}), f(g(\bar{t})))$, $f(g(\bar{t})) = h(\bar{t})$

v vettore tangente alla curva

$$\begin{cases} x = g_1(t) \\ y = g_2(t) \\ z = f(g(t)) = h(t) \end{cases}$$

nel punto $(g_1(\bar{t}), g_2(\bar{t}), f(g(\bar{t})))$, $f(g(\bar{t})) = h(\bar{t})$

n e v sono perpendicolari


CURVA $(g_1(t), g_2(t), h(t))$
NELLO SPAZIO
SULLA
SUPERFICIE
$z = f(x,y)$
n vettore $\perp$ alla
superficie $z = f(x,y)$
in P
v vettore tangente
alla curva
$(g_1(t), g_2(t), h(t))$
sulla superficie
$z = f(x,y)$
in P
$P = (g_1(\bar{t}), g_2(\bar{t}), h(\bar{t}))$
PUNTO SULLA
SUPERFICIE
$(g_1(\bar{t}), g_2(\bar{t}))$
CURVA $(g_1(t), g_2(t))$
NEL PIANO

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 9

$$\frac{\partial f}{\partial r}(x, y, z, u, v, w, s, t, r) = 0$$

Formula di Taylor

Esamineremo solo il caso di ordine 2, ma esiste la versione più generale

Teorema (Formula di Taylor con resto secondo Lagrange)
$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in \mathcal{C}^2(A)$,
$\overline{x}$, h tali che $[\overline{x}, \overline{x}+h] \subseteq A$.

Allora $\exists\, \delta \in]0,1[$ dipendente da $\overline{x}$ e h tale che

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})\, h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}+\delta h)\, h_i h_j ,$$

हिन्दी
Piemontèis
中文
Altre 21
Modifica collegamenti

Formula di Taylor per funzioni di una variabile [modifica | modifica wikitesto]

Consideriamo un intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in (a, b)$. Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile $n - 1$ volte nell'intervallo (a, b), con $n \geq 1$, e supponiamo che la derivata n-esima $f^{(n)}$ sia continua nel punto x_0. Allora, definito il **polinomio di Taylor** di grado n come

$$\mathrm{T}_n(f, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

si ha che

$$f(x) = \mathrm{T}_n(f, x) + R_n(x),$$

ove $R_n(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$ cioè:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Il resto $R_n(x)$ si può esprimere in varie forme, che possono risultare più o meno utili a seconda della necessità.

Resto di Peano [modifica | modifica wikitesto]

Il resto nella **forma di Peano** è indicato semplicemente con la notazione di o piccolo:

$$R_n(x) = \mathrm{o}((x - x_0)^n).$$

Nel caso particolare $n = 1$, la formula di Taylor con il resto di Peano diventa:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0).$$

Essa esprime un'approssimazione della funzione f, derivabile nel punto x_0, mediante il polinomio di Taylor

$$\mathrm{T}_1(f, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Il grafico di $\mathrm{T}_1(f, x)$ è la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0,\ f(x_0))$. L'approssimazione suddetta è, in generale, migliore rispetto a quella ottenibile a partire dalla sola continuità, che si può esprimere come

$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{o}(1).$$

La formula di Taylor con il resto di Peano risulta particolarmente utile nel calcolo di limiti di funzioni.

nel caso quest'ultimo limite esista. Nelle nostre ipotesi la funzione $g(x) = f'(x)$, che è definita in un intorno destro di x_0, è derivabile $n-1$ volte in x_0 e quindi, osservando che

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k-1)}(x_0), \quad k = 1, \ldots, n,$$

per l'ipotesi induttiva applicata alla funzione $g(x)$, segue che il limite nella (2) è zero, ossia (data l'eguaglianza dei limiti per la regola di de l'Hôpital):

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \cdots - f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} = \mathrm{o}(h^n),$$

il che dimostra il passo induttivo, e con esso la tesi. Q.E.D.

Resto di Lagrange [modifica | modifica wikitesto]

Il resto nella **forma di Lagrange** afferma che, se la funzione è derivabile n volte in un intorno di x_0 (si richiede che sia derivabile almeno $n-1$ volte in un intorno del tipo $[x_0, x)$, più un'altra volta in (x_0, x) per qualche x) esiste ξ compreso tra x_0 e x tale che

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

Questa formula permette di interpretare il teorema di Taylor come una generalizzazione del teorema di Lagrange.

Dimostrazione [modifica | modifica wikitesto]

Il teorema si dimostra per induzione.

La base induttiva è fatta per $n = 0$:

$$R_0 = f(x) - T_0(f, x) = f(x) - f(x_0) - f'(\zeta)(x - x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\zeta)(x - x_0)$$ vero per il teorema di Lagrange.

Il passo induttivo è fatto considerando il teorema vero per $n-1$ e dimostrandolo, con questo, per n.

Ponendo

$$F(c) = f(c) - T_n(f, c) = f(c) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(c - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(c - x_0)^n \right),$$

e

$$G(c) = (c - x_0)^{n+1}$$

Teorema (di derivazione della funzione composta) (da usare tra poco)

a) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g :]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to A$, A aperto

g derivabile in $\bar{t} \in]a,b[$, f differenziabile in $\bar{x} = g(\bar{t})$

$\Rightarrow h = f \circ g$ derivabile in $\bar{t}$ e si ha

$$h'(\bar{t}) = \langle \nabla f(g(\bar{t})), g'(\bar{t}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\bar{t}))\, g_i'(\bar{t})$$

dove $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ e $g'(t) = (g_1'(t), \dots, g_n'(t))$

Formula di Taylor

Esamineremo solo il caso di ordine 2, ma esiste la versione più generale

Teorema (Formula di Taylor con resto secondo Lagrange)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in \mathcal{C}^2(A)$,
$\bar{x}$, h tali che $[\bar{x}, \bar{x}+h] \subseteq A$.

Allora $\exists\, \delta \in]0,1[$ dipendente da $\bar{x}$ e h tale che

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})\, h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}+\delta h)\, h_i h_j ,$$

Dim: Sia $g(t) = f(\overline{x} + th)$

Scriviamo la formula di Taylor con resto di Lagrange per g in $[0,1]$ al secondo ordine

$g(1) = g(0) + g'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2} g''(\delta)$ con $\delta \in]0,1[$ dipendente da g, dunque da h

Si ha $g(0) = f(\overline{x})$, $g(1) = f(\overline{x}+h)$

Consideriamo la funzione $r(t) = \overline{x} + th$

$\Rightarrow$ $g(t) = f(r(t))$

$\Rightarrow g'(t) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$ per il teor. di derivazione della funzione composta, caso a)

Poiché $r'(t) = (h_1, \dots, h_n) = h$ si ha

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} + th) \cdot h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(r(t))\, h_i$$

Deriviamo ora $g'(t)$

Deriviamo ogni singolo termine nella sommatoria e poi sommiamo le derivate

$$= h = (h_1, \dots, h_n)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(r(t))\, h_i\right) = \left\langle \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(r(t))\, h_i ,\ r'(t) \right\rangle =$$

TEOR. DERIVAZIONE
FUNZ. COMPOSTA

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(r(t))\, h_i \cdot r_j'(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x} + th)\, h_i\, h_j$$

$$\Rightarrow g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x} + th)\, h_i\, h_j$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} g(0) = f(\bar{x}) \qquad\qquad g(1) = f(\bar{x}+h) \\ g'(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})\, h_i \\ g''(\delta) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}+\delta h)\, h_i h_j \end{array}}$$

$\leftarrow$ RIASSUNTO

Sostituendo quanto sopra nella

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\delta)$$

$\leftarrow$ OTTENUTA PRIMA

si ottiene la formula di Taylor di ordine 2 $\square$

Corollario (Formula di Taylor con resto secondo Peano)

$f \in \mathcal{C}^2(A)$, A aperto, $\bar{x} \in A$, $\bar{x}+h \in B(\bar{x}, r) \subseteq A$

$$\Rightarrow f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) h_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}) h_i h_j + o(\|h\|^2)$$

con $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0$

Dim: Sia $A(h) = f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) h_i$

Per la formula di Taylor con resto di Lagrange si ha

$$A(h) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}+\delta h) h_i h_j \quad \text{con } \delta \in]0,1[\text{ dipendente da } h$$

$\Rightarrow$ l'obiettivo diventa dimostrare che

$$\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}+\delta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})\right] h_i h_j}{\|h\|^2}}_{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}+\delta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})\right] \cdot \frac{h_i h_j}{\|h\|^2}} = 0$$

$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}+\delta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})\right] \to 0$

PERCHÉ LE DERIV. PARZIALI SECONDE SONO CONTINUE ($f \in \mathscr{C}^2(A)$)

$\frac{h_i h_j}{\|h\|^2}$: LIMITATA

$\rightarrow$ $|h_i| \leq \sqrt{\sum_{u=1}^{n} h_u^2}$

$|h_j| \leq \sqrt{\sum_{u=1}^{n} h_u^2}$

$\Downarrow$

$|h_i h_j| \leq \sum_{u=1}^{n} h_u^2 = \|h\|^2$

$\square$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 10

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x,y,z,u,v,w,s,t,r,p)=0$$

<u>Corollario</u> (Formula di Taylor con resto secondo Peano)

$f \in \mathcal{C}^2(A)$, A aperto, $\overline{x} \in A$, $\overline{x}+h \in B(\overline{x}, r) \subseteq A$

$$\Rightarrow f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) h_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}) h_i h_j + o(\|h\|^2)$$

con $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0$

<u>Dim:</u> Sia $A(h) = f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) h_i$

Per la formula di Taylor con resto di Lagrange si ha

$$A(h) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}+\delta h) h_i h_j \quad \text{con } \delta \in]0,1[\text{ dipendente da } h$$

Esempi

1) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. Sviluppare f secondo Taylor (ordine 2) in $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos x \cos y$$

$$f(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle + \frac{1}{2} d^2 f(0,0)(x,y) + o(\|(x,y)\|^2) =$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(0 \cdot x^2 + 1 \cdot xy + 1 \cdot yx + 0\, y^2\right) + o(\|(x,y)\|^2) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (x,y) \rangle =$$

$$\langle (y,x), (x,y) \rangle = 2xy$$

$$= xy + o(\|(x,y)\|^2)$$

Si ha di conseguenza

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xy}{x^2+y^2} = 0$$

Proviamo a dimostrare direttamente che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}x \operatorname{sen}y - xy}{x^2+y^2} = 0$

$$\frac{\operatorname{sen}x \operatorname{sen}y - xy}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}y - y) + y(\operatorname{sen}x - x)}{x^2+y^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}y}{y}}_{\downarrow\, 1} - \underbrace{\frac{\cancel{y}}{\cancel{y}_{1}}}_{\downarrow\, 1}\right)^{1}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{\uparrow\ \text{LIMITATA}} + \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\downarrow\, 1} - \underbrace{\frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}^{1}}}_{\downarrow\, 1}\right)}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{\uparrow\ \text{LIMITATA}} \longrightarrow 0$$

per $(x,y)\to(0,0)$

Verifichiamo che $\frac{xy}{x^2+y^2}$ è limitata. Sia $(x,y) \neq (0,0)$.

$$(x+y)^2 \geq 0 \iff x^2+y^2+2xy \geq 0 \iff 1+2\frac{xy}{x^2+y^2} \geq 0.$$

$$\iff \frac{xy}{x^2+y^2} \geq -\frac{1}{2}$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \iff x^2+y^2-2xy \geq 0 \iff 1-\frac{2xy}{x^2+y^2} \geq 0$$

$$\iff \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Verifichiamo che $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ è limitata.

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2} \iff 2|xy| \le |x^2+y^2| \iff 2|x||y| \le |x|^2+|y|^2$$

$$\iff 0 \le |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = (|x|-|y|)^2$$

2) Sviluppare $f(x,y) = xe^{xy}$ secondo Taylor (ordine 2) in $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2ye^{xy} + xy^2 e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^3 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2xe^{xy} + x^2 y e^{xy}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e tutte le altre derivate sono nulle in $(0,0)$

$$\Rightarrow f(x,y) = x + o(\|(x,y)\|^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^{xy} - x}{x^2+y^2} = 0$$

Infatti $$\frac{xe^{xy}-x}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITATA}} \; \underbrace{\frac{e^{xy}-1}{y}}_{\downarrow \, 0} \longrightarrow 0$$ per $(x,y) \to (0,0)$

Verifichiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{y} = 0$

$$\underbrace{\frac{e^{xy}-1}{y}}_{\downarrow\ 0} = \underbrace{\frac{e^{xy}-1}{xy}}_{\downarrow\ 1} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow\ 0} \qquad \text{con } \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

per $(x,y) \longrightarrow (0,0)$

TEOREMA DEL LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Def.: $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in E$

x_0 è punto di massimo (minimo) assoluto per f in E
$\Leftrightarrow$ $f(x) \leq f(x_0)$ $\left(f(x) \geq f(x_0)\right)$ $\forall x \in E$

x_0 è punto di massimo (minimo) relativo (anche detto LOCALE) per f in E
$\Leftrightarrow$ $\exists\, U_{x_0}$ intorno di x_0 : $\forall x \in U_{x_0} \cap E$ $f(x) \leq f(x_0)$ $\left(f(x) \geq f(x_0)\right)$

NB: se le diseguaglianze sono strette si parla di max (min) forte (o stretto), altrimenti di max (min) debole.

I punti di max e min sono detti complessivamente ESTREMI

Teorema (di Fermat)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $x_0 \in A$, v versore in $\mathbb{R}^n$ tale che $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$

x_0 estremo (max o min) locale per $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$

Ultime modifiche
Una voce a caso
Nelle vicinanze
Vetrina
Aiuto
Sportello informazioni

Comunità
Portale Comunità
Bar
Il Wikipediano
Fai una donazione
Contatti

Strumenti
Puntano qui
Modifiche correlate
Carica su Commons
Pagine speciali
Link permanente
Informazioni pagina
Elemento Wikidata
Cita questa voce

In altri progetti
Wikimedia Commons
Wikiquote
Wikisource

Stampa/esporta
Crea un libro
Scarica come PDF
Versione stampabile

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Disambiguazione – "Fermat" rimanda qui. Se stai cercando altri significati, vedi ***Fermat (disambigua)***.

Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, 17 agosto 1601[1] – Castres, 12 gennaio 1665) è stato un matematico e magistrato francese.

Ritratto di Pierre de Fermat

Fu tra i principali matematici della prima metà del XVII secolo e dette importanti contributi allo sviluppo della matematica moderna:

- con il suo metodo per la individuazione dei massimi e dei minimi delle funzioni precorse gli sviluppi del calcolo differenziale.
- fece ricerche di grande importanza sulla futura teoria dei numeri, iniziate durante la preparazione di un'edizione della *Arithmetica* di Diofanto di Alessandria, su cui scrisse note ed osservazioni contenenti numerosi teoremi. Proprio in una di queste osservazioni "a margine" enunciò il cosiddetto ultimo teorema di Fermat (che credeva, molto probabilmente a torto, di aver dimostrato), che è rimasto indimostrato per più di 300 anni, fino al lavoro di Andrew Wiles nel 1994.
- scoprì, indipendentemente da Cartesio, i principi fondamentali della geometria analitica e, attraverso la corrispondenza con Blaise Pascal, fu uno dei fondatori della teoria della probabilità.

Indice [nascondi]

Biografia [modifica | modifica wikitesto]

Pierre de Fermat - Wikipedia | Ultimo teorema di Fermat - Wi | Andrew Wiles - Wikipedia

https://it.wikipedia.org/wiki/Ultimo_teorema_di_Fermat

Cerca

Ultime modifiche
Una voce a caso
Nelle vicinanze
Vetrina
Aiuto
Sportello informazioni

Comunità

Portale Comunità
Bar
Il Wikipediano
Fai una donazione
Contatti

Strumenti

Puntano qui
Modifiche correlate
Carica su Commons
Pagine speciali
Link permanente
Informazioni pagina
Elemento Wikidata
Cita questa voce

In altri progetti

Wikimedia Commons
Wikibooks
Wikiquote

Stampa/esporta

Crea un libro
Scarica come PDF
Versione stampabile

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

L'**ultimo teorema di Fermat** (più correttamente definibile come **ultima congettura di Fermat**, non essendo dimostrata all'epoca) affermò che non esistono soluzioni intere positive all'equazione:

$$a^n + b^n = c^n$$

se $n > 2$.

L'edizione del 1670 dell'*Arithmetica* di Diofanto di Alessandria include a margine il commento di Fermat, in latino,

Indice [nascondi]

Storia [modifica | modifica wikitesto]

L'enunciato fu formulato da Pierre de Fermat nel 1637, il quale tuttavia non rese nota la dimostrazione che affermò di aver trovato. Scrisse in proposito, ai margini di una copia dell'*Arithmetica* di Diofanto di Alessandria sulla quale era solito formulare molte delle sue famose teorie:

> *"Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina".*

Nei secoli successivi diversi matematici hanno tentato di fornire una dimostrazione alla congettura di Fermat, tra questi

ITA 11:02 PM 4/2/2020

Andrew Wiles

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Andrew John Wiles (Cambridge, 11 aprile 1953) è un matematico britannico, celebre per aver ottenuto la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat.

Andrew Wiles

Premio Wolf per la matematica 1995
Premio Abel 2016

Indice [nascondi]

Ultimo teorema di Fermat [modifica | modifica wikitesto]

L'ultimo teorema di Fermat afferma che, per tutti i numeri interi n maggiori di 2, non esistono terne di interi positivi a, b e c per le quali si abbia:

$$a^n + b^n = c^n.$$

La dimostrazione di questo enunciato, che Pierre de Fermat aveva soltanto affermato di aver scoperto senza poi effettivamente illustrarla, per 350 anni era stata affrontata invano da molti valenti matematici e aveva anche indotto a pensare che la dimostrazione stessa fosse impossibile da ottenere. Wiles fu attratto da questo problema a dieci anni dalla lettura del libro di E. T. Bell *L'ultimo problema* e fu indotto a interessarsi di teoria dei numeri.

Nel 1971 si iscrisse al Merton College dell'Università di Oxford e vi conseguì un B.A. nel 1974. Nello stesso anno entrò nel Clare College dell'Università di Cambridge per iniziare gli studi di dottorato e, sotto la guida di John Coates, affrontò la teoria di Iwasawa per lo studio delle curve ellittiche. Nel 1979 preparò la dissertazione dal titolo *Reciprocity Laws and the Conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer* (Le leggi di reciprocità e la congettura di Birch e Swinnerton-Dyer), avendo John Coates come *advisor*, e nel 1980 conseguì il

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 11

$$\frac{\partial f}{\partial q}(x,y,z,u,v,w,s,t,r,p,q)=0$$

Def.: $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in E$

x_0 è punto di massimo (minimo) assoluto per f in E
$\iff f(x) \leq f(x_0)$ $\left(f(x) \geq f(x_0) \right)$ $\forall x \in E$

x_0 è punto di massimo (minimo) relativo (anche detto LOCALE) per f in E
$\iff \exists\, U_{x_0}$ intorno di x_0 : $\forall x \in U_{x_0} \cap E$ $f(x) \leq f(x_0)$ $\left(f(x) \geq f(x_0) \right)$

NB: se le disegueaglianze sono strette si parla di max (min) forte (o stretto), altrimenti di max (min) debole.

I punti di max e min sono detti complessivamente ESTREMI

Teorema (di Fermat)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $x_0 \in A$, v versore in $\mathbb{R}^n$ tale che $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$

x_0 estremo (max o min) locale per $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$

Dim: Sia U_{x_0} intorno di x_0: $\forall x \in U_{x_0} \cap A$ risulti $f(x) \geq f(x_0)$ $\left(f(x) \leq f(x_0)\right)$ e sia

$g(t) = f(x_0 + tv)$

g è composta di $u(t) = x_0 + tv$ e f.

Obiettivo: applicare il teorema di Fermat in $\mathbb{R}$ a g

Ho bisogno di

a) Determinare il dominio di g

b) Dimostrare che 0 è interno al dominio di g

c) Dimostrare che 0 è punto di minimo (massimo) locale per g.

a)
$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & A \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Dominio di g: $\{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in A\} = u^{-1}(A)$

b) u è continua: $u(t) = (\underbrace{x_0^1 + tv_1}_{u_1(t)}, \dots\dots, \underbrace{x_0^n + tv_n}_{u_n(t)})$

TUTTE CONTINUE

$\Rightarrow u^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}$ e

$0 \in u^{-1}(A)$ poiché $u(0) = x_0 \in A$

$\Rightarrow 0$ è interno a $u^{-1}(A)$ dominio di g

c) x_0 minimo (massimo) locale per $f \Rightarrow \exists\, U_{x_0}$ intorno aperto di x_0: $\forall x \in U_{x_0} \cap A$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$

$\Rightarrow \bar{u}^1(U_{x_0})$ è aperto in $\mathbb{R}$ perché u è continua e si ha $0 \in \bar{u}^1(U_{x_0})$ poiché $u(0) = x_0 \in U_{x_0}$

$\Rightarrow \bar{u}^1(U_{x_0})$ è un intorno di 0 in $\mathbb{R}$

Sia $t \in \underbrace{\bar{u}^1(A)}_{\text{dominio di } g} \cap \underbrace{\bar{u}^1(U_{x_0})}_{\text{intorno di } 0 \text{ in } \mathbb{R}}$

$\Rightarrow g(t) = f(x_0 + tv) \geq f(x_0) = g(0) \quad (\text{o} \leq f(x_0) = g(0))$

$\forall t$ tale che $u(t) = x_0 + tv \in A \cap U_{x_0}$ perché x_0 punto di min (max) per f.

$\Rightarrow g(t) \geq g(0) \quad (\leq g(0)) \quad \forall\, t$ tale che

$t \in u^{-1}(A) \cap u^{-1}(U_{x_0})$

DOMINIO DI g INTORNO DI 0 IN $\mathbb{R}$

$\Rightarrow 0$ punto di min (max) locale per g <u>interno al suo dominio</u>

$$\Longrightarrow g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$$

TEOREMA DI FERMAT IN UNA VARIABILE

Esempio

$$f(x,y) = xy(x-1) \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(2x-1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(x-1) = 0$$

I POSSIBILI ESTREMI SONO

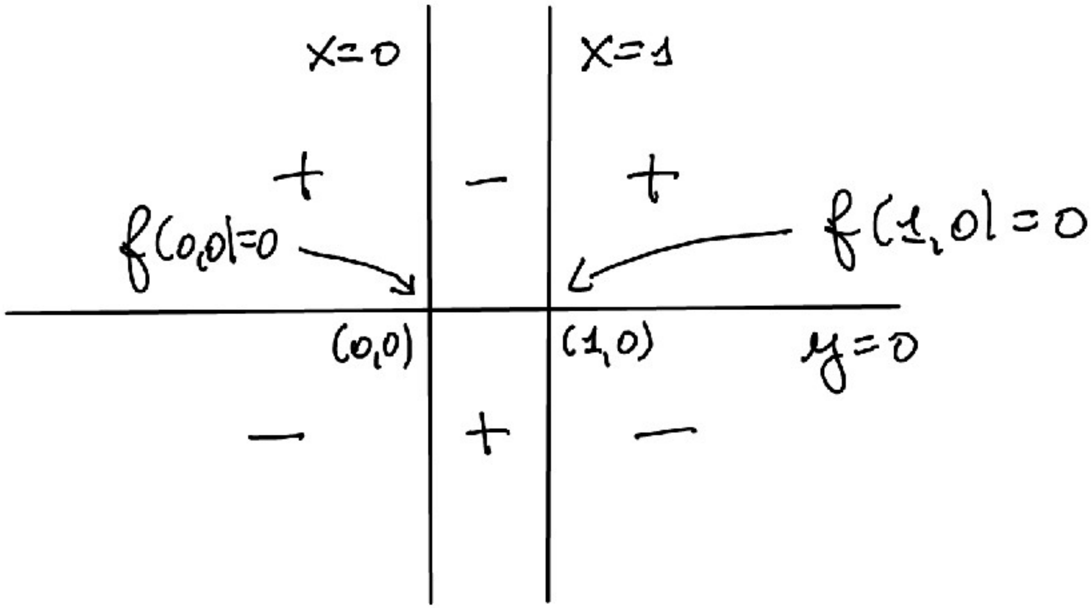
$\Rightarrow \quad (0,0) \qquad (1,0)$

con $f(0,0) = f(1,0) = 0$

CI SONO TECNICHE PER DECIDERE SE SONO ESTREMI BASATE SULLE DERIVATE SECONDE ... IN SEGUITO

Proviamo studiando il segno della funzione

$$f(x,y)=0 \iff x=0 \vee y=0 \vee x=1$$



$\Rightarrow \forall U_{(0,0)} \ \exists (\overline{x}_1,\overline{y}_1) \in U_{(0,0)}$:

$f(\overline{x}_1,\overline{y}_1) < f(0,0) = 0$ e

$\exists (\overline{x}_2,\overline{y}_2) \in U_{(0,0)}$:

$f(\overline{x}_2,\overline{y}_2) > f(0,0) = 0$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ NON è estremo

Analogo per $(1,0)$

Si possono usare anche restrizioni.

Ad esempio, in $(0,0)$

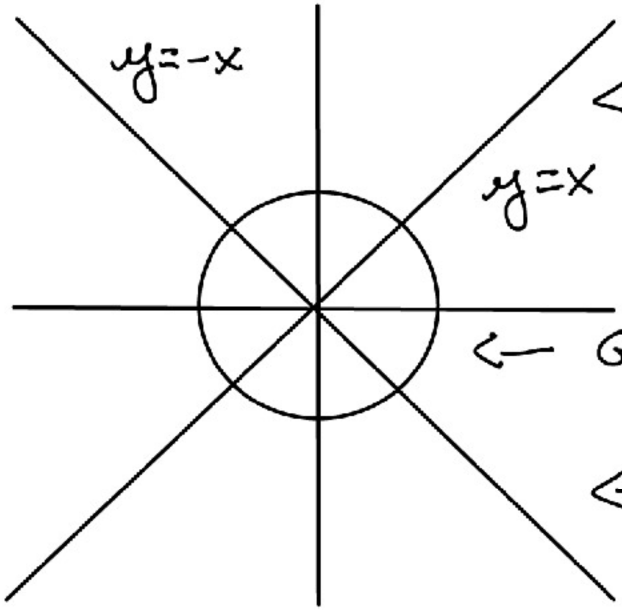
$$f|_{y=x}(x,y) = x^3 - x^2 = \varphi(x) \qquad \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 2x \qquad \varphi'(0) = 0 \qquad 0 \text{ interno al dominio di } \varphi$$

$$\varphi''(x) = 6x - 2 \qquad \varphi''(0) = -2 < 0 \implies 0 \text{ punto di max relativo}$$

$$f|_{y=-x}(x,y) = -x^2(x-1) = \psi(x) = -\varphi(x) \qquad 0 \text{ interno al dominio di } \psi$$

$$\implies \psi'(0) = -\varphi'(0) = 0 \quad \psi''(0) = -\varphi''(0) > 0 \implies 0 \text{ punto min relativo}$$

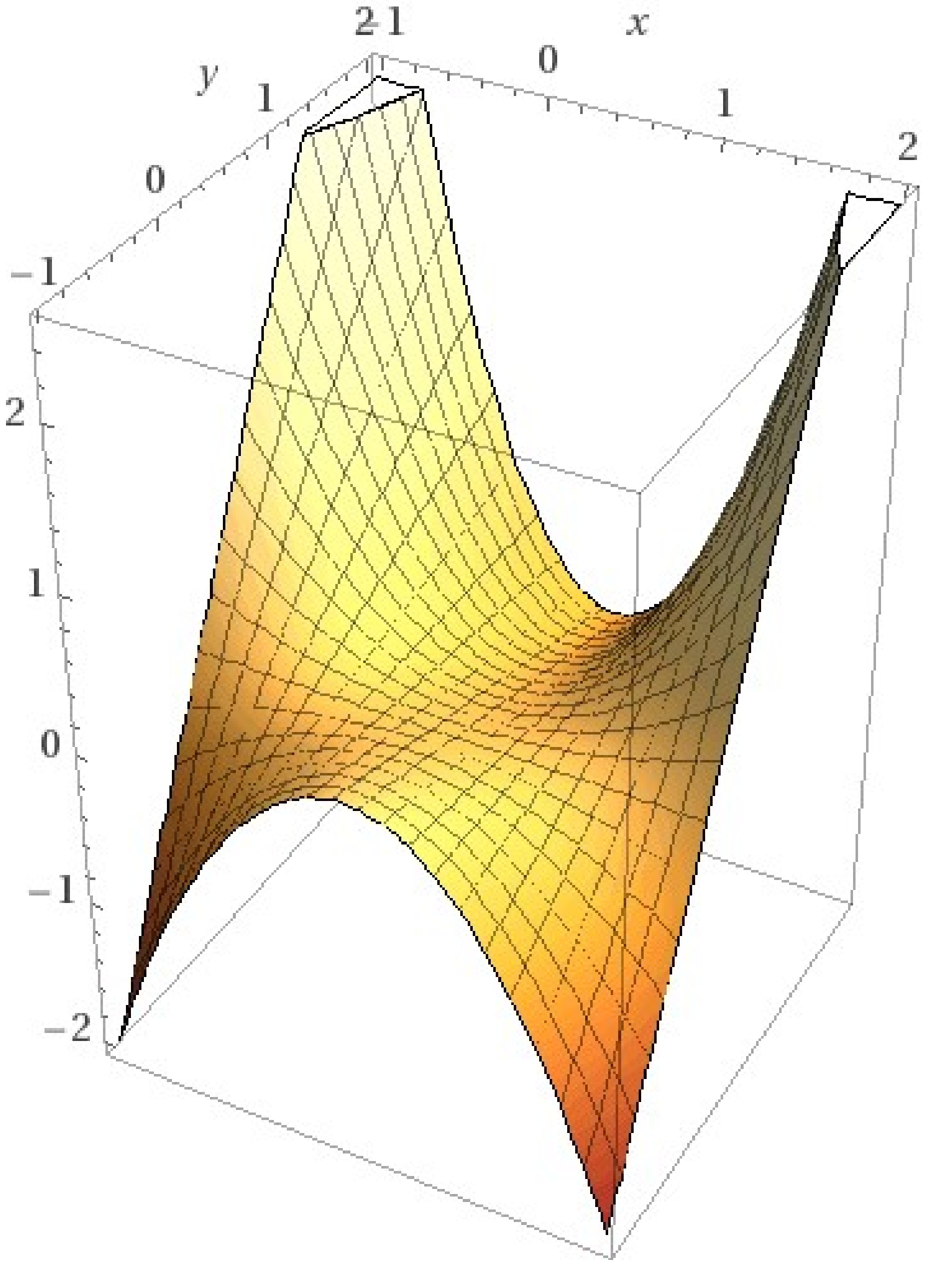


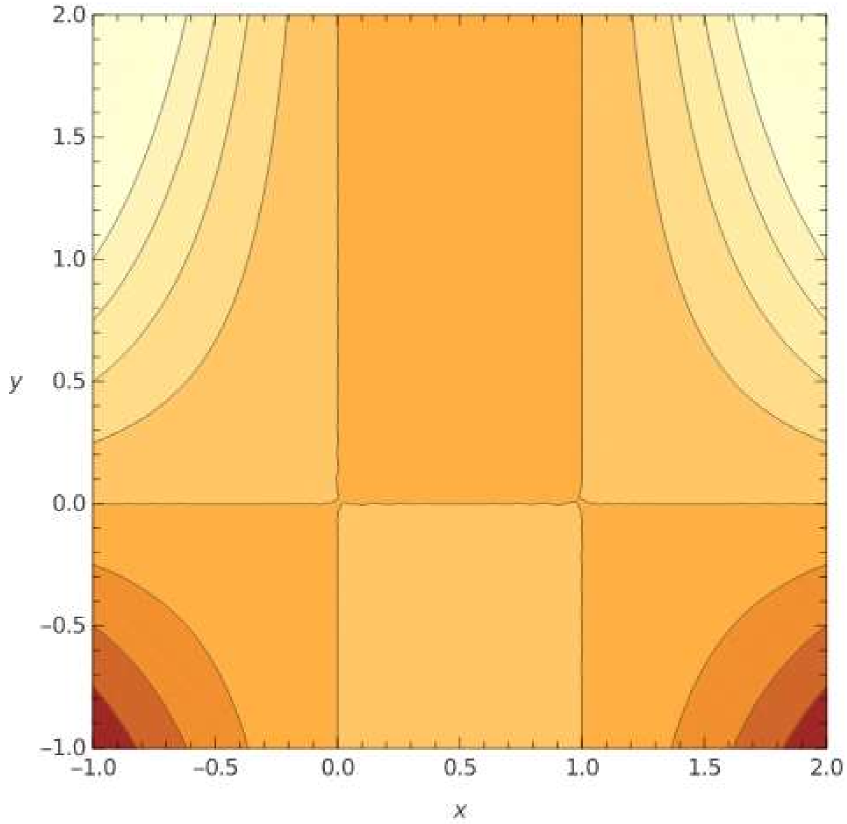
QUI $(0,0)$ è punto di max relativo per f

GENERICO INTORNO DI $(0,0)$

QUI $(0,0)$ è punto di min relativo per f

$\Rightarrow$ $(0,0)$ NON È PUNTO NÉ DI MAX NÉ DI MIN PER f


x
-1
0
1
2
y
-1
0
1
2
-2
-1
0
1
2


y
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
x