Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 12

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x, y, z, u, v, w, s, t, r, p, q, l) = 0$$

Funzioni $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e differenziabilità

<u>Def.:</u> $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A aperto, $x \in A$

f differenziabile in $x \iff \exists M$ matrice $m \times n$ tale che

$f(x+h) - f(x) = Mh + o(\|h\|)$ con $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $x+h \in A$

e con $\lim_{h \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0$

$df(x) : h \longrightarrow Mh$ è il differenziale di f in x ed è un'applicazione lineare.

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad x \in A$ aperto

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ con $f_i(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ se f è differenziabile in x e $M = (m_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

$f(x+h) - f(x) = Mh + o(\|h\|)$ diventa

$$f_i(x+h) - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} h_j + o(\|h\|)$$

$\Rightarrow$ ogni f_i è differenziabile in x

$$\Rightarrow f_i(x+h) - f_i(x) = \langle \nabla f_i(x), h \rangle + o(\|h\|)$$

$\Rightarrow \nabla f_i(x)$ è la i-esima riga di M

$$M = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = J_f(x)$$

La matrice $J_f(x)$ (indicata anche con $Df(x)$, $f'(x)$) è detta MATRICE JACOBIANA DI f IN x

Dunque

$$\boxed{f \text{ È DIFFERENZIABILE IN } x \Longleftrightarrow \text{SONO DIFFERENZIABILI IN } x \text{ TUTTE LE SUE COMPONENTI } f_i}$$

Applicando la relazione tra f e le sue componenti per quanto riguardo differenziabilità, derivabilità, continuità, si possono in generale estendere a funzioni $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ risultati e concetti visti per funzioni $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Ad esempio, se $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

f differenziabile in $x \Rightarrow f$ continua in x e $\exists$ derivate direzionali

Valgono i corrispondenti dei teoremi del differenziale totale e di Schwarz

Non si può invece estendere il teorema del valor medio

Esempio: $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$f(2\pi) - f(0) = (0,0)$

ma $\nexists\, \bar{x} \in]0, 2\pi[$ tale che

$$f'(\bar{x}) = (-\operatorname{sen} \bar{x}, \cos \bar{x}) = (0,0)$$

e dunque risulti $f(2\pi) - f(0) = f'(\bar{x})(2\pi - 0)$.

Funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$r(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ ⟵ EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA LINEA

$m \in \{2,3\}$ $\quad r(t) = (x(t), y(t))$

$\qquad\qquad\quad r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ rappresenta una "linea"

Esempi

$r(t) = (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, z_0 + \gamma t)$ retta nello spazio $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1)$

passante per x_0 nella direzione (α, β, γ)

$r(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\operatorname{sen} t)$ $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$ rappresenta una circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio R.

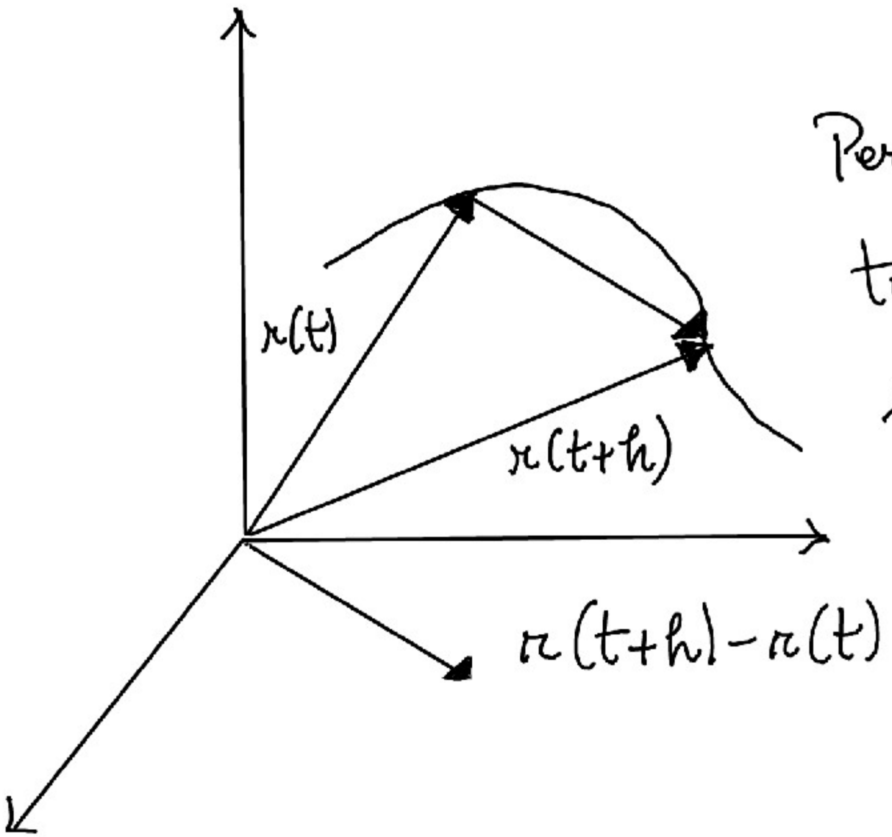
Dati: $r: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A$ aperto, $r(t) = (r_1(t), \dots, r_m(t))$

r è differenziabile in $x_0 \Leftrightarrow r_i$ è derivabile in x_0 $\forall i = 1, \dots, m$

La matrice Jacobiana in questo caso diventa

$$r'(t) = \left(r'_1(t), r'_2(t), \dots, r'_m(t) \right)$$

Dato $\bar{t} \in A$, $r'(\bar{t})$ rappresenta il vettore tangente alla curva individuata da $r(t)$ nel punto $r(\bar{t})$.



$n=3$

Per $h \to 0$ il vettore $\dfrac{r(t+h)-r(t)}{h}$ tende a una posizione limite, tangente alla linea in $r(t)$

Funzioni da $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

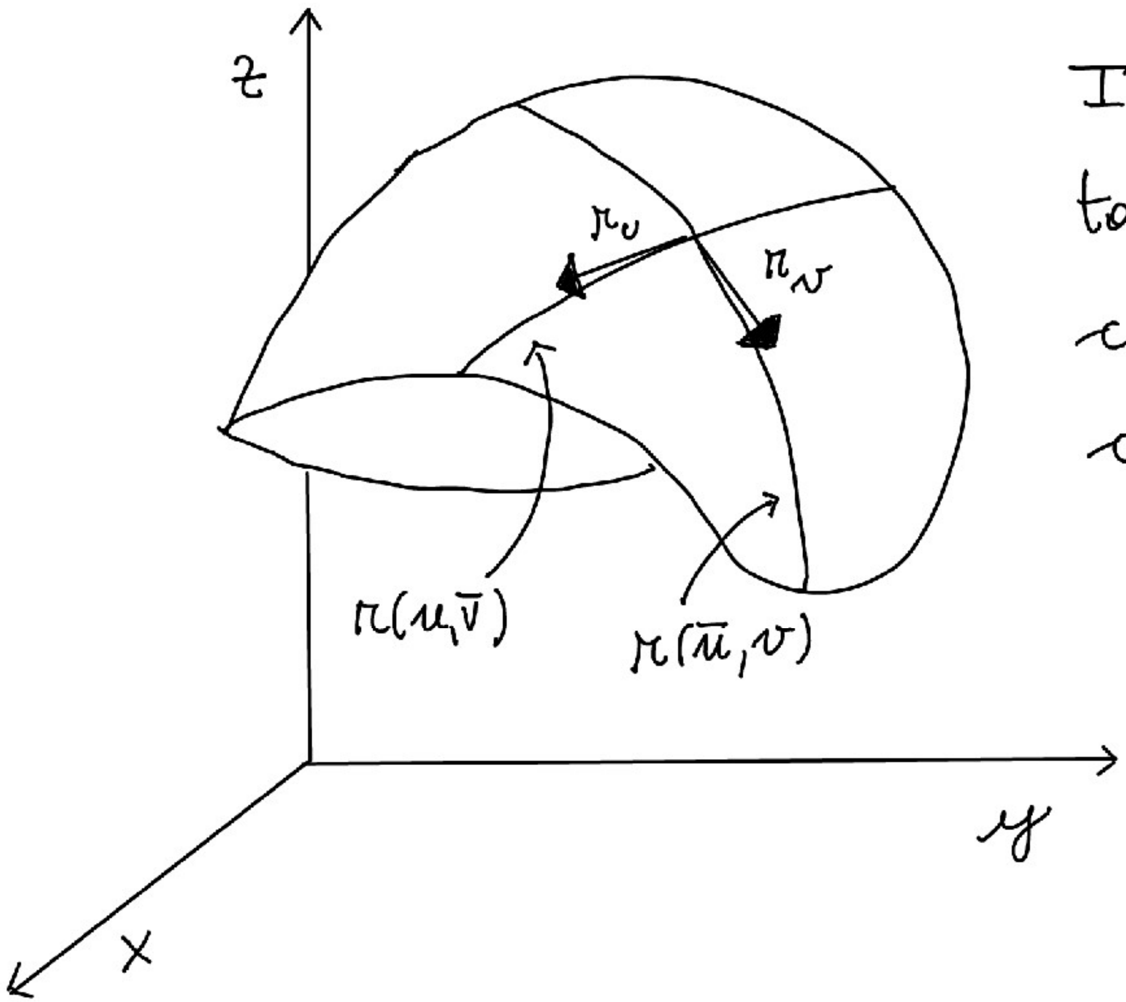
$r : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ A aperto $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$r(u,v)$ descrive una "superficie" nello spazio, al variare dei parametri u e v

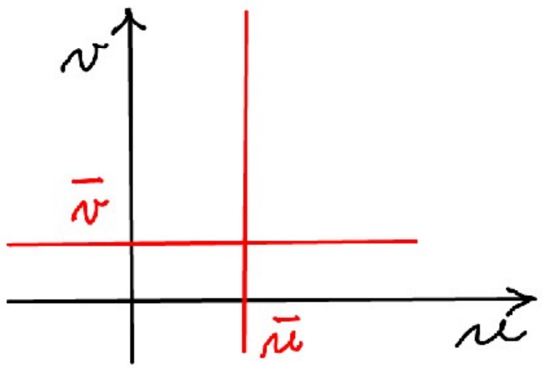
Se r è differenziabile, la matrice Jacobiana diventa

$$r' = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

$$r_u = (x_u, y_u, z_u)$$
$$r_v = (x_v, y_v, z_v)$$



I vettori r_u e r_v sono tangenti alle linee $r(u,\bar{v})$, $r(\bar{u},v)$ corrispondenti a $\bar{v}$, $\bar{u}$ costanti nel piano u,v



Teorema (del differenziale della funzione composta)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti

$f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^p$

f differenziabile in $x \in A$, g differenziabile in $f(x)$

$\Rightarrow$ $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ è differenziabile in x e si ha

$$\underbrace{J_{g \circ f}(x)}_{p \times n} = \underbrace{J_g(f(x))}_{p \times m} \cdot \underbrace{J_f(x)}_{m \times n}$$

$\leftarrow$ MATRICI

Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad g\circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(u,v) = (u^2, uv, v^2) \qquad g(x,y,z) = x^2 + yz$

$$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 0 & v \end{pmatrix} \qquad J_g(f(u,v)) \underset{\nabla g(f(u,v))}{=} (2x, z, y)\Big|_{f(u,v)} =$$

$$= (2u^2, v^2, uv)$$

CALCOLATO IN $f(u,v)$

$$\Rightarrow J_{g\circ f}(u,v) = (2u^2, v^2, uv) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{pmatrix} =$$

$$= (4u^3+v^3, uv^2+2uv^2) = (4u^3+v^3, 3uv^2)$$

Con il calcolo diretto si ha

$$g\circ f(u,v) = u^4+uv^3$$

$$\Rightarrow J_{g\circ f}(u,v) = \nabla g\circ f(u,v) = (4u^3+v^3, 3uv^2)$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 13

$$\frac{\partial f}{\partial m}(x, y, z, u, v, w, s, t, r, p, q, l, m) = 0$$

Funzione implicita

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, A aperto

$g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo

Se $f(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in I$ si dice che f DEFINISCE IMPLICITAMENTE g (per $x \in I$) perché $\{(x, g(x)) \mid x \in I\}$ è un sottoinsieme di $\{(x, y) \in A : f(x, y) = 0\}$

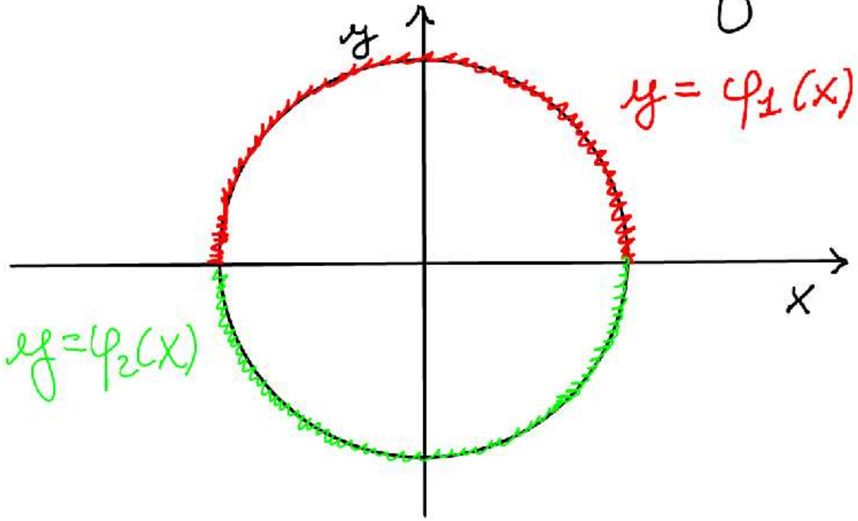
GRAFICO DI g

Ad esempio

$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(x,y) = 1$ rappresenta una circonferenza

$$x^2+y^2=1 \quad \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} & \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2} \\ y = -\sqrt{1-x^2} & \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ rappresentano ciascuna la circonferenza LOCALMENTE



<u>Teorema</u> (di derivazione della funzione composta) da usare tra poco)

a) $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g:]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to A$, A aperto

g derivabile in $\bar{t} \in]a,b[$, f differenziabile in $\bar{x} = g(\bar{t})$

$\Rightarrow h = f \circ g$ derivabile in $\bar{t}$ e si ha

$$h'(\bar{t}) = \langle \nabla f(g(\bar{t})), g'(\bar{t}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\bar{t}))\, g_i'(\bar{t})$$

dove $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ e $g'(t) = (g_1'(t), \dots, g_n'(t))$

Supponiamo che f definisca esplicitamente g in $]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "k = f \circ h"'] & (x, g(x)) \arrow[r, "f"] & f(x, g(x))
\end{tikzcd}
$$

con $h(x) = (x, g(x))$

Supponiamo siano soddisfatte le ipotesi del teorema di derivazione della funzione composta

$$\Rightarrow k'(x) = \left\langle \nabla f(x, g(x)), \underbrace{(1, g'(x))}_{h'(x)} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\, g'(x)$$

Ma $h(x) = f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$\Rightarrow h'(x) = 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$\Rightarrow$ se $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$ in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

(cioè LOCALMENTE)

Teorema (di Dini o della funzione implicita)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad A$ aperto $\quad f \in \mathcal{C}^1(A)$

$(x_0, y_0) \in A : f(x_0, y_0) = 0$ e $\boxed{f_y(x_0, y_0) \neq 0}$

$\Rightarrow \exists\ U_{x_0}$ intorno di x_0, V_{y_0} intorno di y_0 e

$\exists!\ g : U_{x_0} \to V_{y_0} : \boxed{y_0 = g(x_0) \text{ e } f(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in U_{x_0}}$

Inoltre, $g \in \mathcal{C}^1(U_{x_0})$ e $\boxed{g'(x) = -\dfrac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \ \forall x \in U_{x_0}}$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 14

$$\frac{\partial f}{\partial n}(x, y, z, u, v, w, s, t, r, p, q, l, m, n) = 0$$

Teorema (di Dini o della funzione implicita)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ A aperto $\quad$ $f \in \mathcal{C}^1(A)$

$(x_0, y_0) \in A$: $f(x_0, y_0) = 0$ e $\boxed{f_y(x_0, y_0) \neq 0}$

$\Rightarrow \exists\ U_{x_0}$ intorno di x_0, V_{y_0} intorno di y_0 e

$\exists!\ g : U_{x_0} \to V_{y_0}$: $\boxed{y_0 = g(x_0) \text{ e } f(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in U_{x_0}}$

Inoltre, $g \in \mathcal{C}^1(U_{x_0})$ e $\boxed{g'(x) = -\dfrac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \ \forall x \in U_{x_0}}$

NB: 1) Il Teorema di Dini non si può applicare nei punti (x_0, y_0) tali che $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ (detti PUNTI CRITICI DI f)

2) Se $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ si ha la versione "simmetrica" del teorema:

$\exists\, V_{y_0}$ intorno di y_0, U_{x_0} intorno di x_0 e

$\exists!\, h: V_{y_0} \to U_{x_0} : x_0 = h(y_0)$ e

$f(h(y), y) = 0 \quad \forall y \in V_{y_0}$

Inoltre $h \in \mathcal{C}^1(V_{y_0})$ e $h'(y) = -\dfrac{f_y(h(y), y)}{f_x(h(y), y)} \quad \forall y \in V_{y_0}$

3) Il Teorema del Dini può essere generalizzato a funzioni di più variabili (in seguito...)

4) Se f è di classe $\mathcal{C}^2$, poiché $g'(x) = -\dfrac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$,

anche g è di classe $\mathcal{C}^2$ perché $f_x(x, g(x))$ e $f_y(x, g(x))$ sono derivabili con derivata continua.

In generale, f di classe $\mathcal{C}^k \Rightarrow g$ di classe $\mathcal{C}^k$

Se f di classe $\mathcal{C}^k$, si può derivare $k-1$ volte g' attraverso la sua espressione $g'(x) = -\dfrac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, g(x))}$

usando il teor. di derivazione della funzione composta.

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 15

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x,y,z,u,v,w,s,t,r,p,q,l,m,n,d)=0$$

Esercizi

1) Si consideri l'equazione $\frac{x^2}{2}+xy-\log(1+x^2+y^2)+y=0$

Provare che $(0,0)$ soddisfa l'equazione e dimostrare che

$\exists\ \varphi: I_0 \to J_0$ (I_0, J_0 intorni di 0): $\varphi(0)=0$

e $\frac{x^2}{2}+x\varphi(x)-\log(1+x^2+\varphi(x)^2)+\varphi(x)=0 \quad \forall x \in I_0$

cioè $f(x,\varphi(x))=0 \quad \forall x\in I_0$

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy-\log(1+x^2+y^2)+y$$

Dimostrare che 0 è punto di minimo locale per φ

$$f(0,0) = \log(1) = 0$$

$$f_x(x,y) = x + y - \frac{2x}{1+x^2+y^2} \qquad f_y(x,y) = x - \frac{2y}{1+x^2+y^2} + 1$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ perché le derivate parziali prime sono continue

$$f_x(0,0) = 0 \qquad f_y(0,0) = 1 > 0$$

$\Rightarrow \exists\, \varphi : I_0 \to J_0$ t.c. $f(x, \varphi(x)) = 0$ e $\varphi(0) = 0$

con $\varphi'(0) = -\dfrac{0}{1} = 0$

Si ha $\forall x \in I_0$ $\quad \varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$

$$\varphi''(x) = -\frac{\left[f_{xx}(x,\varphi(x))\cdot 1 + f_{yx}(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)\right]\cdot f_y(x,\varphi(x)) + }{f_y(x,\varphi(x))^2}$$

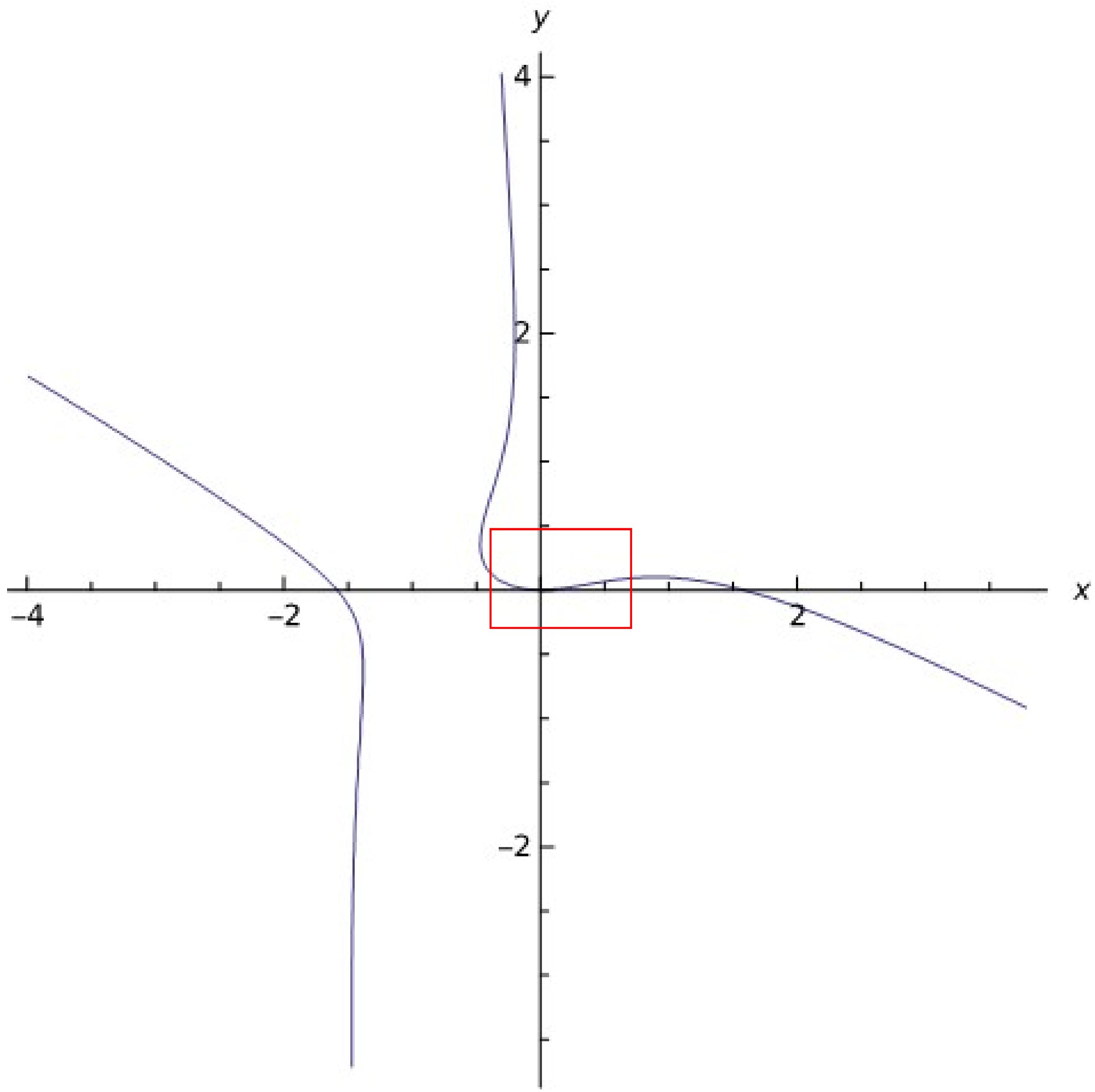
$$\frac{- f_x(x,\varphi(x))\left[f_{xy}(x,\varphi(x))\cdot 1 + f_{yy}(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)\right]}{}$$

$\boxed{\text{TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA}}$

$$\Rightarrow \varphi''(0) = \dots = -f_{xx}(0,0) = \dots = 1 - \left.\frac{2-2x^2+2y^2}{1+x^2+y^2}\right|_{(0,0)} = \underline{1} > 0$$

$\Rightarrow$ 0 è punto di minimo per φ

plot	$\frac{x^2}{2} + x\,y - \log(1 + x^2 + y^2) + y = 0$



2) Dimostrare che $y^3-2xy+x^2$ definisce in un intorno di $(1,1)$ una funzione $y=g(x)$ e stabilire se $x_0=1$ è estremo locale per $g(x)$

$f(x,y)=y^3-2xy+x^2$ è $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ $\qquad f(1,1)=0$

$f_y(x,y)=3y^2-2x \qquad f_x(x,y)=-2y+2x$

$f_y(1,1)=1\neq 0 \qquad f_x(1,1)=0$

$\Rightarrow \exists\ g : U_1 \longrightarrow V_1 : f(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in U_1$ e $g(1) = 1$

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \Rightarrow g'(1) = -\frac{f_x(1, g(1))}{f_y(1, g(1))} = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = 0$$

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I_1 \Rightarrow g(x)^3 - 2x\,g(x) + x^2 = 0 \ \forall x \in I_1$$

$\Rightarrow$ considero $u(x) = f(x, g(x)) = 0$ e $u'(x) = 0$

$\Rightarrow$ derivando: $3g(x)^2 g'(x) - 2g(x) - 2x\,g'(x) + 2x = 0$

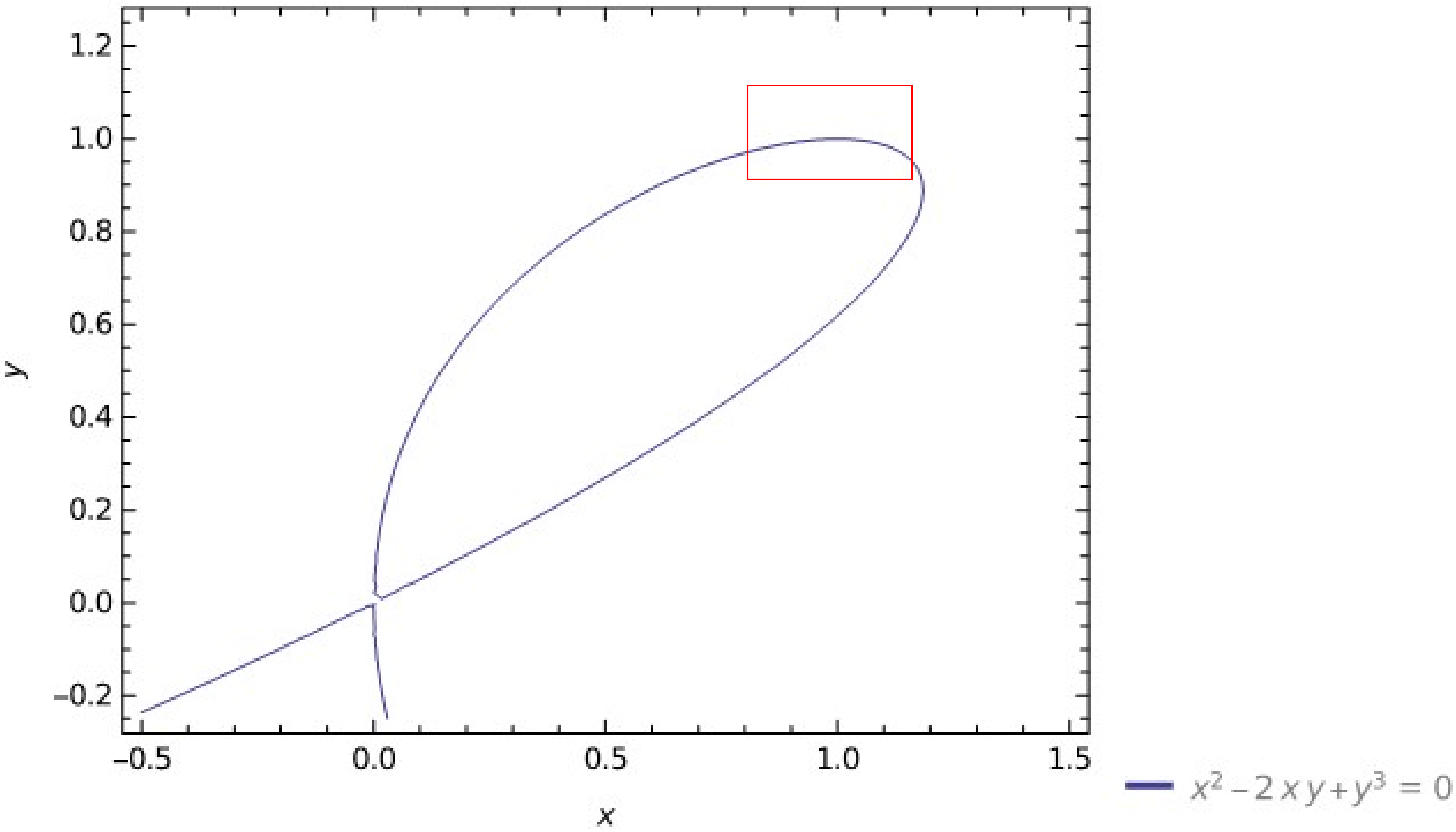
$\Rightarrow$ derivando $6\,g(x) g'(x)^2 + 3g(x)^2 g''(x) - 2g'(x) - 2g'(x) - 2x\,g''(x) + 2 =$

$$= 6\,g(x) g'(x)^2 + 3g(x)^2 g''(x) - 4g'(x) - 2x\,g''(x) + 2 = 0$$

Valutando la precedente in $x=1$ e ricordando che $g(1)=1$ e $g'(1)=0$ si ha

$$0 + 3g''(1) - 0 - 2g''(1) + 2 = 0$$

$\Rightarrow$ $g''(1) = -2 < 0$ $\Rightarrow$ 1 punto di massimo relativo per g.



1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
y
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
x
$x^2 - 2xy + y^3 = 0$

3) $f(x,y) = xy - 2 + \operatorname{sen}(x-1)$

Disegnare il grafico locale di g ottenuta applicando il Teorema del Dini in un intorno del punto della curva di equazione $f(x,y)=0$ di ascissa $x_0 = 1$

$$f(1,y) = y - 2 + \operatorname{sen}(0) = y - 2 = 0 \iff y = 2$$

$\Rightarrow$ il punto è $(x_0, y_0) = (1, 2)$

f è $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

$f_x(x,y) = y + \cos(x-1)$ $\quad f_y(x,y) = x$

$f_y(1,2) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow f(x,y)$ è localmente grafico di una funzione g:

$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I_1$ intorno di $\underline{1}$

$x\,g(x) - 2 + \operatorname{sen}(x-1) = 0$. Derivando 2 volte

$g(x) + x\,g'(x) + \cos(x-1) = 0$

$g'(x) + g'(x) + x\,g''(x) - \operatorname{sen}(x-1) = 0$

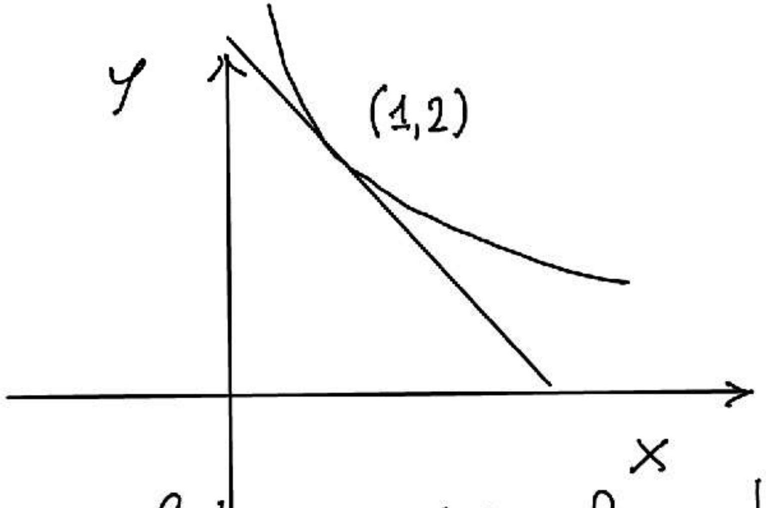
Sostituendo $x = 1$

$g(1) + g'(1) + 1 = 0 \Rightarrow g'(1) = -3 < 0$

$2g'(1) + g''(1) = 0 \Rightarrow g''(1) = 6 > 0$

$g'(1)<0 \quad g''(1)>0$

$\Rightarrow$ la retta tangente alla curva in $(1,2)$ ha coefficiente angolare negativo e la sua concavità è rivolta verso l'alto in un intorno di 1

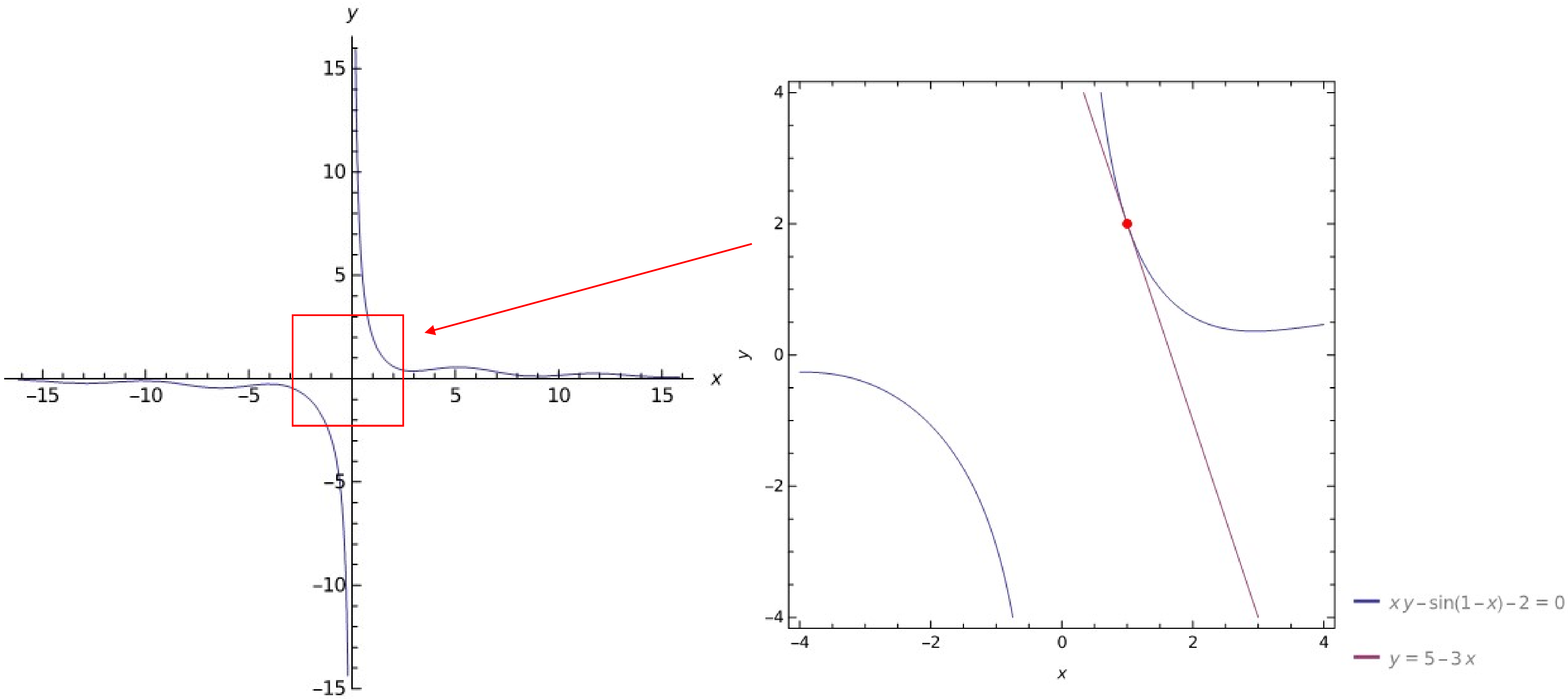


Equazione retta tangente in $(1,2)$

$y-2=\overset{g'(1)}{-3}\,(x-1)$ cioè

$y=-3x+5$

NB: il disegno è solo indicativo. Vedi dopo per il grafico



y
15
10
5
−5
−10
−15
x
−15
−10
−5
5
10
15
4
2
0
−2
−4
y
x
$xy - \sin(1-x) - 2 = 0$
$y = 5 - 3x$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 16

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x,y,z,u,v,w,s,t,r,p,q,l,m,n,d,h)=0$$

Teorema del Dini - della funzione implicita - $\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f: E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(E)$, E aperto,

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \in E$, $f(\bar{x}) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\bar{x}) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ U_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$ intorno di $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ e

$V_{\bar{x}_{n+1}}$ intorno di $\bar{x}_{n+1}$ e

$\exists!\ g: U_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \longrightarrow V_{\bar{x}_{n+1}}$, $g \in \mathcal{C}^1(U_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)})$:

$$f(x_1,\dots,x_n,g(x_1,\dots,x_n))=0 \quad \forall (x_1,\dots,x_n)\in U_{(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)}$$

$$g(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)=\bar{x}_{n+1}$$

$$g_{x_j}(x_1,\dots,x_n)=-\frac{f_{x_j}(x_1,\dots,x_n,g(x_1,\dots,x_n))}{f_{x_{n+1}}(x_1,\dots,x_n,g(x_1,\dots,x_n))} \quad \forall j=1,\dots,n$$

o, in breve,

$$\nabla g(x_1,\dots,x_n)=-\frac{\left(f_{x_j}(x_1,\dots,x_n,g(x_1,\dots,x_n))\right)_{j=1,\dots,n}}{f_{x_{n+1}}(x_1,\dots,x_n,g(x_1,\dots,x_n))}$$

NB: Il teorema resta valido se si scambia x_{n+1} con una qualunque delle altre variabili.

2) Verificare che l'equazione $2x^3+y^4+z^3-xz-2x=0$ definisce implicitamente $z=g(x,y)$ in un intorno di $(1,0,0)$ sulla superficie di equazione $z=g(x,y)$

Posto $f(x,y,z)=2x^3+y^4+z^3-xz-2x$

si ha $f(1,0,0)=0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3z^2-x \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0)=-1\neq 0$ e inoltre

$f\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ posso applicare il teorema di Dini

$\exists\, \varphi : I_{(1,0)} \to J_0$ con $I_{(1,0)}$, J_0 intorni di $(1,0)$ e 0 rispettivamente

con $\varphi(1,0) = 0$ e inoltre

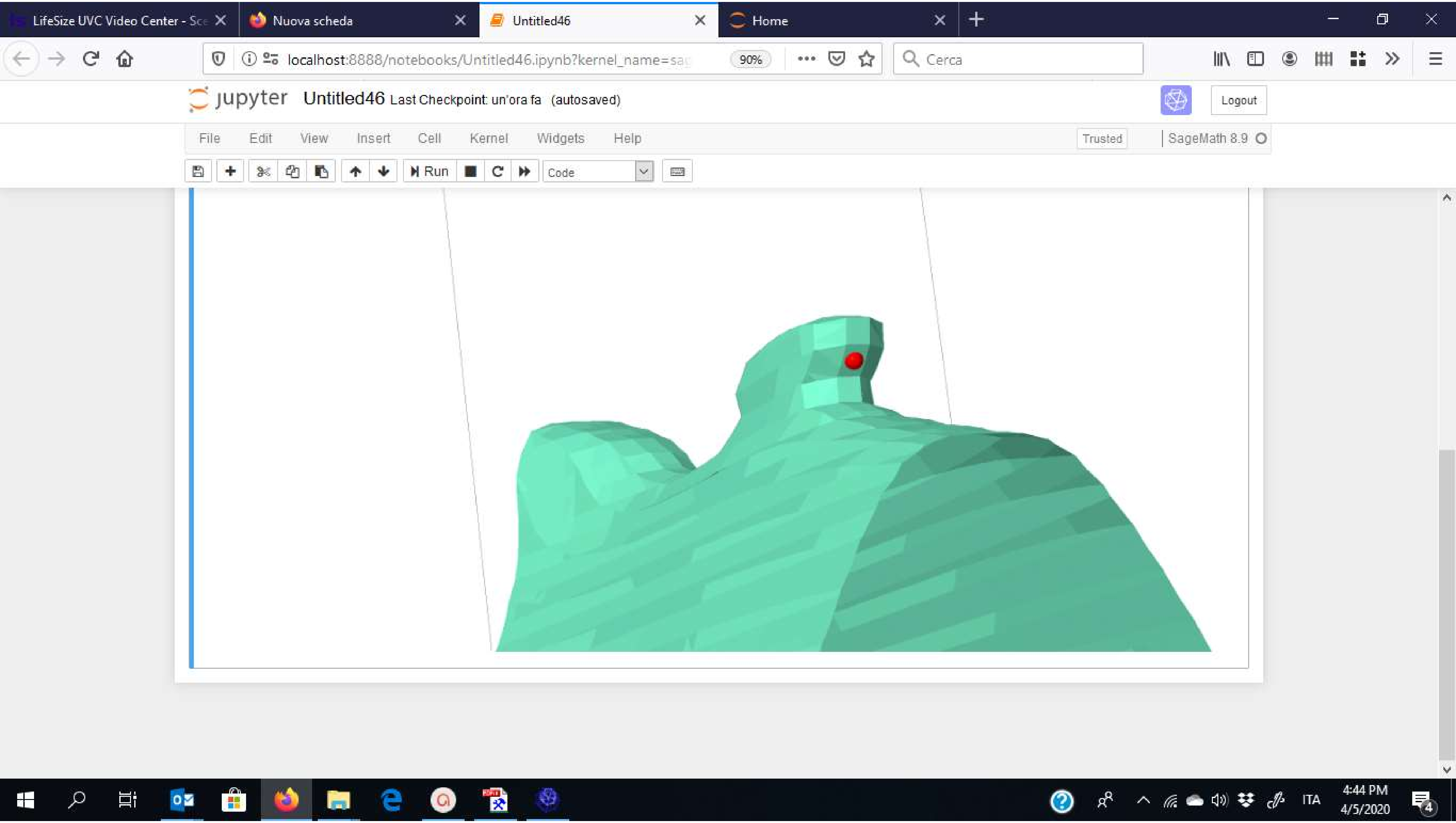
$$\varphi_x(1,0) = -\frac{f_x(1,0,0)}{f_z(1,0,0)} = 4$$

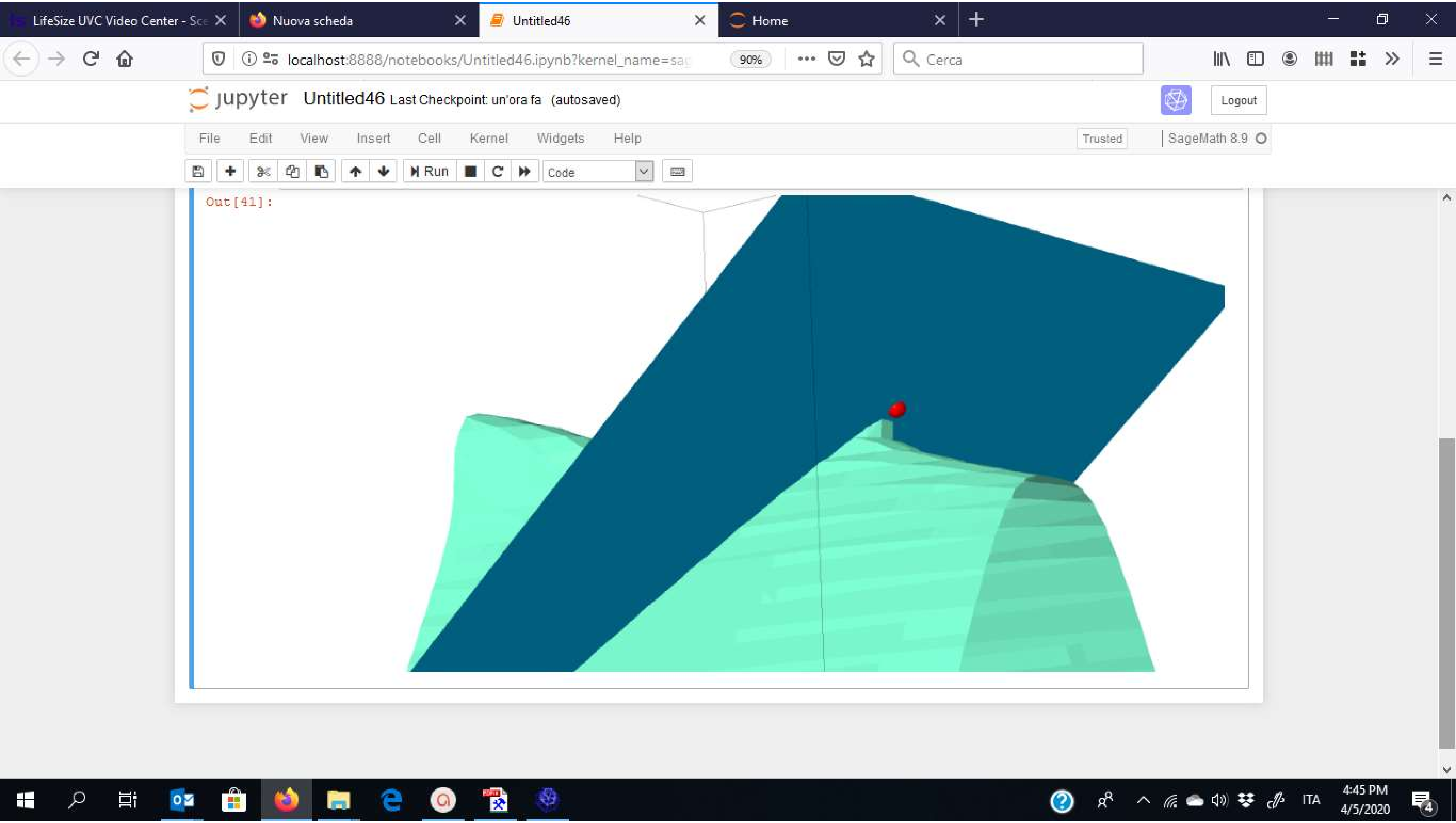
$$\varphi_y(1,0) = -\frac{f_y(1,0,0)}{f_z(1,0,0)} = 0$$

Il piano tangente alla superficie nel punto $(1,0,0)$ ha equazione

$$z - \varphi(1,0) = \varphi_x(1,0)\,(x-1) + \varphi_y(1,0)\,(y-0)$$

$$\Rightarrow \quad z = 4(x-1) \quad \Rightarrow \quad z = 4x - 4$$


LifeSize UVC Video Center - Sc
Nuova scheda
Untitled46
Home
localhost:8888/notebooks/Untitled46.ipynb?kernel_name=sa
90%
Cerca
jupyter
Untitled46 Last Checkpoint: un'ora fa (autosaved)
Logout
File
Edit
View
Insert
Cell
Kernel
Widgets
Help
Trusted
SageMath 8.9
Run
Code
ITA
4:44 PM
4/5/2020


LifeSize UVC Video Center - Sc
Nuova scheda
Untitled46
Home
localhost:8888/notebooks/Untitled46.ipynb?kernel_name=sa
90%
Cerca
jupyter
Untitled46 Last Checkpoint: un'ora fa (autosaved)
Logout
File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help
Trusted
SageMath 8.9
Run
Code
Out[41]:
ITA
4:45 PM
4/5/2020

Teorema del Dini o della funzione implicita – $\mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Siano:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad f \in \mathcal{C}^1(A) \qquad A \text{ aperto}$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in A \quad \text{con} \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n, \overline{y} \in \mathbb{R}^m \qquad f(\overline{x}, \overline{y}) = 0$$

$$f(x, y) = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) =$$

$$= \big(f_1(x, y), \dots\dots, f_m(x, y) \big)$$

$$J_f^{Y}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{x},\bar{y}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\bar{x},\bar{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\bar{x},\bar{y}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix}$$

$(m \times m)$

matrice jacobiana di φ_2

$\varphi_2 : y \to f(\bar{x}, y)$

in $\bar{y}$

NB! MESSE A FIANCO DANNO $J_f(\bar{x},\bar{y})$

$$J_f^{X}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x},\bar{y}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x},\bar{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x},\bar{y}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix}$$

$(m \times n)$

matrice jacobiana di φ_1

$\varphi_1 : x \to f(x, \bar{y})$

e sia inoltre $\det J_f^y(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$. Allora:

DETERMINANTE

$\exists\, U_{\bar{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di $\bar{x}$

$\exists!\, g: U_{\bar{x}} \to \mathbb{R}^m$, $g \in \mathcal{C}^1(U_{\bar{x}})$ tale che $f(x, g(x)) = 0$ $\forall x \in U_{\bar{x}}$

$$\underbrace{J_g(x)}_{m \times n} = - \underbrace{J_f^y(x, g(x))^{-1}}_{m \times m} \cdot \underbrace{J_f^x(x, g(x))}_{m \times n} \quad \forall x \in U_{\bar{x}}$$

Esempio

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (n=1,\ m=2)$

$f(x,y,z) = \left(x^2+y^2-1,\ x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}-1\right)$

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (\underbrace{1}, \underbrace{0,0})$ e $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (\underbrace{0}, \underbrace{1, \sqrt{3}})$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 2x \\ 2x \end{matrix}}_{J_f^{x}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} 2y & 0 \\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}z \end{matrix}}_{J_f^{(y,z)}}$$

In $(1,0,0)$

$$J_f^{(y,z)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_f^{(y,z)}(0,0) = 0$$

$\Rightarrow$ Teorema della funzione implicita non applicabile

In $(0,1,\sqrt{3})$

$$J_f^{(y,z)}(1,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \det J_f^{(y,z)}(1,\sqrt{3}) = \sqrt{3} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Teorema della funzione implicita applicabile

$\Rightarrow \exists\ g : I_0 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con I_0 intorno di $0 \in \mathbb{R}$

tale che $g \in \mathcal{C}^1(I_0)$ e $f(x, g(x)) = 0\ \forall\, x \in I_0$

Per calcolare g' con la formula

$$J_g(x) = - J_f^{(y,z)}(x, g(x))^{-1} \cdot J_f^{x}(x, g(x))$$

mi serve matrice inversa di $J_f^{(y,z)}(x, g(x))$

$$J_f^{(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ y/2 & z/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z/2 & -y/2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$ COFATTORI

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z/2 & 0 \\ -y/2 & 2y \end{pmatrix}$$ TRASPONENDO

$\Rightarrow$ dividendo per il determinante $\det J_f^{(y,z)} = yz$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2y} & 0 \\ -\frac{1}{2z} & \frac{2}{z} \end{pmatrix}$$ MATRICE INVERSA DI $J_f^{(y,z)}$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2y} & 0 \\ -\frac{1}{2z} & \frac{2}{z} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{y = g_1(x) \\ z = g_2(x)}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} =$$

CALCOLATA IN

$$= - \begin{pmatrix} \frac{x}{g_1(x)} \\ -\frac{x}{g_2(x)} + \frac{4x}{g_2(x)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} g_1'(x) = -\dfrac{x}{g_1(x)} \\ \\ g_2'(x) = -\dfrac{3x}{g_2(x)} \end{array}$$

Se fossi interessato solo a $g'(0)$ potrei evitare (in questo esempio) il calcolo dell'inversa:

$$J_f^x(0) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix}_{|x=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g'(0) = J_g(0) = -J_f^{(y,z)}(x,g(x))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow g'_1(0) = g'_2(0) = 0$$

Possiamo scoprire qualcosa di più di g_1 e g_2?

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte 17

$$\frac{\partial f}{\partial k}(x, y, z, u, v, w, s, t, r, p, q, l, m, n, d, h, k) = 0$$

Esempio

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (n=1,\ m=2)$

$f(x,y,z) = \left(x^2+y^2-1,\ x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}-1\right)$

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (\underbrace{1}, \underbrace{0,0})$ e $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (\underbrace{0}, \underbrace{1, \sqrt{3}})$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix}2x\\2x\end{matrix}}_{J_f^{x}} \quad \underbrace{\begin{matrix}2y & 0\\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}z\end{matrix}}_{J_f^{(y,z)}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{pmatrix} g'_1(x) \\ g'_2(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2y} & 0 \\ -\frac{1}{2z} & \frac{2}{z} \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{y = g_1(x) \\ z = g_2(x)}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} =$$

CALCOLATA IN $y = g_1(x)$, $z = g_2(x)$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{x}{g_1(x)} \\ -\frac{x}{g_2(x)} + \frac{4x}{g_2(x)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} g_1'(x) &= -\frac{x}{g_1(x)} \\ g_2'(x) &= -\frac{3x}{g_2(x)} \end{aligned}$$

Se fossi interessato solo a $g'(0)$ potrei evitare (in questo esempio) il calcolo dell'inversa:

$$J_f^x(0) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix}_{|x=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g'(0) = J_g(0) = -J_f^{(y,z)}(x, g(x))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow g_1'(0) = g_2'(0) = 0$$

Possiamo scoprire qualcosa di più di g_1 e g_2?

$$g_1'(x) = -\frac{x}{g_1(x)} \qquad g_2'(x) = -\frac{3x}{g_2(x)}$$

$$\Rightarrow g_1(x)\, g_1'(x) = -x$$

$$= \int_0^x g_1(t)\, g_1'(t)\, dt = -\int_0^x t\, dt$$

INTERGRAZIONE
PER SOSTITUZIONE

$g_1(0) = 1$

$$\Rightarrow \int_{g_1(0)}^{g_1(x)} t\, dt = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{g_1(x)^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{2}$$

$$\int_a^b f(h(t))\, h'(t)\, dt = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\, dx$$

$\Rightarrow g_1(x)^2 = 1-x^2 \Rightarrow g_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ oppure $g_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Analogamente dalla $g_2'(x) = -\dfrac{3x}{g_2(x)}$ si ha

$g_2(x)\, g_2'(x) = -3x$

- - - - - - - - - - - - -

$g_2(x) = \sqrt{3(1-x^2)}$ oppure $g_2(x) = -\sqrt{3(1-x^2)}$

$\Rightarrow$ localmente la funzione implicita ha componenti

$$g_1(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} \\ \text{o} \\ -\sqrt{1-x^2} \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} \sqrt{3(1-x^2)} \\ \text{o} \\ -\sqrt{3(1-x^2)} \end{cases}$$

Cerchiamo conferma ..... (IN QUESTO SEMPLICE ESEMPIO)

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow y^2=1-x^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1-x^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{3x^2+z^2+1}{4}=1$$

$$\Rightarrow z^2=3-3x^2$$

$\Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$ e $z=\sqrt{3(1-x^2)}$ per $x\in[-1,1]$

oppure $y=-\sqrt{1-x^2}$, $z=-\sqrt{3(1-x^2)}$

jupyter Untitled46 Last Checkpoint: un giorno fa (autosaved)

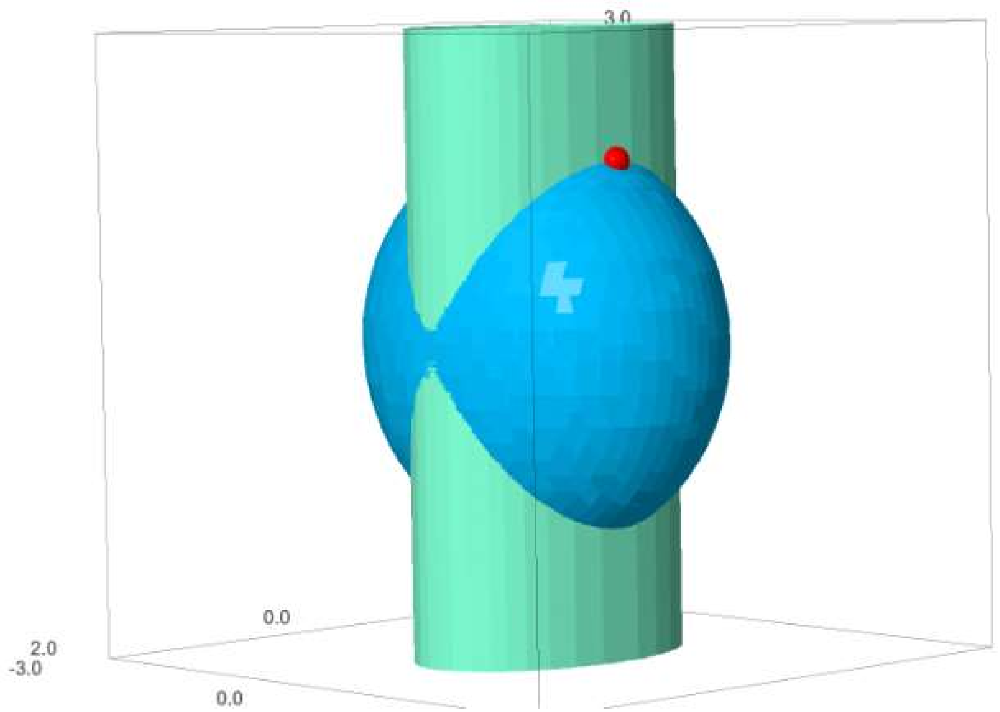
File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help

Trusted | SageMath 8.9

In [8]:
```
g3=point((0,1,sqrt(3)), color='red', size=40)
```

In [9]:
```
(g1+g2+g3)
```

Out[9]:



Esercizi

1) Data $f(x,y) = x^2y^2 + y^3 + x + y$, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)+x}{x^2}$$ $\longrightarrow$ FORMA INDETERMINATA: TENTO CON L'HÔPITAL!

con g funzione implicita individuata da $f(x,y) = 0$ in un intorno di $(0,0)$.

$f(0,0) = 0 \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

$f_x(x,y) = 2xy^2 + 1 \qquad f_y(x,y) = 3y^2 + 2x^2y + 1$

$\Rightarrow f_y(0,0) = 1 > 0$

$\Rightarrow \exists\, g: I_0 \to J_0$ funzione implicita.

Sostituendo $g(x)$ al posto di y in $f(x,y)=0$ si ha

$x^2 g(x)^2 + g(x)^3 + x + g(x) = 0$ e derivando

$$2x\, g(x)^2 + 2x^2 g(x) g'(x) + 3 g(x)^2 g'(x) + 1 + g'(x) = 0$$

$\Rightarrow$ per $x=0$ ($\Rightarrow g(0)=0$) si ha $1+g'(0)=0 \Rightarrow g'(0)=-1$

Tento con il teorema dell'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)+x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{g'(x)+1}^{\to -1}}{2x} \leftarrow \text{FORMA INDETERMINATA}$$

RITENTO CON L'HÔPITAL!

Derivando ancora .... $g''(0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{g(x)+x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)+1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x)}{2} = 0$$

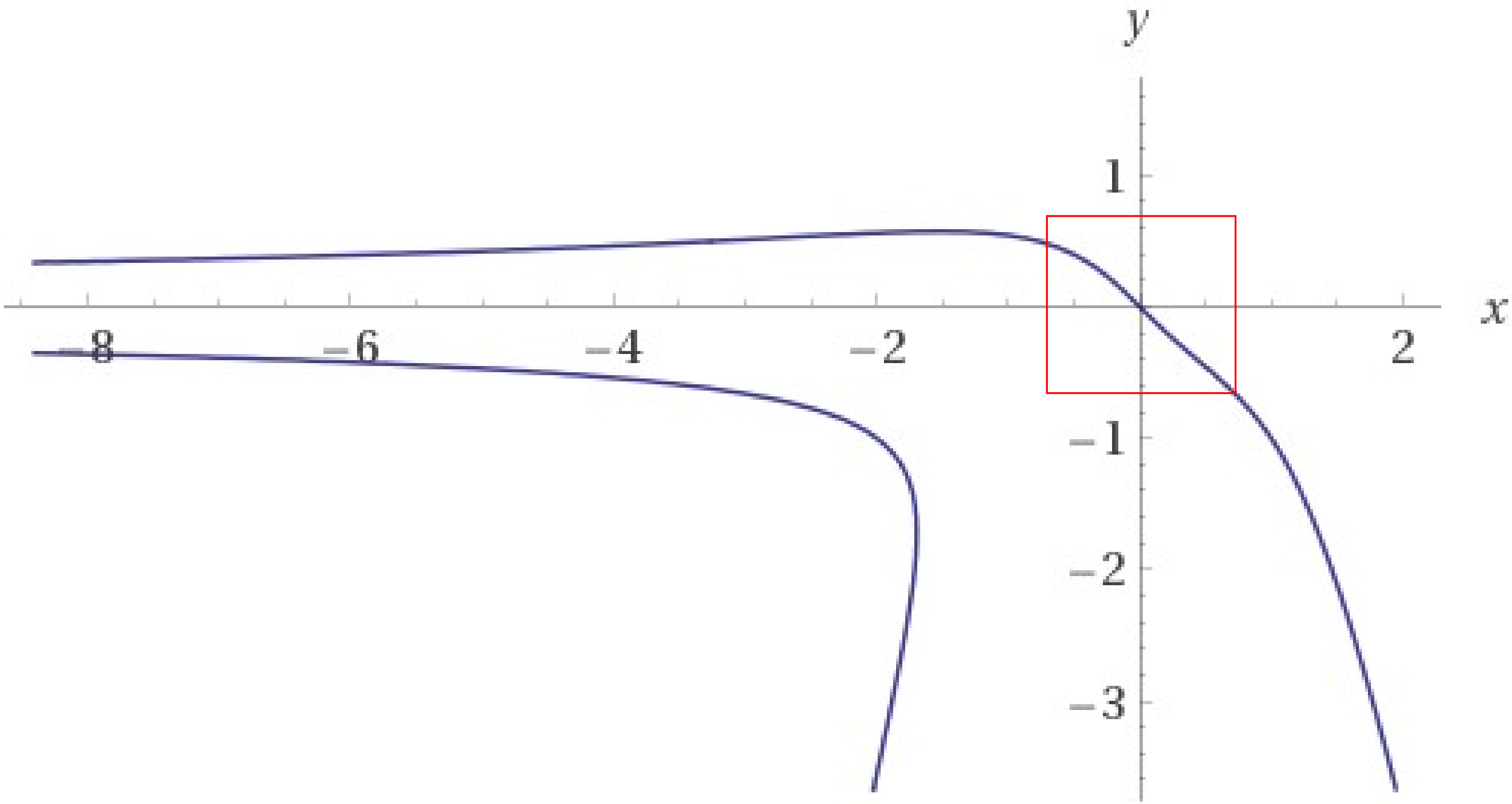
Anche con la formula di Taylor

$$g(x) = g(0) + g'(0)(x-0) + \frac{1}{2} g''(0)(x-0)^2 + o(|x|^2) =$$

$$= 0 - x + 0 + o(x) = -x + o(|x|^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{g(x)+x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{-x+x}{x^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{o(|x|^2)}{x^2}}_{\to 0} = 0$$

plot | $x^2 y^2 + y^3 + x + y = 0$



2) Data $y^3 = 3x^2 - 2x^3 y$ si determini per la funzione g implicitamente definita in un intorno di $(1,1)$

a) la formula di Taylor in $x=1$ fino al 2° ordine

b) il grafico locale (indicativo) di g in un intorno di $x=1$

$$f(x,y) = 3x^2 - 2x^3 y - y^3$$

$$f_x(x,y) = 6x - 6x^2 y \qquad f_y(x,y) = -3y^2 - 2x^3$$

$$f'_y(1,1) = -5 \neq 0$$

$\Rightarrow$ è applicabile il Teorema della funzione implicita.

Sostituendo $g(x)$ (funzione implicita) come y in $f(x,y)=0$ si ha

$$3x^2 - 2x^3 g(x) - g(x)^3 = 0$$

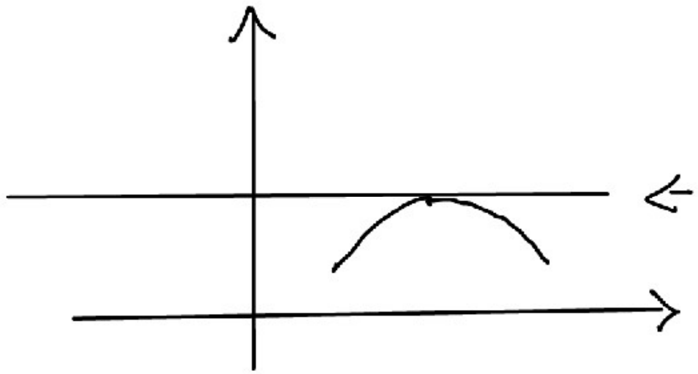
Derivando due volte si ottiene $g'(1)=0$, $g''(1) = -\frac{6}{5}$

$$\Rightarrow g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{1}{2} g''(1)(x-1)^2 + o(|x|^2)$$

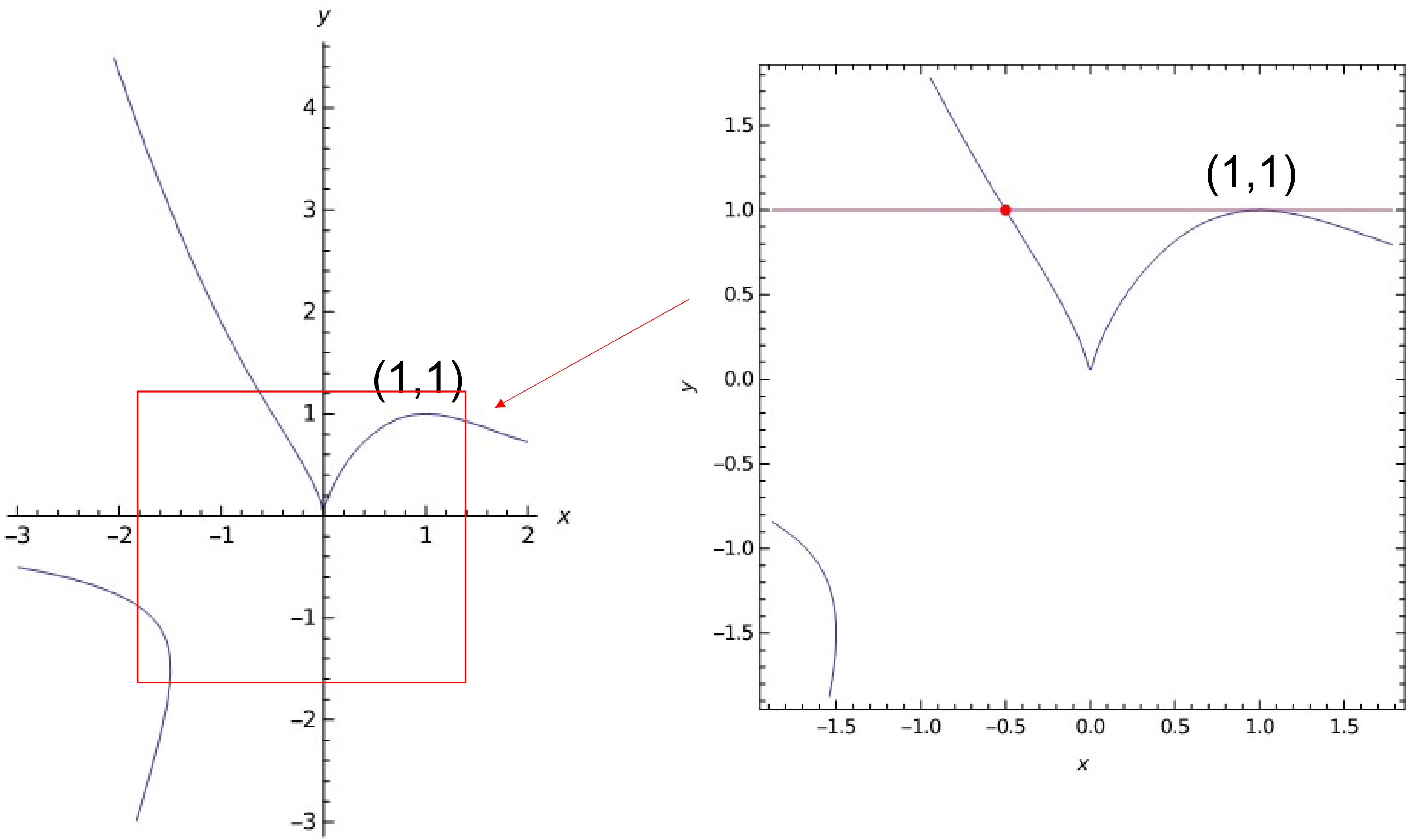
$$\Rightarrow g(x) = 1 - \frac{3}{5}(x-1)^2 + o(|x|^2)$$ FORMULA DI TAYLOR

Retta tangente in $(1,1)$: $y = 1$

$g''(1) < 0 \Rightarrow$ concavità rivolta verso il basso in $(1,1)$



$\leftarrow$ retta tangente in $(1,1)$



y
4
3
2
1
−1
−2
−3
x
−3
−2
−1
1
2
(1,1)
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
y
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
x
(1,1)

Insiemi di livello

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

$E_k = \{(x,y) \in E \mid f(x,y) = k\}$ è l'INSIEME DI LIVELLO k DI f.

Se $n=2$ e $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ E_k può essere interpretato come la proiezione sul piano xy (di equazione $z=0$) dell'intersezione del grafico di f (di equazione $z=f(x,y)$) con il piano di equazione $z=k$ (parallelo al piano xy).

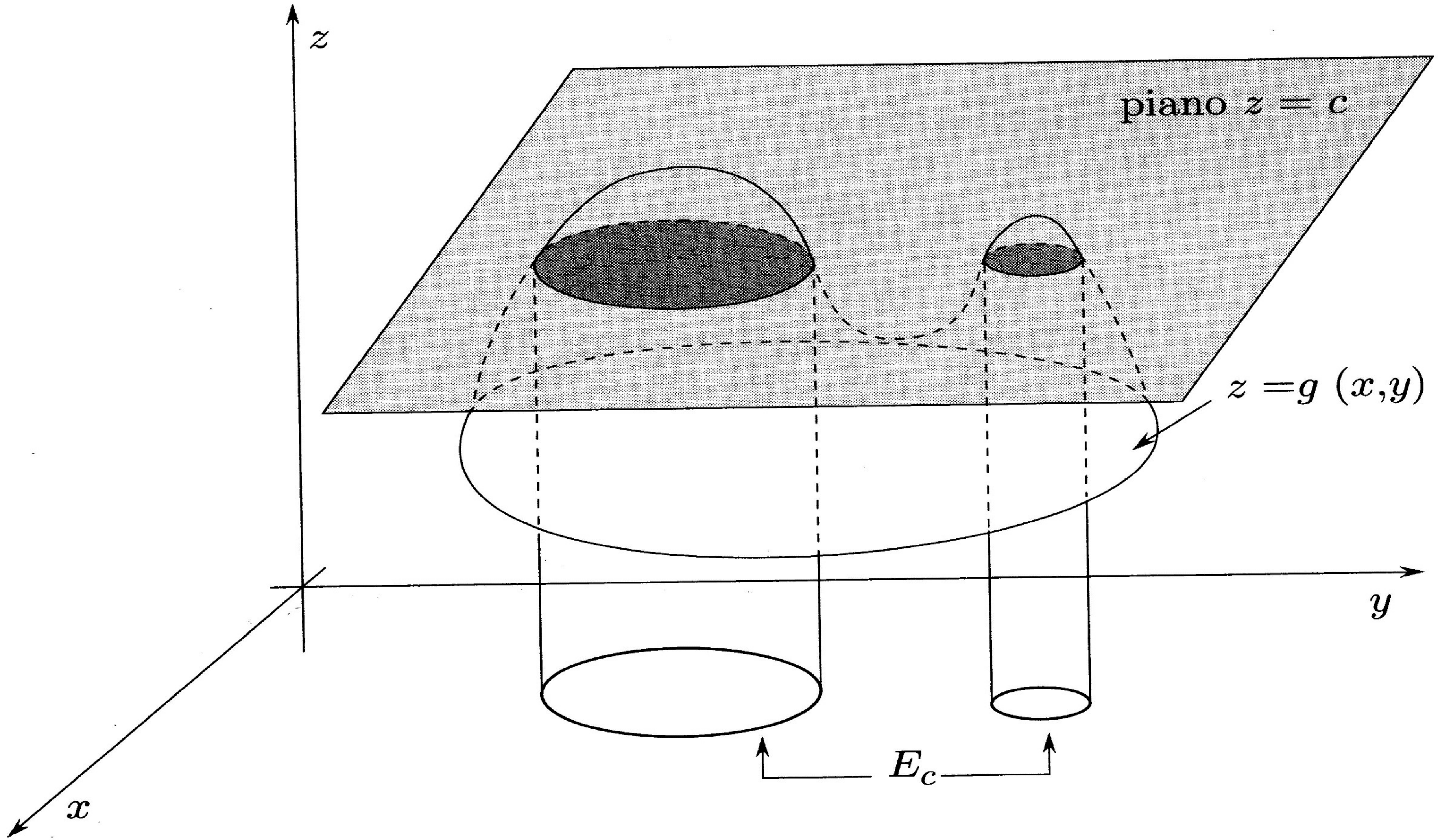


Figura 7.18. Insiemi di livello.

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathring{E}$ e $f \in \mathcal{C}^1(U_{(\bar{x},\bar{y})})$ con $U_{(\bar{x},\bar{y})}$ intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$, $U_{(\bar{x},\bar{y})} \subseteq E$.

Sia inoltre $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ e $f_y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$

$\Rightarrow$ per il teorema della funzione implicita l'insieme di livello E_0 è rappresentabile localmente come grafico di una funzione. In questo caso si parla di LINEA DI LIVELLO ZERO.

Analogamente, per E_k si considera la funzione $g(x,y) = f(x,y) - k$ che risulta pure soddisfare le ipotesi del teorema della funzione implicita.