4. ESEMPIO SVOLTO — Saltare un crepaccio

Un alpinista nella traversata di un costone di ghiaccio si trova di fronte un crepaccio. Il lato opposto del crepaccio è 2,75 m più in basso e dista orizzontalmente 4,10 m. Per attraversare il crepaccio, l'alpinista prende la rincorsa e salta in direzione orizzontale.

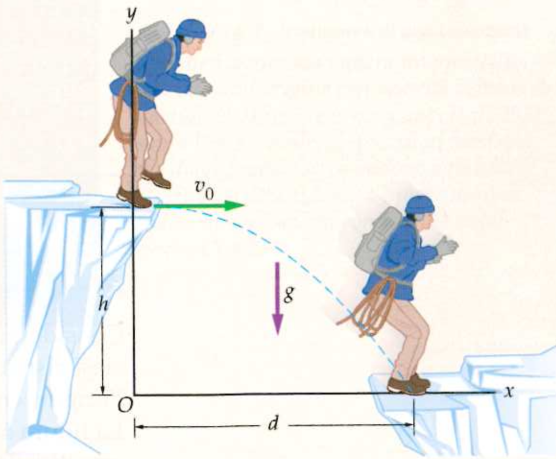
a) **Qual è la minima velocità iniziale necessaria per attraversare con sicurezza il crepaccio?**

b) **In che punto atterra l'alpinista, se la sua velocità iniziale è 6,00 m/s?**

c) **Qual è la sua velocità nell'istante in cui atterra?**

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

L'alpinista salta da $x_0 = 0$ e $y_0 = h = 2,75$ m. Il punto di atterraggio per la domanda *a*) è $x = d = 4,10$ m e $y = 0$. Osserviamo che la posizione y dell'alpinista *diminuisce* di h e quindi $\Delta y = -h = -2,75$ m.
Come velocità iniziale abbiamo $v_{0x} = v_0$ e $v_{0y} = 0$. Infine, per la nostra scelta del sistema di coordinate, possiamo scrivere $a_x = 0$ e $a_y = -g$.



STRATEGIA

Possiamo considerare l'alpinista come un proiettile e applicare le equazioni del moto del proiettile con lancio orizzontale.

a) Dalle equazioni [7] abbiamo che $x = v_0 t$ e $y = h - \frac{1}{2}gt^2$. Ponendo $y = 0$ otteniamo il tempo di caduta e utilizzando questo valore nell'equazione di x otteniamo la posizione orizzontale di atterraggio in funzione della velocità iniziale.

b) Possiamo utilizzare la stessa relazione ricavata nella parte *a*) per determinare x quando $v_0 = 6,00$ m/s.

c) Conosciamo già v_x, che è costante, e possiamo calcolare v_y utilizzando $v_y^2 = -2g\Delta y$ (equazioni [7]). Note le componenti della velocità, possiamo utilizzare il teorema di Pitagora per determinare il suo modulo.

SOLUZIONE

a) Poniamo $y = h - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ (condizione di atterraggio) e dall'equazione ricaviamo il tempo t:

$$y = h - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sostituiamo il valore di t trovato nell'equazione del moto $x = v_0 t$ e risolviamo rispetto a v_0:

$$x = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad\rightarrow\quad v_0 = x\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Sostituiamo i valori numerici nell'espressione ottenuta:

$$v_0 = x\sqrt{\frac{g}{2h}} = (4,10\ \text{m})\sqrt{\frac{9,81\ \text{m/s}^2}{2(2,75\ \text{m})}} = 5,48\ \text{m/s}$$

b) Sostituiamo $v_0 = 6,00$ m/s nell'espressione di x ricavata nella parte precedente:

$$x = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} = (6,00\ \text{m/s})\sqrt{\frac{2(2,75\ \text{m})}{9,81\ \text{m/s}^2}} = 4,49\ \text{m}$$

c) Utilizziamo il fatto che la componente x della velocità non cambia per determinare v_x e la relazione $v_y^2 = -2g\Delta y$ per determinare v_y (osserviamo che per v_y abbiamo scelto il segno − per la radice quadrata, perché l'alpinista si muove verso il basso):

$$v_x = v_0 = 6,00\ \text{m/s}$$

$$v_y = \pm\sqrt{-2g\Delta y} = \pm\sqrt{2gh} \quad (\Delta y = -h)$$

$$= -\sqrt{-2(9,81\ \text{m/s}^2)(-2,75\ \text{m})} = -7,35\ \text{m/s}$$

Utilizziamo il teorema di Pitagora per determinare il modulo della velocità:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$$

$$= \sqrt{(6,00\ \text{m/s})^2 + (-7,35\ \text{m/s})^2} = 9,49\ \text{m/s}$$

OSSERVAZIONI

La minima velocità necessaria per attraversare con sicurezza il crepaccio è 5,48 m/s.
Se la velocità iniziale in direzione orizzontale è 6,00 m/s, l'alpinista atterra a 4,49 m − 4,10 m = 0,390 m oltre l'orlo del crepaccio, con una velocità di 9,49 m/s.

PROVA TU

a) Quando la velocità dell'alpinista è la velocità minima necessaria per attraversare il crepaccio, cioè $v_0 = 5,48$ m/s, per quanto tempo resta in aria l'alpinista?

b) Quanto tempo resta in aria l'alpinista quando $v_0 = 6,00$ m/s?

[*a*) $t = x/v_0 = (4,10\ \text{m})/(5,48\ \text{m/s}) = 0,748$ s; *b*) $t = x/v_0 = (4,49\ \text{m})/(6,00\ \text{m/s}) = 0,748$ s. I tempi sono uguali! In entrambi i casi è il tempo di caduta da un'altezza h, cioè $t = \sqrt{2h/g} = 0,748$ s]

Problema simile: 8.