

## ESERCIZI SVOLTI DI CINEMATICA

1. Un treno A parte da Valencia alle ore 12:00 diretto verso Barcellona, distante  $350 \text{ Km}$ , viaggiando ad una velocità media costante di  $100 \text{ Km/h}$ . Un secondo treno B parte da Barcellona diretto verso Valencia alle ore 14:00 e viaggia ad una velocità media costante di  $80 \text{ Km/h}$ . A che ora e a quale distanza da Valencia i due treni si incontrano?

[14: 50;  $\approx 283 \text{ Km}$ ]

### SOL.

Dividiamo il problema in due fasi:

- a) Dalle 12:00 alle 14:00 si muove solo il treno A, mentre il treno B rimane fermo a Barcellona.
- b) Dalle 14:00 in poi si muovono entrambi i treni, l'uno verso l'altro.

#### FASE a)

Fissiamo l'origine degli spazi a Valencia, il verso positivo da Valencia a Barcellona e come unità di misura degli spazi il Km. Scegliamo come origine dei tempi l'istante in cui A parte da Valencia.

Quindi l'equazione oraria di A è:

$$s = 100 t$$

Quando parte il treno B da Barcellona, cioè quando  $t = 2 \text{ h}$  si ha che la posizione di A è  $s = s(2 \text{ h}) = 100 \cdot 2 = 200 \text{ Km}$ .

#### FASE b)

Ora fissiamo una nuova origine degli spazi nel punto in cui si trova A alle 14:00 (cioè come abbiamo appena visto a  $200 \text{ Km}$  da Valencia).

Il verso positivo degli spazi è lo stesso di prima, ovvero da Valencia a Barcellona, e l'unità di misura ancora in Km.

Fissiamo come nuova origine dei tempi l'istante in cui parte B da Barcellona.

Con queste premesse le equazioni orarie dei due treni sono:

$$\begin{aligned} \text{treno A:} & \quad s = 100 t \\ \text{treno B:} & \quad s = -80 t + (350 - 200) \end{aligned}$$

Osserviamo che la velocità del treno B è negativa in quanto si muove in verso opposto al nostro verso positivo e inoltre la posizione iniziale del secondo treno è  $350 - 200 = 150 \text{ Km}$  poiché nella prima fase del problema A si è avvicinato a Barcellona di  $200 \text{ Km}$  (riducendo così la distanza iniziale tra i due treni che era di  $350 \text{ Km}$ ).

Per determinare l'istante e la posizione dell'incontro basta risolvere il sistema delle due leggi orarie precedentemente scritte, quindi:

$$\begin{aligned} \begin{cases} s = 100 t \\ s = -80 t + 150 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} s = 100 t \\ 100 t = -80 t + 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 100 t \\ 100 t + 80 t = 150 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} s = 100 t \\ 180 t = 150 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} s = 100 t \\ \frac{180}{180} t = \frac{150}{180} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 100 \frac{Km}{h} \cdot \left(\frac{5}{6} h\right) = 83,3 Km \\ t = \frac{5}{6} h = \frac{5}{6} \cdot 60 \text{ min} = 50 \text{ min} \end{cases} \end{aligned}$$

Ricordando che l'origine dei tempi in questa FASE b) era fissata alle ore 14:00 e che l'origine degli spazi era stata fissata a 200 Km da Valencia, interpretiamo il risultato del sistema dando la seguente risposta:

- I due treni si incontrano alle 14:50
- In una località posta a circa 283 Km da Valencia.

2. Una Golf passa alla velocità costante di  $108 \text{ Km/h}$  davanti ad un autovelox della polizia in un tratto in cui il limite di velocità è di  $80 \text{ Km/h}$ . L'auto della polizia parte all'inseguimento della Golf dopo  $7,20 \text{ s}$  con accelerazione costante di  $2,00 \text{ m/s}^2$ . Calcola quanto tempo impiega la polizia per raggiungere la Golf, dall'istante in cui la Golf era passata davanti all'autovelox, la distanza che la polizia deve percorrere per raggiungerla e la velocità della polizia nell'istante del raggiungimento della Golf.

[43,2 s;  $\approx 1,30 \text{ Km}$ ;  $\approx 259 \text{ Km/h}$ ]

### SOL.

Dividiamo il problema in due fasi:

- Da quando passa la Golf (che d'ora in avanti indicheremo con G) passa davanti all'autovelox a quando parte l'auto della polizia (che d'ora in avanti indicheremo con P)
- Da quando parte P a quando P raggiunge G.

FASE a)

Poniamo l'origine degli spazi nel punto in cui è posizionato l'autovelox, il verso positivo degli spazi è quello in cui si muove G e l'unità di misura per gli spazi è il metro  $m$ .

L'origine dei tempi è l'istante in cui la G passa davanti all'autovelox e l'unità di misura è il secondo  $s$ .

Innanzitutto trasformiamo i dati del problema in modo coerente con le unità di misura scelte:

$$v_G = 108 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 108 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'equazione oraria del moto della G è:  $s = v_G t$  da cui segue che :

$$s(7,20 \text{ s}) = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 7,20 \text{ s} = 216 \text{ m}$$

FASE b)

Per quanto riguarda l'asse degli spazi tutto rimane come nella prima fase.

La nuova origine del tempo è l'istante in cui parte P.

Il moto dell'auto G è rettilineo uniforme con una posizione iniziale diversa da zero, mentre il moto dell'auto P è un moto rettilineo uniformemente accelerato con posizione iniziale nulla e velocità iniziale nulla.

Pertanto, le leggi orarie delle due auto sono:

$$\text{auto G: } s = 30 t + 216$$

$$\text{auto P: } s = \frac{1}{2} a t^2$$

Per determinare l'istante in cui P raggiunge G e la posizione in cui il ricongiungimento avviene basta risolvere il seguente sistema :

$$\begin{cases} s = 30 t + 216 \\ s = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} a t^2 = 30 t + 216 \\ s = 30 t + 216 \end{cases}$$

l'equazione risolvente di secondo grado in t che si ottiene è la seguente:

$$\frac{1}{2} 2 t^2 - 30 t - 216 = 0 \Rightarrow t^2 - 30 t - 216 = 0 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 864}}{2} = \frac{30 \pm 42}{2} = \begin{cases} -6 & \text{non accettabile} \\ 36 & \text{accettabile} \end{cases}$$

l'auto P raggiunge l'auto G dopo 36 secondi dall'istante in cui si è messa in moto P. Se aggiungiamo a questo tempo i 7,20 secondi di vantaggio di G allora troviamo la prima risposta al problema:

$$t = 36 + 7,20 = 43,20 = 43,2 \text{ s}$$

La distanza percorsa dalla P è esattamente la posizione di P corrispondente all'istante  $t = 36 \text{ s}$

$$s(36) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 36^2 = 1296 \text{ m} \approx 1,30 \text{ Km}$$

Allo stesso risultato si giunge ovviamente anche con l'altra equazione oraria del sistema (infatti all'istante  $t = 36 \text{ s}$  le due auto occupano la medesima posizione)

$$s(36) = 30 \cdot 36 + 216 = 1296 \text{ m} \approx 1,30 \text{ Km} .$$

Per calcolare la velocità di P nell'istante del sorpasso basta usare la legge oraria della velocità:

$$v = a t + v_0 \Rightarrow v(36) = 2 \cdot 36 + 0 = 72 \text{ m/s} = 259,2 \text{ Km/h} \approx 260 \text{ Km/h} .$$

3. Un ciclista sta finendo di riparare la gomma che si è bucata quando un amico passa ad una velocità costante di  $3,5 \text{ m/s}$ . Due secondi dopo, il ciclista balza sulla sua bicicletta e accelera in modo costante con  $a = 2,4 \text{ m/s}^2$ , fino a raggiungere il suo amico.
- Quanto tempo impiega a raggiungere il suo amico (calcola il tempo che trascorre da quando si rimette in sella a quando raggiunge l'amico)?
  - Quale distanza ha percorso in questo intervallo di tempo?
  - Qual è la sua velocità quando lo raggiunge?

[ $\approx 4,3 \text{ s}$ ;  $\approx 22 \text{ m}$ ;  $\approx 10 \text{ m/s}$ ]

### **SOL.**

Il problema è molto simile a quello precedente. Chiamiamo il ciclista che inizialmente è fermo con C e l'amico che gli passa accanto con velocità costante A.

Dividiamo il problema in due fasi:

- Da quando A passa accanto a C che sta riparando la gomma a quando riparte C .
- Da quando riparte C a quando C raggiunge A.

FASE a)

Poniamo l'origine degli spazi nel punto in cui C sta riparando la gomma della sua bici, il verso positivo degli spazi è quello in cui si muove A e l'unità di misura per gli spazi è il metro  $m$ .

L'origine dei tempi è l'istante in cui A passa accanto all'amico e l'unità di misura è il secondo  $s$ .

L'equazione oraria del moto della A è:  $s = v_A t$  da cui segue che :

$$s(2,0 \text{ s}) = 3,5 \frac{m}{s} \cdot 2,0 \text{ s} = 7,0 \text{ m}$$

FASE b)

Per quanto riguarda l'asse degli spazi tutto rimane come nella prima fase.

La nuova origine del tempo è l'istante in cui parte C.

Il moto di A è rettilineo uniforme con una posizione iniziale diversa da zero, mentre il moto dell'auto C è un moto rettilineo uniformemente accelerato con posizione iniziale nulla e velocità iniziale nulla.

Pertanto, le leggi orarie dei due ciclisti sono:

$$\text{amico del ciclista A: } s = 3,5 t + 7,0$$

$$\text{ciclista C: } s = \frac{1}{2} \cdot 2,4 t^2$$

Per determinare l'istante in cui C raggiunge A e la posizione in cui avviene il sorpasso basta risolvere il seguente sistema :

$$\begin{cases} s = 3,5 t + 7,0 \\ s = \frac{1}{2} \cdot 2,4 t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 2,4 t^2 = 3,5 t + 7,0 \\ s = 3,5 t + 7,0 \end{cases}$$

l'equazione risolvente di secondo grado in t che si ottiene è la seguente:

$$\frac{1}{2} \cdot 2,4 t^2 - 3,5 t - 7,0 = 0 \Rightarrow 1,2 t^2 - 3,5 t - 7,0 = 0 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3,5 \pm \sqrt{12,25 + 33,60}}{2,4} \approx \frac{3,5 \pm 6,8}{2,4} \approx \begin{cases} -1,4 & \text{non accettabile} \\ 4,3 & \text{accettabile} \end{cases}$$

il ciclista C raggiunge l'amico A dopo circa 4,3 secondi dall'istante in cui si è rimesso in moto. Ed ecco la prima risposta al problema:

$$t \approx 4,3 s$$

La distanza percorsa dalla C è esattamente la posizione di C corrispondente all'istante  $t = 4,3 s$

$$s(4,3) = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4,3^2 \approx 22 m$$

Allo stesso risultato si giunge ovviamente anche con l'altra equazione oraria del sistema (infatti all'istante  $t = 4,3 s$  i due amici occupano la medesima posizione)

$$s(4,3) = 3,5 \cdot 4,3 + 7 \approx 22 m .$$

Per calcolare la velocità di C nell'istante del sorpasso basta usare la legge oraria della velocità:

$$v = a t + v_0 \Rightarrow v(4,3) = 2,4 \cdot 4,3 + 0 = 10,32 m/s \approx 10 m/s .$$