Stabilità

Stabilità:

- ~~del movimento (vedere libro ma non compreso nel programma)~~

- dell'equilibrio

- del sistema (solo sistemi lineari)

Analizzeremo separatamente sistemi a tempo continuo e sistemi a tempo discreto.

Stabilità: il caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

Stabilità dell' equilibrio

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

$$0 = f(x, \bar{u}) \Rightarrow \bar{x}$$

Stato equilibrio associato all' ingresso $\bar{u}$

Consideriamo ora una perturbazione dello stato iniziale (di equilibrio):

$$u(t) = \bar{u}, t \geq 0$$

$$x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x}$$

$$\Rightarrow x(t) \neq \bar{x}, t \geq 0$$

Movimento perturbato dello stato

Definizione: stabilità dell' equilibrio

$\bar{x}$ e` stato di equilibrio stabile se:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\forall x(0) : \|\delta\bar{x}\| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \; \forall t \geq 0$$

Definizione: stabilità asintotica dell’equilibrio

$\bar{x}$ e` stato di equilibrio asintoticamente stabile se:

a) e` stabile cioe` se:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \text{tale che}$$

$$\forall\, x(0) : \|\delta \bar{x}\| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \; \forall\, t \geq 0$$

b)

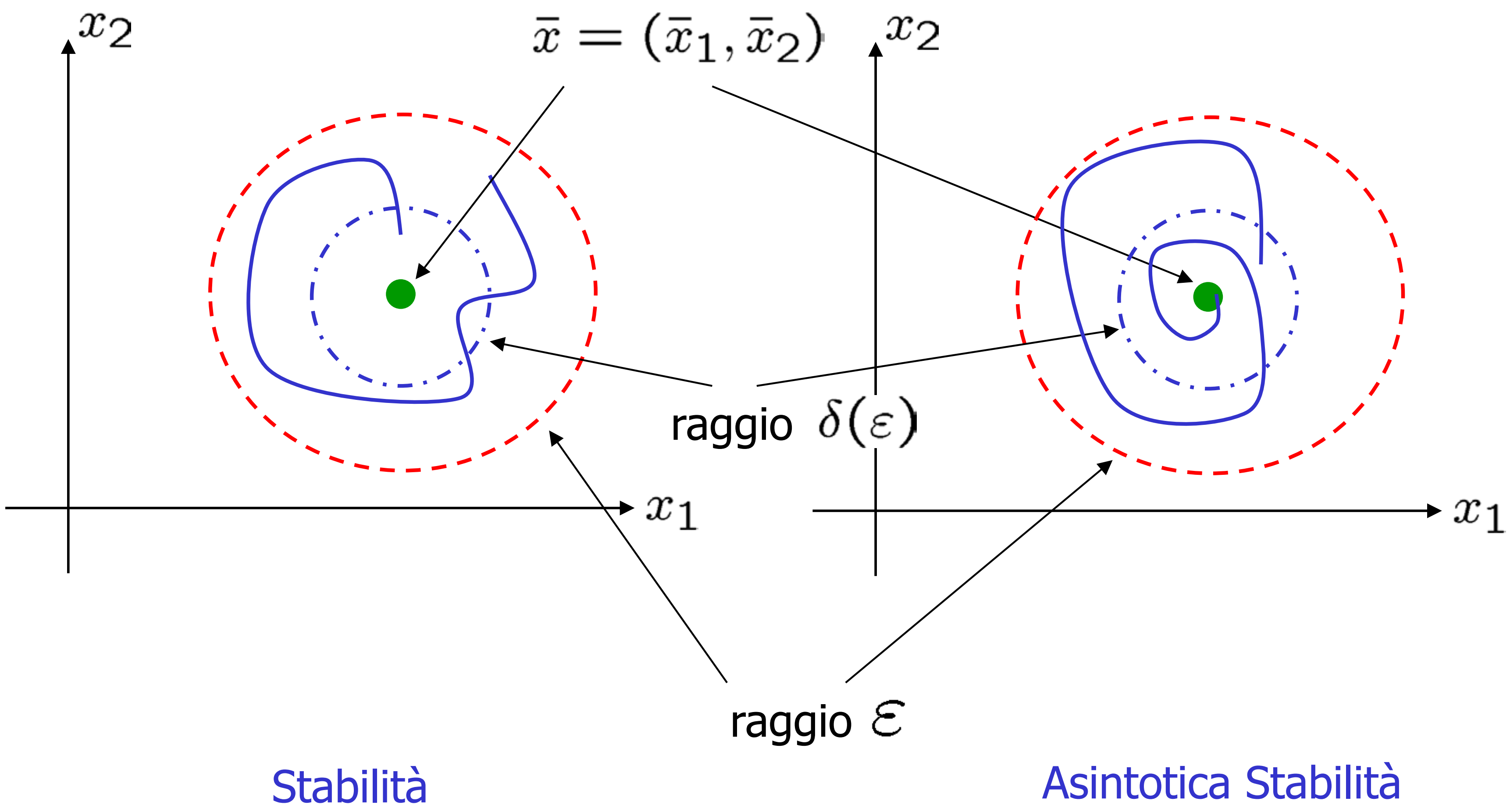
$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

Definizione: instabilità dell'equilibrio

$\bar{x}$ e` stato di equilibrio instabile se non e` stabile

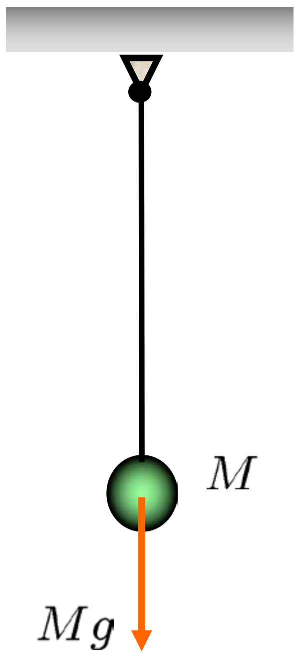
Stabilità dell' equilibrio: interpret. grafica

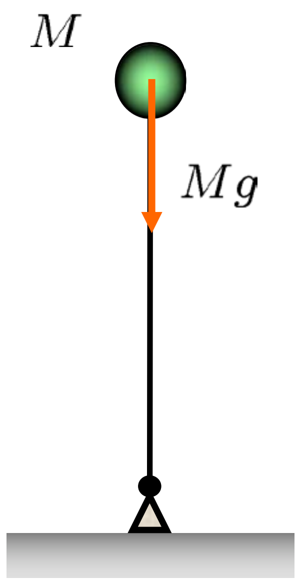
$$f(\bar{x},\bar{u}) = 0$$



Esempio

$$u(t) = \bar{u} = 0$$





Stabile (asintotic. stabile se c'è attrito)

Instabile

Stabilità:

- ~~del movimento (vedere libro ma non compreso nel programma)~~

- dell'equilibrio

- del sistema (solo sistemi lineari)

Stabilità nei sistemi lineari stazionari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

a) In condizioni di equilibrio

$$x(0) = \bar{x}$$
$$u(t) = \bar{u}, t \geq 0$$

$$x(t) = e^{At}\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u} d\tau = \bar{x}, \ \forall\, t \geq 0$$

b) In condizioni di perturbazione dello stato di equilibrio

$$x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x}$$
$$u(t) = \bar{u}, t \geq 0$$

$$x(t) \neq \bar{x}, t \geq 0$$

Movimento perturbato dello stato

$$x(t) = e^{At}(\bar{x} + \delta\bar{x}) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u}\, d\tau$$

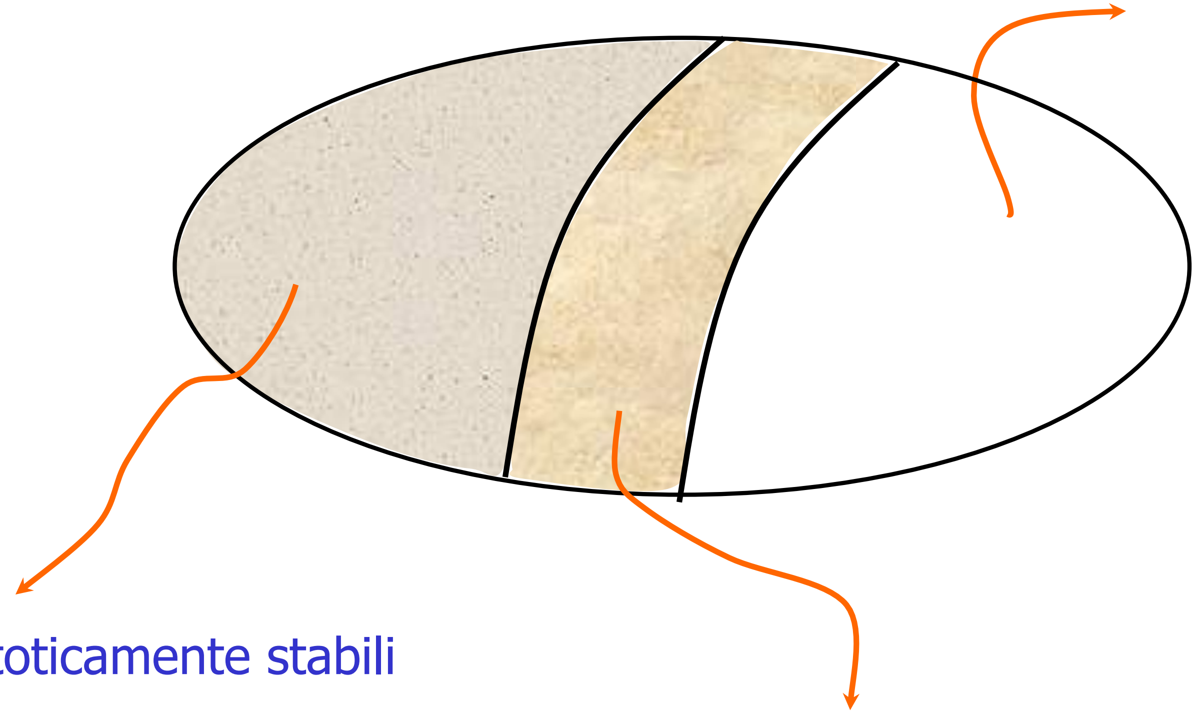
$$= \bar{x} + e^{At}\delta\bar{x}$$

$$x(t) - \bar{x} = e^{At}\delta\bar{x}$$

Ricordiamo:

$$x_l(t) = e^{At}x(0)$$

instabili



Asintoticamente stabili

- semplicemente stabili
- al limite di stabilità
- stabili ma non asintoticamente

Quindi riassumendo:

- la stabilità non dipende dal particolare valore assunto da $\bar{x}$

la stabilità non è una caratteristica dello stato di equilibrio ma del sistema nella sua globalità

- la stabilità dipende da e^{At} :

  - stabilità $\Longleftrightarrow$ e^{At} è limitata $\forall\, t \geq 0$
  - as. stabilità $\Longleftrightarrow$ $\lim_{t \to \infty} e^{At} = 0$
  - instabilità $\Longleftrightarrow$ e^{At} diverge

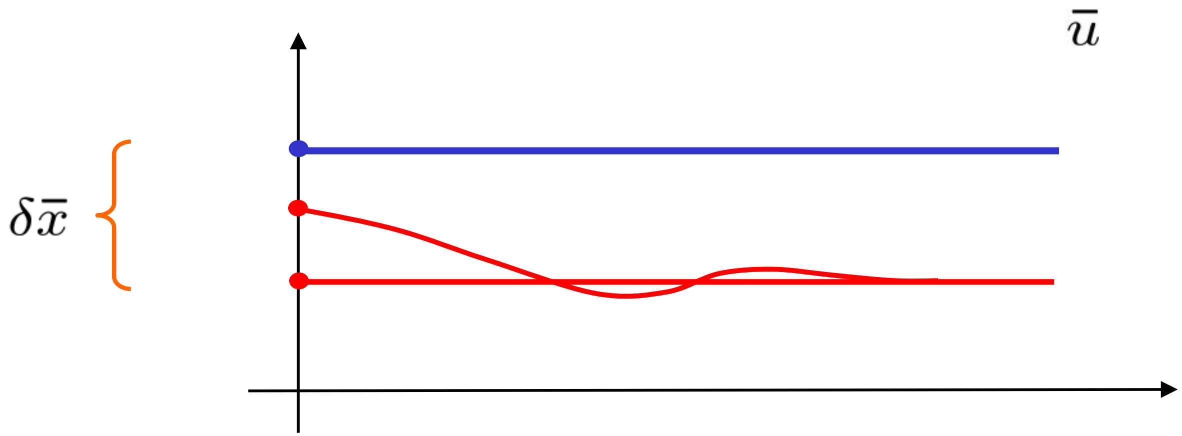
Proprietà dei sistemi as. stabili:

1. spostato dall'equilibrio, tende a tornarci

2. fissato $\bar{u}$, $\bar{x}$ e` unico

asintotica stabilita` $\Rightarrow$ $\bar{x}$ unico $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Se per assurdo, fissato $\bar{u}$, $\exists\, \bar{x}, \tilde{x}$, con $\bar{x} \neq \tilde{x}$ si avrebbe la situazione:



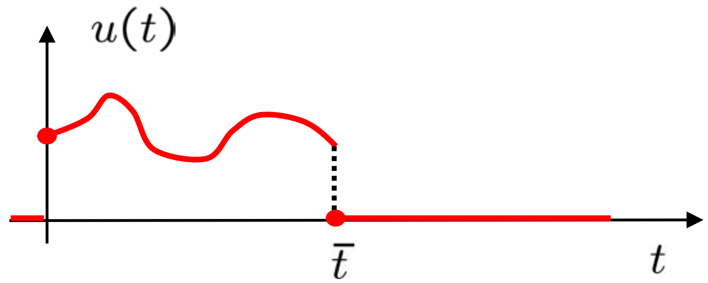
Proprietà dei sistemi as. stabili:

3. il movimento dipende asintoticamente solo da $u(t)$

$$x(t) = \underbrace{x_l(t)}_{\to 0} + x_f(t)$$

- se $u(t) = 0$ allora $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0; \ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \ \forall x_0$

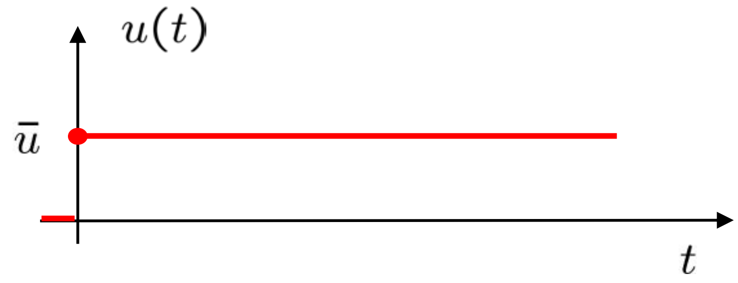
- se $u(t) = \begin{cases} \text{qualsiasi} & 0 \leq t < \bar{t} \\ 0 & t \geq \bar{t} \end{cases}$



allora $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0; \ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \ \forall x_0$

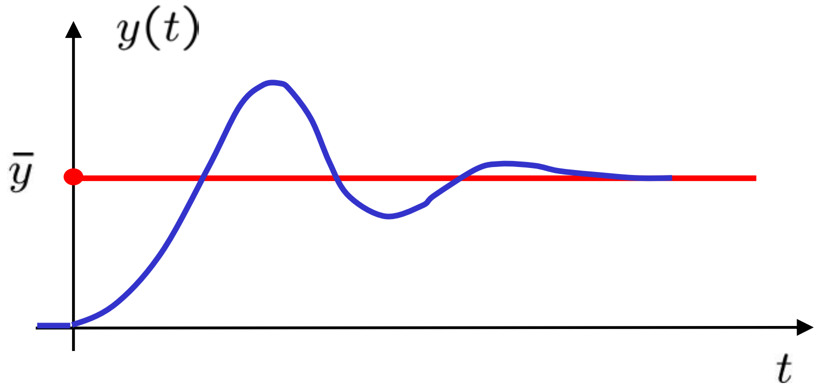
Proprietà dei sistemi as. stabili:

4. se $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \bar{u} & t \geq 0 \end{cases}$



allora l'uscita $y(t)$ tende a

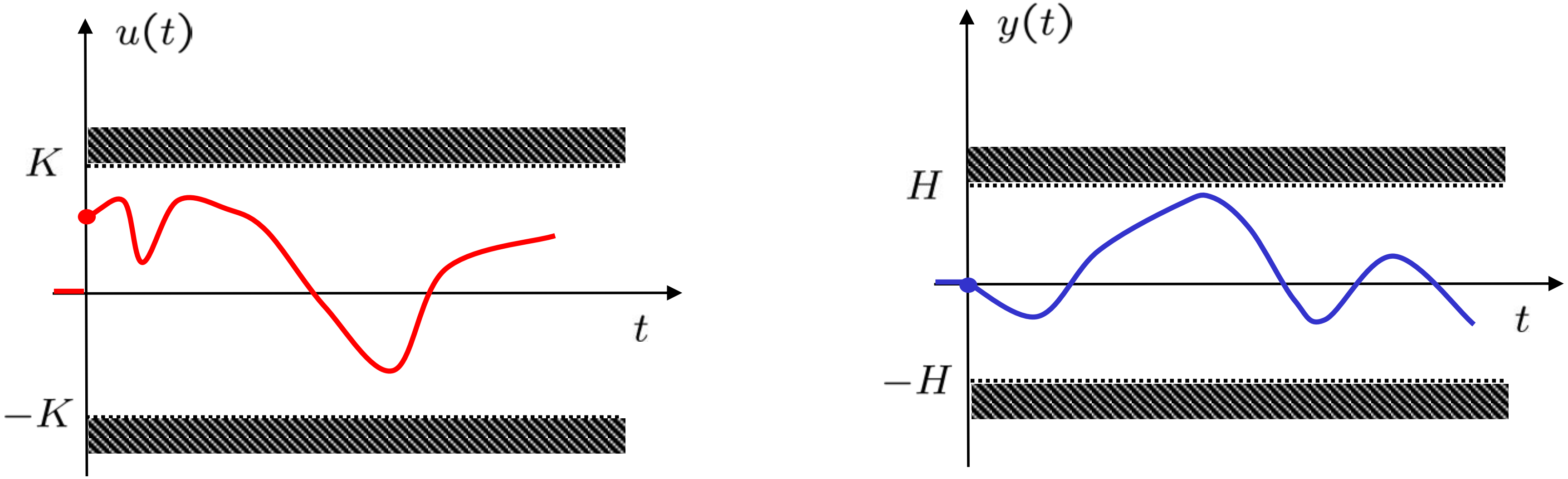
$$\bar{y} = \mu \bar{u} = \left(-CA^{-1}B + D\right) \bar{u}$$



Proprietà dei sistemi as. stabili:

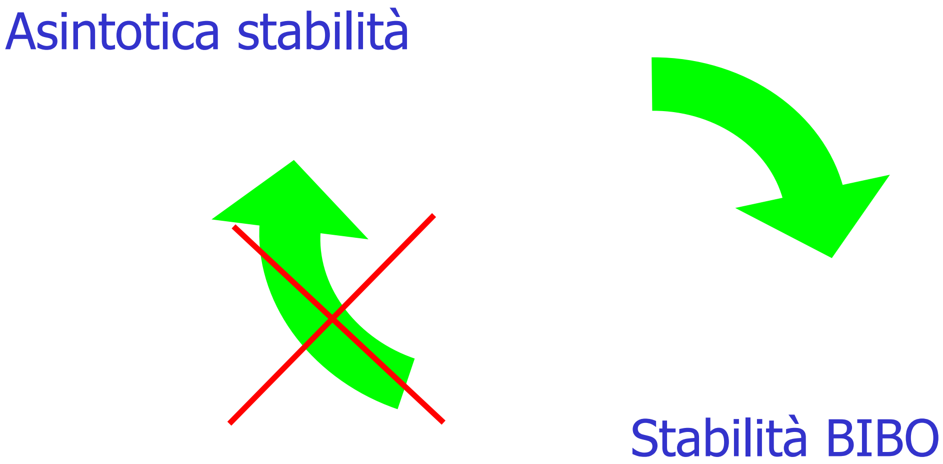
5. se $u(t)$ è limitato ➡ $y(t)$ è limitata

$$\|u(t)\| < K, \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists H : \|y(t)\| < H, \forall t \geq 0$$



Stabilità esterna – BIBO (bounded input bounded output)

ATTENZIONE!!!



(solo sotto opportune ipotesi)

Stabilità dei sistemi lineari a tempo continuo: riassumendo

- stabilità ⟷ Movimento libero limitato

- asintotica stabilità ⟷ Movimento libero convergente a 0

- instabilità ⟷ Movimento libero divergente

$$\boxed{x_l(t) = e^{At}x(0)}$$

↳ Le proprietà di stabilità sono determinate dal comportamento nel tempo della matrice e^{At}

Esempio ($n = 1$)

e^{at} $\quad$ a scalare

$a \leq 0$ ⟺ - stabilita`

$a < 0$ ⟺ - asintotica stabilita`

$a > 0$ ⟺ - instabilita`

Caso generale: studio di e^{At}

(1) A diagonale

(2) A con autovalori reali distinti

(3) A con autovalori complessi distinti

(4) A con autovalori multipli

A diagonalizzabile → vedi casi (2) e (3)

A non diagonalizzabile → Forma di Jordan

(1C) A diagonale

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix}$$

$s_1, s_2, \ldots, s_n$

Autovalori di A

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & e^{s_n t} \end{bmatrix}$$

La matrice e^{At} e\` una matrice $n \times n$ di funzioni del tempo contenenti i termini $e^{s_i t}$

(1C) A diagonale

$s_i \leq 0, \forall i$ $\Longleftrightarrow$ - stabilita`

$s_i < 0, \forall i$ $\Longleftrightarrow$ - asintotica stabilita`

$\exists\, i : s_i > 0$ $\Longleftrightarrow$ - instabilita`

(2C) A con autovalori reali distinti

$$s_1, s_2, \ldots, s_n \qquad s_1 \neq s_2 \neq \cdots \neq s_n$$

Autovalori di A

$$A = M\tilde{A}M^{-1} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots \qquad M^{-1}M = I$$

$$= I + M\tilde{A}M^{-1}t + \frac{1}{2}(M\tilde{A}M^{-1}t)(M\tilde{A}M^{-1}t) + \cdots$$

$$= M\left(I + \tilde{A}t + \frac{1}{2}(\tilde{A}t)^2 + \cdots\right)M^{-1}$$

$$= Me^{\tilde{A}t}M^{-1}$$

contiene i termini $e^{s_i t}$

$$e^{At} = M \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & e^{s_n t} \end{bmatrix} M^{-1}$$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 6x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Autovalori:

$$p_A(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & -6 \\ 2 & s-5 \end{bmatrix} = (s+2)(s-5) + 12$$

$$= s^2 - 3s + 2 = (s-2)(s-1)$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = 1; \;\; s_2 = 2$$

Autovettori:

$$Av = s_1 v \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \overset{s_1}{1} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 + 6v_2 = v_1 \\ -2v_1 + 5v_2 = v_2 \end{cases}$$

(per esempio)

$$v_1 = 2v_2 \Rightarrow v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av = s_2 v$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \overset{s_2}{2} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 + 6v_2 = 2v_1 \\ -2v_1 + 5v_2 = 2v_2 \end{cases}$$

(per esempio)

$$v_1 = \frac{3}{2} v_2 \Rightarrow v^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalizzazione:

$$M = \left[v^{(1)} \middle| v^{(2)} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{At}

$$e^{At} = M e^{\tilde{A}t} M^{-1} = M \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4e^{t} - 3e^{2t} & -6e^{t} + 6e^{2t} \\ 2e^{t} - 2e^{2t} & -3e^{t} + 4e^{2t} \end{bmatrix}$$

Instabile perche` almeno un elemento (tutti in questo caso) di

e^{At} diverge

(3C) A con autovalori complessi distinti

Consideriamo il caso $n = 2$: $s_1 = \sigma + j\omega\,;\quad s_2 = \sigma - j\omega$

Autovalori di A

e^{At} contiene termini del tipo:

$$\gamma e^{(\sigma + j\omega)t} + \bar{\gamma} e^{(\sigma - j\omega)t}$$

dove

$$\gamma = \alpha + j\beta\,;\quad \bar{\gamma} = \alpha - j\beta$$

$$\gamma e^{(\sigma+j\omega)t} + \bar{\gamma} e^{(\sigma-j\omega)t}$$

$$= \gamma e^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right] + \bar{\gamma} e^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right]$$

$$= e^{\sigma t}\left[(\gamma + \bar{\gamma})\cos(\omega t) + j(\gamma - \bar{\gamma})\sin(\omega t)\right]$$

$$= e^{\sigma t}\left[2\alpha\cos(\omega t) + j(j2\beta)\sin(\omega t)\right]$$

$$= 2e^{\sigma t}\underbrace{\left[\alpha\cos(\omega t) - \beta\sin(\omega t)\right]}_{\text{limitata } \forall t \geq 0}$$

Questo e` il termine responsabile della convergenza/divergenza nel tempo

Quindi:

$\mathrm{Re}(s_i) \leq 0,\ \forall i \quad \Longleftrightarrow$ - stabilità

$\mathrm{Re}(s_i) < 0,\ \forall i \quad \Longleftrightarrow$ - asintotica stabilità

$\exists\, i : \mathrm{Re}(s_i) > 0 \quad \Longleftrightarrow$ - instabilità

(4C) A con autovalori multipli

Esempio 1:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad s_1 = s_2 = \alpha$$

A e` diagonale (quindi evidentemente diagonalizzabile!)

$$\Rightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix}$$

contiene termini del tipo $e^{\alpha t}$

(4C) A con autovalori multipli

Esempio 2:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad s_1 = s_2 = \alpha$$

A non e` diagonalizzabile!

Proviamo a fare il calcolo diretto:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \quad A^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$+ \cdots + \begin{bmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & t + \alpha t^2 + \cdots + \alpha^{k-1} \frac{t^k}{(k-1)!} + \cdots \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & t e^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix}$$

contiene termini del tipo $e^{\alpha t}, \quad t e^{\alpha t}$

Quindi:

$\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow$ - instabilità

$\alpha < 0 \quad \Longleftrightarrow$ - asintotica stabilità

$\alpha > 0 \quad \Longleftrightarrow$ - instabilità

Generalizzando:

- autovalori multipli con molteplicita` ν

- non diagonalizzabile

e^{At} contiene termini del tipo

$$e^{s_i t}, \;\; t^k e^{s_i t}, \; k = 1, 2, \ldots, \nu - 1$$

In sintesi:

Data la matrice A

gli elementi della matrice e^{At} contengono termini del tipo

$$t^k e^{st}$$

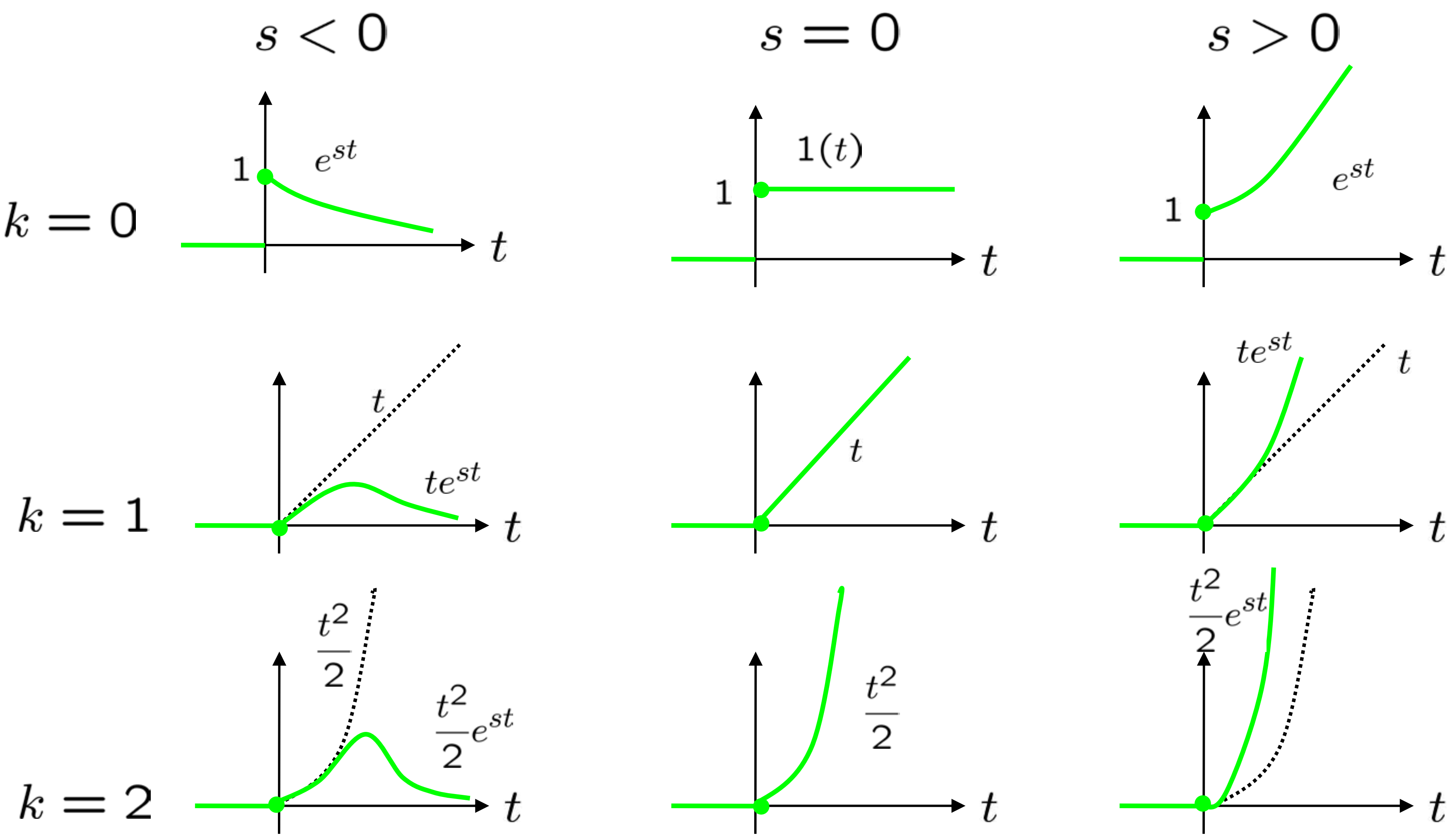
dove:

$$s \in \mathbb{C}$$

$$k \in \mathbb{N}$$

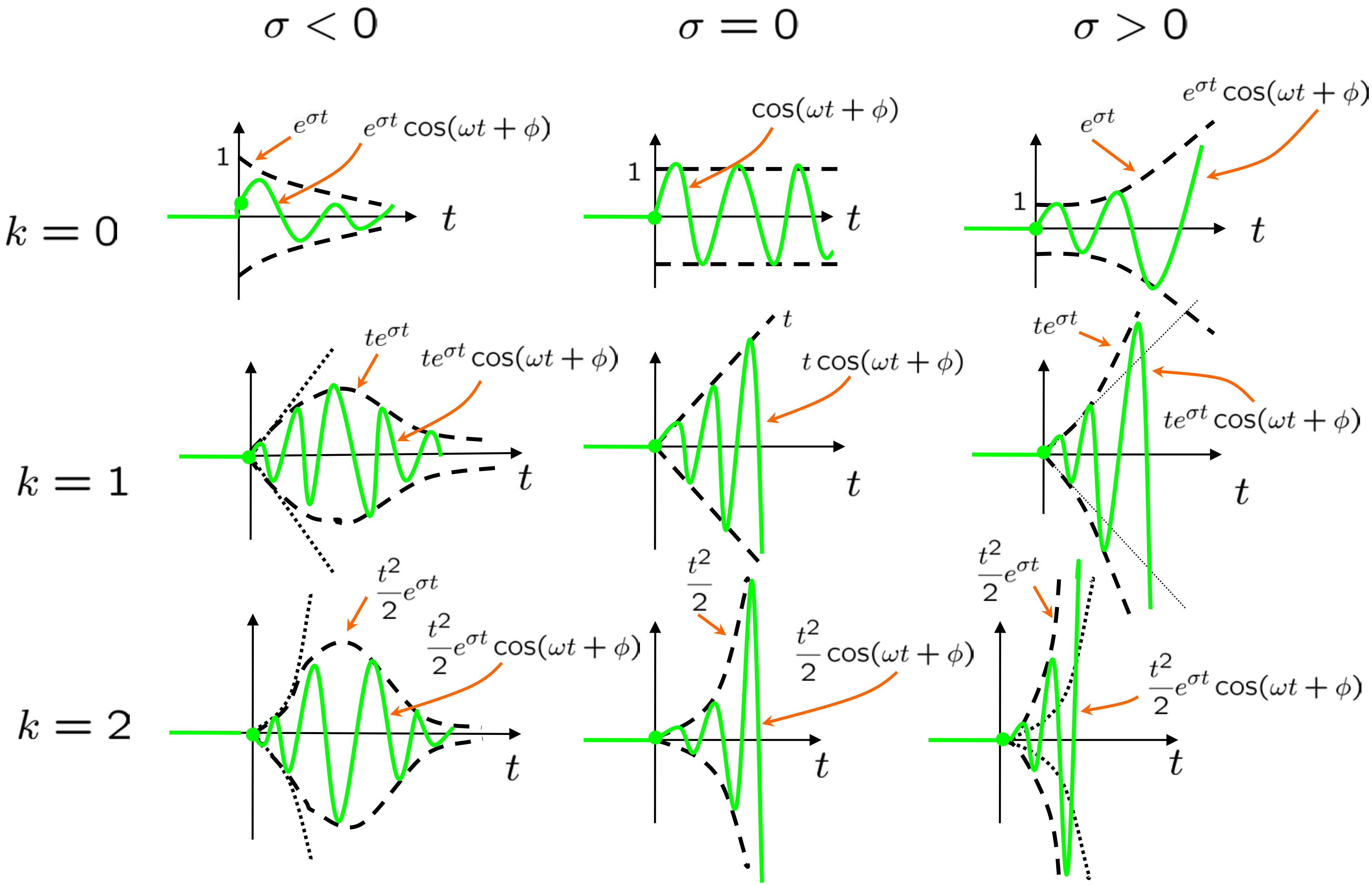
Studio qualitativo del termine $t^k e^{st}$

a) $s \in \mathbb{R}$



Studio qualitativo del termine $t^k e^{st}$

b) $s \in \mathbb{C},\ s_1 = \sigma + j\omega,\ s_2 = \sigma - j\omega$



Quindi si dimostrano i seguenti:

Teorema 1C

$\mathrm{Re}\,(s_i) < 0,\ \forall i$ $\Longleftrightarrow$ asintotica stabilità

Teorema 2C

$\exists\, i : \mathrm{Re}\,(s_i) > 0$ $\Longrightarrow$ instabilità

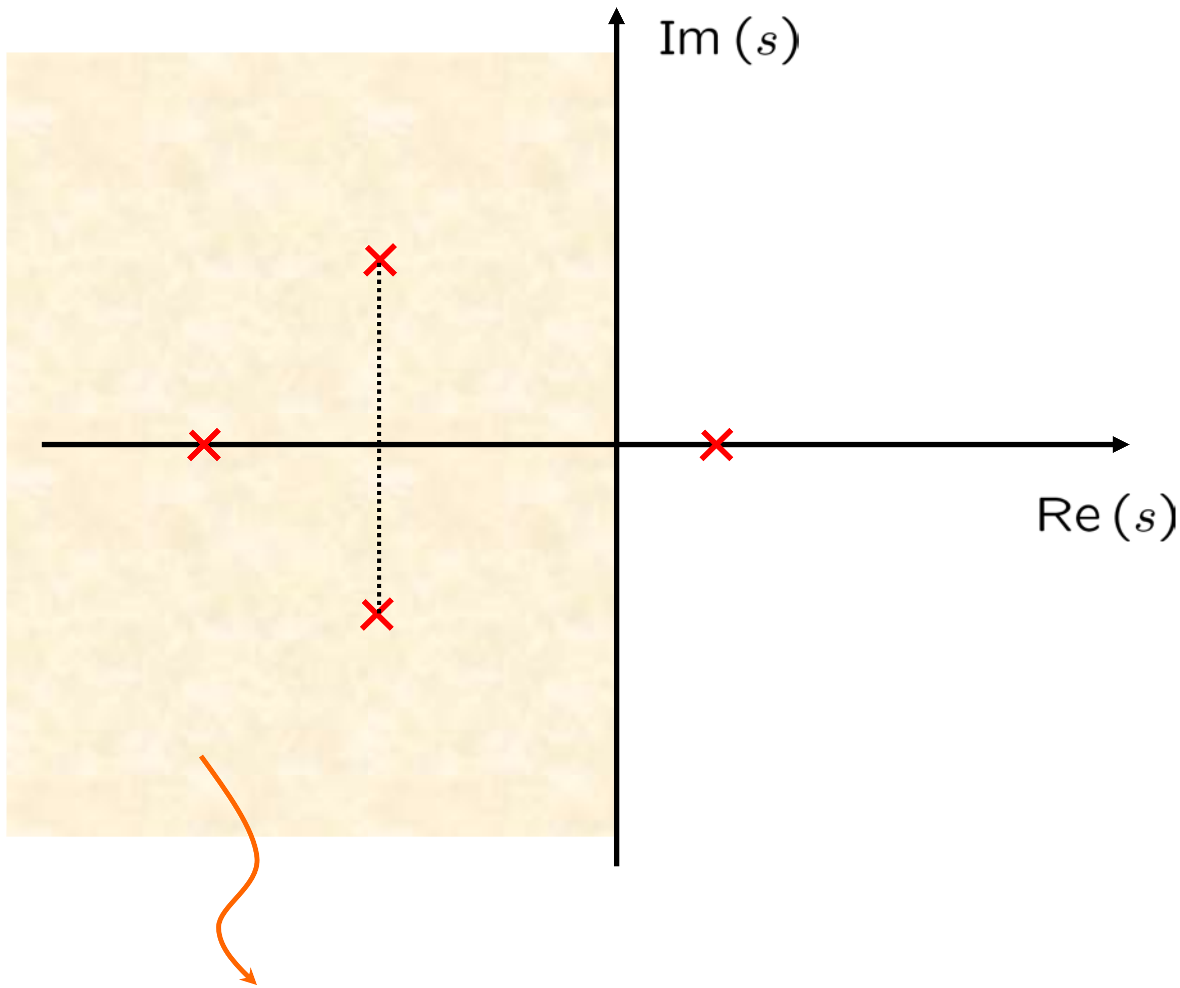
Caso critico:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Re}\,(s_i) \leq 0,\ \forall i \\ \exists\, i:\ \mathrm{Re}\,(s_i) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$ non asintoticamente stabile

- autovalori con $\mathrm{Re}\,(s_i) = 0$ distinti $\Rightarrow$ Stabile ma non asintoticamente

- autovalori con $\mathrm{Re}\,(s_i) = 0$ multipli **?** $\Rightarrow$ Stabile ma non asintoticamente / Instabile

Rappresentazione grafica:



Regione di asintotica stabilità

Altri criteri di stabilita`

Criteri che non richiedono il calcolo degli autovalori:

- basati sullo studio di A

- basati sullo studio di

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$$

- Criterio 1

Se A e` triangolare

↳ $a_{ii} < 0, \ \forall i$ ⟺ asintotica stabilita`

- Criterio 2

asintotica stabilità $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}(A) < 0$

$\mathrm{tr}(A) > 0$ $\Rightarrow$ instabilità

Per dimostrare questo criterio basta ricordare:

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(s_i)$$

- Criterio 3

asintotica stabilita` $\Rightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Per dimostrare questo criterio basta ricordare:

$$\det(A) := \prod_{i=1}^{n} s_i$$

Altri criteri di stabilità

Criteri che non richiedono il calcolo degli autovalori:

- basati sullo studio di A

- basati sullo studio di

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$$

- Criterio 4 $n = 2$

asintotica stabilita` $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}\,(s_i) < 0,\ i = 1,2$ $\Longleftrightarrow$ $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ $\neq 0$ e concordi

Dimostrazione:

$$\varphi_0 s^2 + \varphi_1 s + \varphi_2 = \varphi_0 (s - s_1)(s - s_2)$$

$$s_1 s_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_0}$$

$$s_1 + s_2 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$$

- Criterio 5 n generico

asintotica stabilità $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}\,(s_i) < 0,\ \forall\, i$ $\Rightarrow$ $\{\varphi_i, i = 1, \ldots, n\}$ $\neq 0$ e concordi

Dimostrazione (con s_i reali):

$s_i < 0,\ \forall\, i$ $\Rightarrow$ il polinomio $\varphi(s) = \varphi_0(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n)$

ha tutti i coefficienti positivi

Esempi

$$\varphi(s) = s^3 + 3s^2 + 2s$$

non asintoticamente stabile

$$\varphi(s) = s^3 + 2s + 5$$

non asintoticamente stabile

$$\varphi(s) = s^3 + 5s^2 - 2s + 4$$

non asintoticamente stabile

$$\varphi(s) = s^3 + 5s^2 + 2s + 4$$

???

Tabella di Routh

Dato $\varphi(s) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$

$$
\left.
\begin{array}{c|cccc}
1 & \varphi_0 & \varphi_2 & \varphi_4 & \cdots \\
2 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
i-2 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots \\
i-1 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\
i & l_1 & l_2 & l_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}
\right\}
$$

r_i

al massimo $n+1$ righe

$$l_1 = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \qquad l_2 = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_3 \\ k_1 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\cdots \qquad l_j = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{j+1} \\ k_1 & k_{j+1} \end{bmatrix}$$

- Criterio 6 (di Routh)

$$\mathrm{Re}\,(s_{i-1}) < 0,\ \forall\, i > 1 \iff \{r_i\} \neq 0 \text{ e concordi}$$

- Criterio 7 (di Routh-Hurwitz)

Se e` possibile completare la tabella di Routh (n+1 righe), allora il numero di radici con parte reale positiva e` pari al numero di cambiamenti di segno nella prima colonna della tabella di Routh ed il numero di radici con parte reale negativa e` pari al numero di permanenze di segno nella prima colonna della tabella di Routh.

asintotica stabilita` $\iff$ No cambiamenti di segno nella prima colonna dalla tabella completa

Verifica $n = 2$

$$\varphi(s) = \varphi_0 s^2 + \varphi_1 s + \varphi_2$$

$$\begin{array}{c|ccc}
1 & \varphi_0 & \varphi_2 & 0 \\
2 & \varphi_1 & 0 & 0 \\
3 & \alpha & 0 & 0
\end{array}$$

$$\alpha = -\frac{1}{\varphi_1} \det \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} = \varphi_2$$

OK!

Esempio 1

$$\varphi(s) = s^3 + 5s^2 + 2s + 4$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & r_4 & & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 0 \\
2 & 5 & 4 & 0 \\
3 & \alpha & 0 & 0 \\
4 & \beta & 0 & 0
\end{array}$$

$$\alpha = -\frac{1}{5}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \frac{6}{5}$$

$$\beta = -\frac{1}{\alpha}\det\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = 4$$

segni concordi nella colonna r_4

asintotica stabilita`

Esempio 2

$$\varphi(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 9s + 6$$

$$\begin{array}{|ccc}
\hline
\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \alpha \\ \beta \\ 6 \end{array}} & \begin{array}{c} 4 \\ 9 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}
\end{array}$$

r_5

$$\alpha = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{\alpha}\det\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ \alpha & 6 \end{bmatrix} = 33$$

Due cambiamenti di segno nella colonna r_5

⮡ instabilita`

Esempio 3

$$\varphi(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K$$

$$\begin{array}{|ccc}
\hline
1 & 11 & K \\
6 & 6 & 0 \\
10 & K & 0 \\
\alpha & 0 & 0 \\
K & 0 & 0
\end{array}$$

r_5

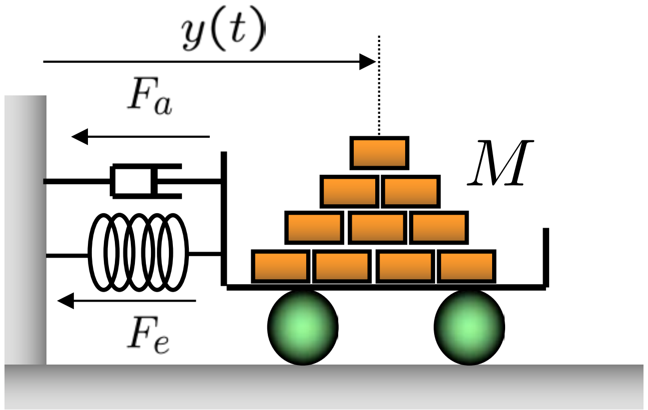
$$\alpha = -\frac{1}{10}\det\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 10 & K \end{bmatrix} = \frac{3}{5}(10-K)$$

Se $K > 0$ e $K < 10$

no cambiamenti di segno nella colonna r_5

asintotica stabilità

Esempio 4



$$F_e = kx$$
$$F_a = h\dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{M}x_1 - \dfrac{h}{M}x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{M} & s + \frac{h}{M} \end{bmatrix}$$

$$= s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}$$ dove $M > 0,\ k \geq 0,\ h \geq 0$

a) $k > 0,\ h > 0$

$\text{Re}\,(s_i) < 0,\ i = 1,2$ ⇒ Asintoticamente stabile

b) $k > 0,\ h = 0$

$$\varphi(s) = s^2 + \frac{k}{M} \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{M}}$$

$\text{Re}\,(s_i) = 0,\ i = 1,2$ ⇒ Stabile (non asintoticamente)

c) $k = 0,\ h > 0$

$$\varphi(s) = s^2 + \frac{h}{M}s \quad \Rightarrow \quad s_1 = 0\,;\ s_2 = -\frac{h}{M}$$

$\mathrm{Re}\,(s_1) = 0 \quad \Rightarrow$ Stabile (non asintoticamente)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{h}{M}x_2 \end{cases} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{-\frac{h}{M}t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

$$\dot{x}_1 = x_{20}e^{-\frac{h}{M}t}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = x_{10} + x_{20}\int_0^t e^{-\frac{h}{M}\tau}d\tau$$

$$= x_{10} - x_{20}\frac{M}{h}\left(e^{-\frac{h}{M}t} - 1\right)$$

$$\xrightarrow[t \to \infty]{} x_{10} + x_{20}\frac{M}{h}$$

d) $k = 0,\ h = 0$

$\varphi(s) = s^2 \Rightarrow s_{1,2} = 0 \Rightarrow$ Non asintoticamente stabile

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Instabile}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2(t) = x_{20}\,,\ \forall\, t \\ x_1(t) = x_{10} + x_{20}t \end{array}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

Stabilita` dell'equilibrio nei sistemi non lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

$$0 = f(x,\bar{u}) \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$$

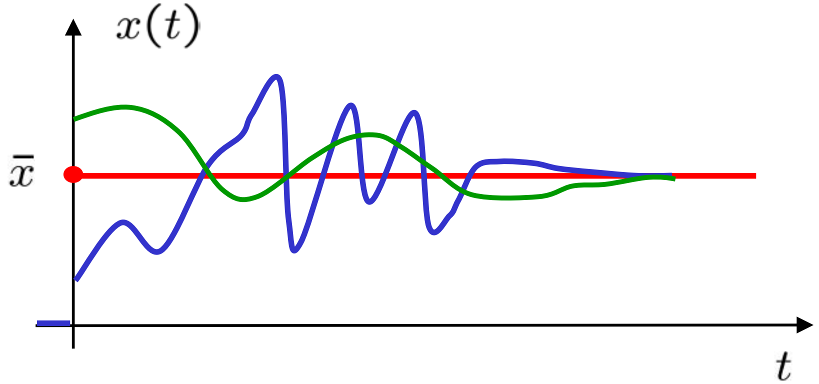
Stato equilibrio associato all' ingresso $\bar{u}$

Perturbazione dello stato iniziale (di equilibrio):

$$u(t) = \bar{u}, t \geq 0$$
$$x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) \neq \bar{x}, t \geq 0$$

Movimento perturbato dello stato



Stabilita` dell'equilibrio nei sistemi non lineari

Per sistemi non lineari la stabilita` dell'equilibrio e` una proprieta` locale

DOMANDA: e` possibile studiare la stabilita` dell'equilibrio analizzando le proprieta` di stabilita` del sistema lineare ottenuto per linearizzazione intorno a tale stato di equilibrio?

RISPOSTA: si` !!!

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases} \qquad 0 = f(x,\bar{u}) \Rightarrow \bar{x}$$

$$\delta\dot{x} = \underbrace{f_x(\bar{x},\bar{u})}_{A}\delta x + \underbrace{f_u(\bar{x},\bar{u})}_{B}\delta u$$

$$\delta y = \underbrace{g_x(\bar{x},\bar{u})}_{C}\delta x + \underbrace{g_u(\bar{x},\bar{u})}_{D}\delta u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \in \Re^n \\ u \in \Re^m \\ y \in \Re^p \end{array}$$

$s_i,\ i = 1,\dots,n$

autovalori di

$$A = f_x(\bar{x},\bar{u})$$

Quindi si dimostrano i seguenti:

Teorema 1

$\mathrm{Re}\,(s_i) < 0,\ \forall i \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$ Stato di eq. asintoticamente stabile

Teorema 2

$\exists\, i : \mathrm{Re}\,(s_i) > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$ Stato di eq. instabile

Caso critico:

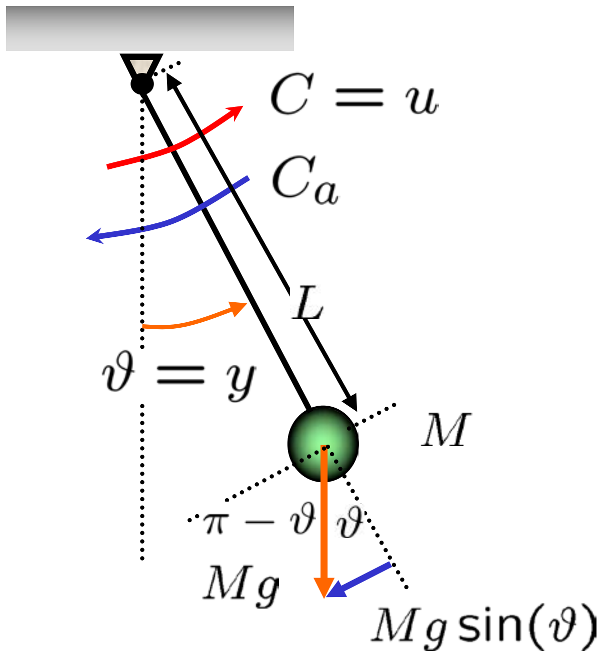
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,(s_i) \leq 0,\ \forall i \\ \exists\, i : \mathrm{Re}\,(s_i) = 0 \end{array}\right\} \ ? \ \Rightarrow$$

$\bar{x}$ stato di eq. asintoticamente stabile

$\bar{x}$ stato di eq. stabile

$\bar{x}$ stato di eq. instabile

Esempio 1



Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) - \dfrac{h}{J}x_2 + \dfrac{1}{J}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$u(t) = \bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

- analisi di stabilita` dello stato di eq. $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J}\cos(x_1) & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} = \bar{A}$$

$$\varphi(s) = \det(sI - \bar{A}) = s\left(s + \frac{h}{J}\right) + \frac{MgL}{J} = s^2 + \frac{h}{J}s + \frac{MgL}{J}$$

$$\frac{h}{J} > 0, \frac{MgL}{J} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,(s_i) < 0,\ i = 1, 2$$

$\bar{x}$ stato di eq. asintoticamente stabile

- analisi di stabilita` dello stato di eq. $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

$$f_x(\tilde{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J}\cos(x_1) & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{MgL}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

$$\varphi(s) = \det(sI - \tilde{A}) = s\left(s + \frac{h}{J}\right) - \frac{MgL}{J} = s^2 + \frac{h}{J}s - \frac{MgL}{J}$$

$$\frac{h}{J} > 0, \frac{MgL}{J} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,(s_1) > 0$$

$\tilde{x}$ stato di eq. instabile

Esempio 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 u + x_1 - u \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ y = x_1^2 - x_2 \end{cases} \qquad u(t) = \bar{u} = 3$$

- Equilibrio

$$\begin{cases} 0 = 3x_1 x_2 + x_1 - 3 \\ 0 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = 9$$

- Linearizzazione

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array}\right]_{\bar{x},\bar{u}} = \left[\begin{array}{cc} x_2 u + 1 & x_1 u \\ 0 & -1 \end{array}\right]_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \bar{x}_2 \bar{u} + 1 & \bar{x}_1 \bar{u} \\ 0 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 9 \\ 0 & -1 \end{array}\right]$$

- Stabilita`

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = -1$$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ stato di eq. instabile

Stabilità: il caso dei sistemi dinamici a tempo discreto

Stabilità:

Le definizioni delle proprietà di stabilità per i sistemi dinamici a tempo discreto sono analoghe a quelle viste per i sistemi dinamici a tempo continuo.

- ~~del movimento (vedere libro ma non compreso nel programma)~~

- dell'equilibrio

- del sistema (solo sistemi lineari)

Stabilità dell'equilibrio

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases}$$

$$x = f(x, \bar{u}) \Rightarrow \bar{x}$$

Stato d'equilibrio
associato all' ingresso $\bar{u}$

Consideriamo ora una **perturbazione** dello stato iniziale (di equilibrio):

$$u(k) = \bar{u}, \; k \geq 0$$

$$x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x}$$

$$\Rightarrow \quad x(k) \neq \bar{x}, \; k \geq 0$$

Movimento perturbato dello stato

Definizione: stabilità dell'equilibrio

$\bar{x}$ è stato di **equilibrio stabile** se:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \text{tale che}$$

$$\forall\, x(0) : \;\|\delta \bar{x}\| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \|x(k) - \bar{x}\| < \varepsilon,\; \forall\, k \geq 0$$

Se perturbato, lo stato si mantiene "vicino" allo stato nominale d'equilibrio [a parità d'ingresso applicato].

Definizione: stabilità asintotica dell'equilibrio

$\bar{x}$ è stato di **equilibrio asintoticamente stabile** se:

a) è stabile cioè se:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \text{tale che}$$

$$\forall\, x(0) : \|\delta \bar{x}\| < \delta(\varepsilon) \;\; \Rightarrow \;\; \|x(k) - \bar{x}\| < \varepsilon,\; \forall\, k \geq 0$$

b) vale la seguente proprietà

$$\lim_{k \to \infty} \|x(k) - \bar{x}\| = 0$$

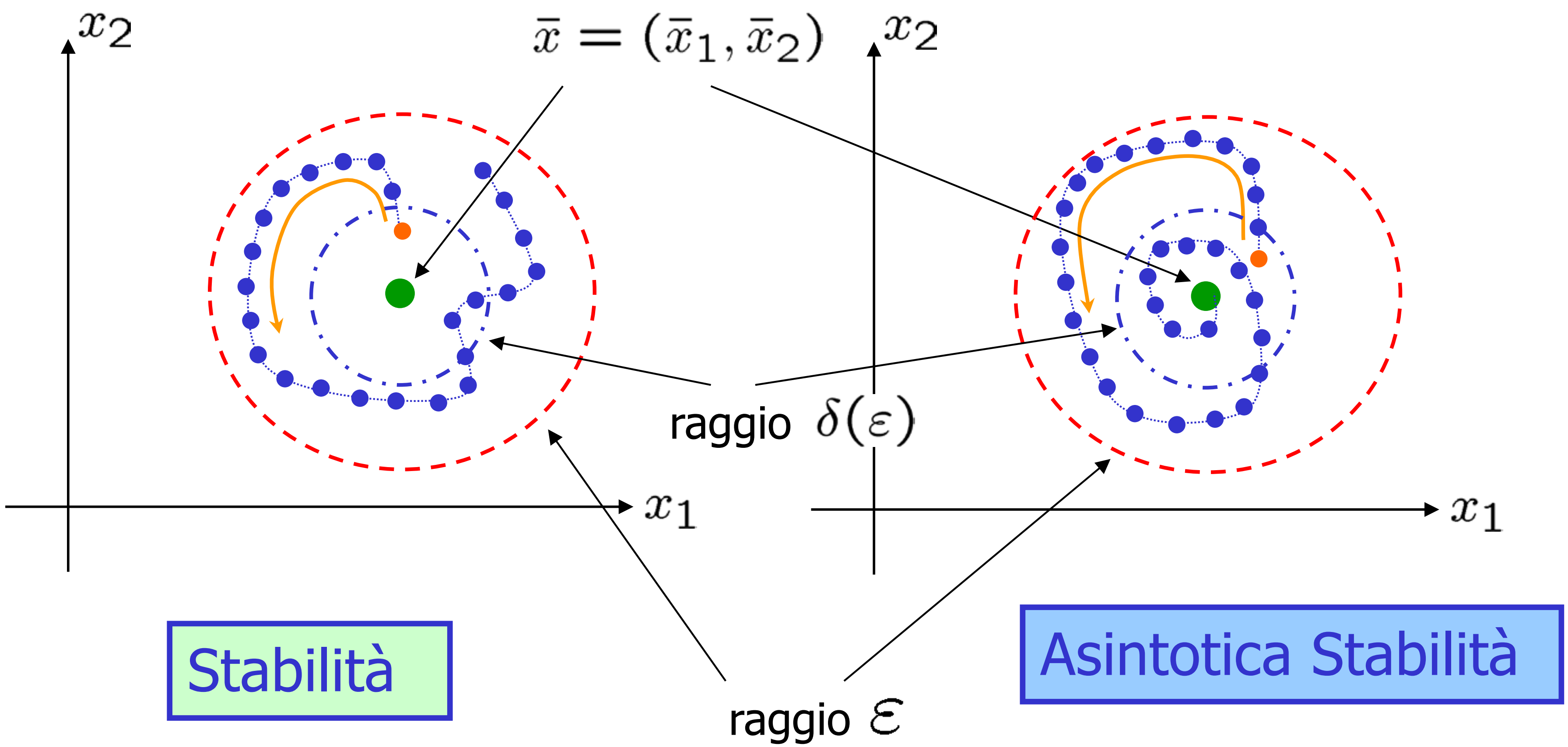
Se perturbato, lo stato si mantiene "vicino" allo stato nominale d'equilibrio [a parità d'ingresso applicato] e tende a ritornare ad assumere il valore nominale d'equilibrio [almeno in "tempo infinito"].

Definizione instabilità dell' equilibrio:

$\bar{x}$ è stato di **equilibrio instabile** se non è stabile

Stabilità dell' equilibrio: interpretazione grafica

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}$$



Si confrontino le analoghe proprietà viste per i sistemi dinamici a tempo continuo.

Stabilità dell'equilibrio: strumenti d'analisi

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases}$$

$$x = f(x, \bar{u}) \Rightarrow \bar{x}$$

Stato d'equilibrio
associato all' ingresso $\bar{u}$

Come fare a stabilire se lo stato d'equilibrio è stabile oppure no?

Cercheremo di analizzare la stabilità degli stati d'equilibrio di un sistema non lineare facendo uso del sistema linearizzato, ottenuto in corrispondenza di ciascuno degli stati d'equilibrio considerati.

Per farlo abbiamo bisogno degli strumenti che permettono di analizzare la stabilità dei sistemi dinamici lineari a tempo discreto.

Stabilità:

Anche in questo caso le definizioni delle proprietà di stabilità sono analoghe a quelle viste per i sistemi dinamici a tempo continuo.

- del movimento ~~(vedere libro ma non compreso nel programma)~~

- dell'equilibrio

- del sistema (solo sistemi lineari)

Stabilità nei sistemi lineari stazionari

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

a) In condizioni di equilibrio

$$x(0) = \bar{x}$$

$$u(k) = \bar{u}, \ k \geq 0$$

$$x(k) = A^k \bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B\bar{u} \ = \ \bar{x}, \ \forall k \geq 0$$

b) In condizioni di perturbazione dello stato di equilibrio

$$x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x}$$
$$u(k) = \bar{u},\ k \geq 0$$

$$x(k) \neq \bar{x}, k \geq 0$$

Movimento perturbato dello stato

$$x(k) = A^k\,(\bar{x} + \delta\bar{x}) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}\,B\bar{u}$$

$$= \bar{x} + A^k\,\delta\bar{x}$$

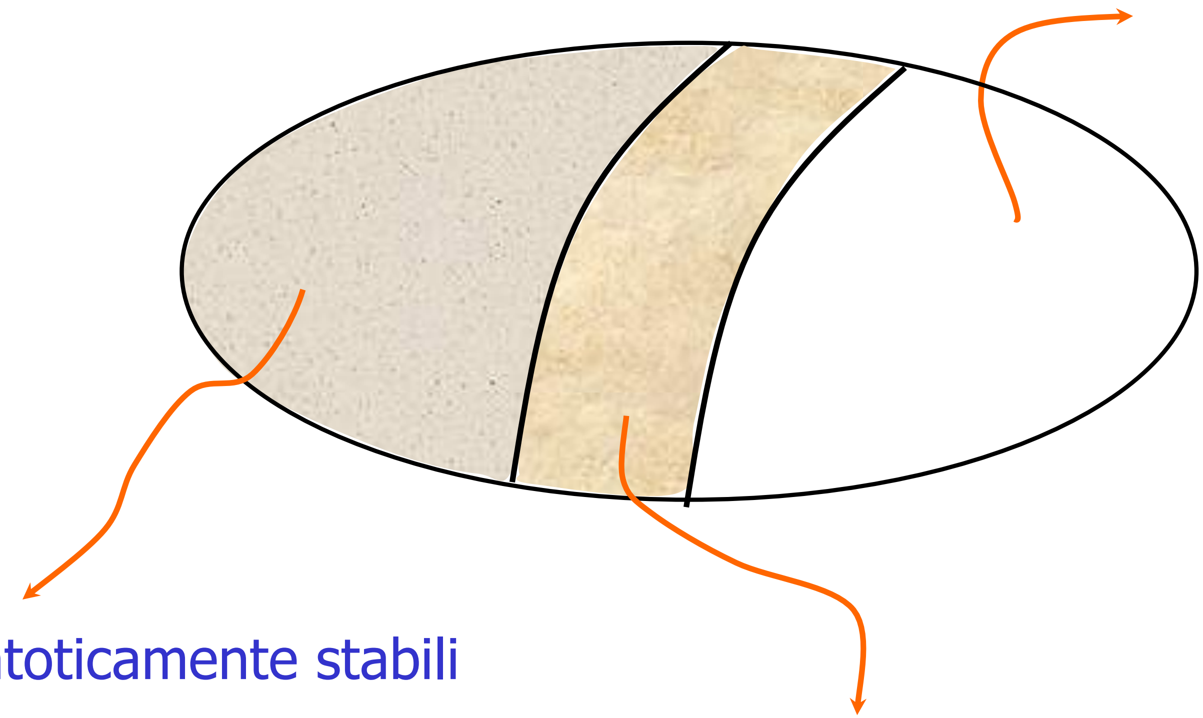
$$x(k) - \bar{x} = A^k\delta\bar{x}$$

$$\delta x(k) = A^k\delta\bar{x}$$

Ricordiamo:

$$x_l(k) = A^k\,x(0)$$

Sistemi dinamici lineari a tempo discreto



instabili

Asintoticamente stabili

- semplicemente stabili
- al limite della stabilità
- stabili ma non asintoticamente

Quindi riassumendo:

- la stabilità non dipende dal particolare valore assunto da $\bar{x}$

la stabilità non è una caratteristica dello stato di equilibrio ma del sistema nella sua globalità

- la stabilità dipende da A^k:
  - **stabilità** $\Longleftrightarrow$ A^k è limitata $\forall\, k \geq 0$
  - **as. stabilità** $\Longleftrightarrow$ $\lim_{k \to \infty} A^k = 0$
  - **instabilità** $\Longleftrightarrow$ A^k diverge

Proprietà dei sistemi asintoticamente stabili a tempo discreto

Troveremo risultati analoghi a quelli validi per i sistemi dinamici a tempo continuo!

Proprietà dei sistemi asintoticamente stabili:

1. spostato dall'equilibrio, il sistema tende a tornarci

2. fissato $\bar{u}$, $\bar{x}$ è unico: as. stabilità ⇒ $\bar{x}$ unico ⇔ $\det(I - A) \neq 0$

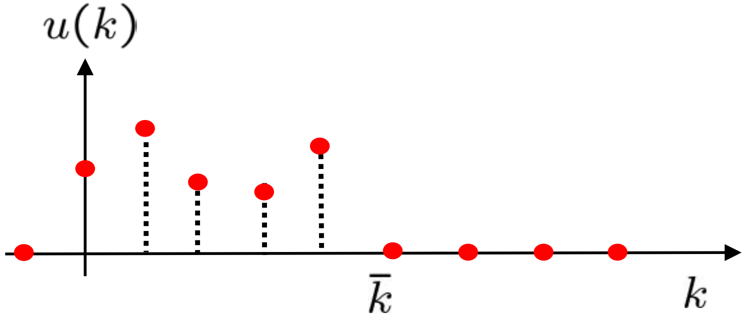
3. il movimento dipende asintoticamente solo da $u(k)$

$$x(k) = x_l(k) + x_f(k)$$

0

- se $u(k) = 0$ allora $\lim_{k \to \infty} x(k) = 0; \ \lim_{k \to \infty} y(k) = 0, \ \forall\, x(0)$

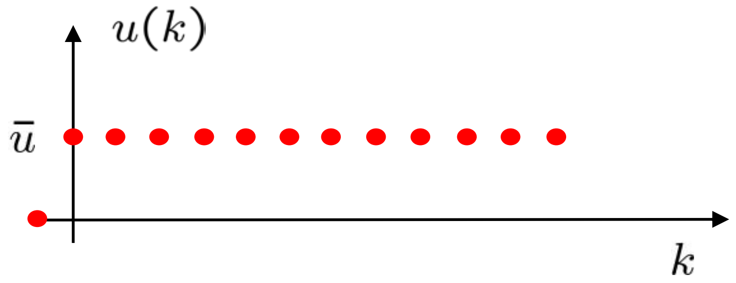
- se $u(k) = \begin{cases} \text{qualsiasi} & 0 \leq k < \bar{k} \\ 0 & k \geq \bar{k} \end{cases}$



allora $\lim_{k \to \infty} x(k) = 0; \ \lim_{k \to \infty} y(k) = 0, \ \forall\, x(0)$

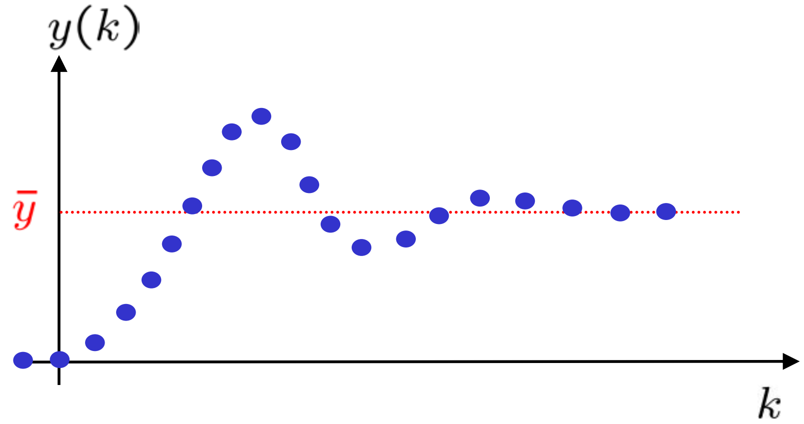
Proprietà dei sistemi asintoticamente stabili:

4. se $u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \bar{u} & k \geq 0 \end{cases}$



allora l' uscita $y(k)$ tende a

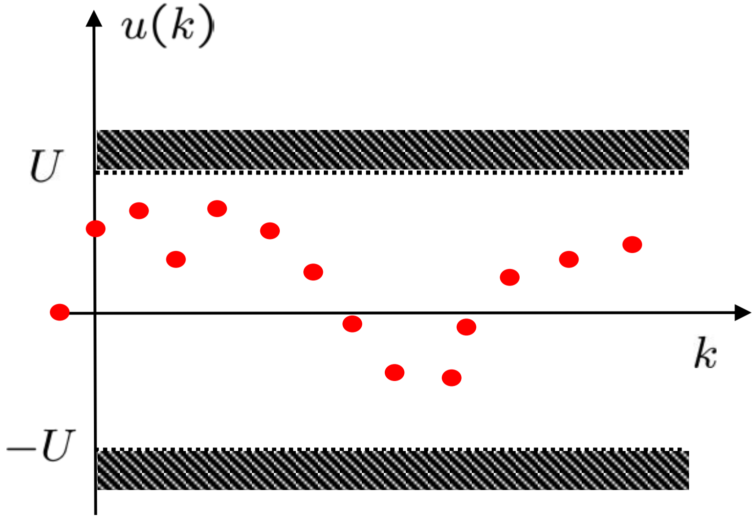
$$\bar{y} = \mu \bar{u} = \left[C \left(I - A \right)^{-1} B + D \right] \bar{u}$$

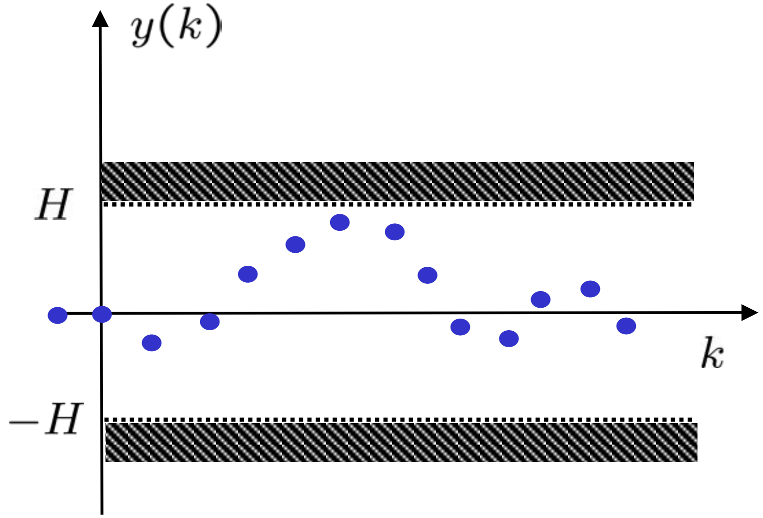


Proprietà dei sistemi asintoticamente stabili:

5. se $u(k)$ è limitato $\Rightarrow$ $y(k)$ è limitata

$$\|u(k)\| < U, \forall\, k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, H : \|y(k)\| < H, \forall\, k \geq 0$$





Stabilità esterna – BIBO (Bounded Input Bounded Output)

ATTENZIONE!!!

Stabilità asintotica

Stabilità BIBO

(solo sotto opportune ipotesi)

Considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso dei sistemi a tempo continuo!

Stabilità dei sistemi lineari - tempo discreto: riassumendo

- stabilità ⟺ Movimento libero limitato

- stabilità asintotica ⟺ Movimento libero convergente a 0

- instabilità ⟺ Movimento libero divergente

$$\boxed{x_l(k) = A^k\, x(0)}$$

Le proprietà di stabilità sono determinate dal comportamento nel tempo della matrice

$$A^k$$

Esempio: caso scalare $(n = 1)$

$$a^k$$

a scalare

$|a| \leq 1$ $\Longleftrightarrow$ - stabilità

$|a| < 1$ $\Longleftrightarrow$ - stabilità asintotica

$|a| > 1$ $\Longleftrightarrow$ - instabilità

Caso generale: studio di A^{k}

(1) A diagonale

(2) A con autovalori reali distinti

(3) A con autovalori complessi distinti

(4) A con autovalori multipli

A diagonalizzabile

vedi casi (2) e (3)

A non diagonalizzabile

Forma di Jordan

(1D) A diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Autovalori di A

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

La matrice A^k è una matrice $n \times n$ di funzioni del tempo contenenti i termini λ_i^k

(1D) $\mathbf{A}$ diagonale

$|\lambda_i| \leq 1, \ \forall i$ $\Longleftrightarrow$ - stabilità

$|\lambda_i| < 1, \ \forall i$ $\Longleftrightarrow$ - stabilità asintotica

$\exists \, j : |\lambda_j| > 1$ $\Longleftrightarrow$ - instabilità

(2D) $\mathbf{A}$ con autovalori reali distinti

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$ autovalori di A

$$A = M\tilde{A}M^{-1} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A^0 = I$$

$$A^1 = A = M\tilde{A}M^{-1}$$

$M^{-1}M = I$

$$A^2 = \left[M\tilde{A}M^{-1}\right]^2 = (M\tilde{A}M^{-1})(M\tilde{A}M^{-1}) = M\tilde{A}^2M^{-1}$$

$$A^3 = M\tilde{A}^3M^{-1}$$

$$\cdots$$

contiene i termini λ_i^k

$$A^k = M \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} M^{-1}$$

Autovalori ed evoluzione dello stato

L'evoluzione libera dello stato (e dell'uscita) del sistema viene espressa da:

- nel caso (1) ciascuna componente del vettore di stato è semplicemente data dal termine $x_i(k) = x_i(0)\,\lambda_i^k$

L'uscita è proporzionale ad una delle componenti dello stato.

- nel caso (2), lo stato (l'uscita) è dato dalla combinazione lineare, attraverso coefficienti opportuni dati dagli elementi delle matrici M ed M^{-1} (e matrice d'uscita C) e dallo stato iniziale, dei termini λ_i^k

Esempio

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -2x_1(k) + 6x_2(k) \\ x_2(k+1) = -2x_1(k) + 5x_2(k) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Autovalori:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -6 \\ 2 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 5) + 12$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

$$\lambda_1 = 1; \;\; \lambda_2 = 2$$

Quali considerazioni avremmo potuto fare se fosse stato un sistema a tempo continuo?

Autovettori:

$$Av = \lambda_1 v \qquad z = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{1}_{\lambda_1} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 + 6v_2 = v_1 \\ -2v_1 + 5v_2 = v_2 \end{cases}$$

(per esempio)

$$v_1 = 2v_2 \Rightarrow v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av = \lambda_2 v$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_{\lambda_2} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 + 6v_2 = 2v_1 \\ -2v_1 + 5v_2 = 2v_2 \end{cases}$$

(per esempio)

$$v_1 = \frac{3}{2} v_2 \Rightarrow v^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalizzazione:

$$M = \left[v^{(1)} \middle| v^{(2)} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcolo di A^k

$$A^k = M\tilde{A}^k M^{-1} = M \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - 3 \cdot 2^k & -6 + 6 \cdot 2^k \\ 2 - 2 \cdot 2^k & -3 + 4 \cdot 2^k \end{bmatrix}$$

Instabile perché almeno un elemento (tutti in questo caso) di A^k diverge!

(3D) $\mathbf{A}$ con autovalori complessi distinti

Consideriamo il caso $n = 2$: $\lambda_1 = \rho\, e^{j\,\theta}$; $\lambda_2 = \rho\, e^{-j\,\theta}$

sono gli autovalori di A

Il movimento libero dello stato (dell' uscita) contiene termini del tipo:

$$\gamma \rho^k e^{+jk\,\theta} + \bar{\gamma} \rho^k e^{-jk\,\theta}$$

dove

$$\gamma = \alpha + j\beta\,; \qquad \bar{\gamma} = \alpha - j\beta$$

$$\gamma\rho^k e^{+jk\,\theta} + \bar{\gamma}\rho^k e^{-jk\,\theta}$$

$$= \gamma\rho^k \left[\cos(\theta k) + j\sin(\theta k)\right] + \bar{\gamma}\rho^k \left[\cos(\theta k) - j\sin(\theta k)\right]$$

$$= \rho^k \left[(\gamma + \bar{\gamma})\cos(\theta k) + j(\gamma - \bar{\gamma})\sin(\theta k)\right]$$

$$= \rho^k \left[2\alpha\cos(\theta k) + j(j2\beta)\sin(\theta k)\right]$$

$$= 2\,\rho^k \underbrace{\left[\alpha\cos(\theta k) - \beta\sin(\theta k)\right]}_{\text{limitata } \forall k \geq 0}$$

Questo è il termine responsabile della convergenza/divergenza nel tempo!

Quindi riassumendo per il caso (3):

$|\lambda_i| \leq 1, \; \forall i$ $\Longleftrightarrow$ - stabilità

$|\lambda_i| < 1, \; \forall i$ $\Longleftrightarrow$ - stabilità asintotica

$\exists\, i : |\lambda_i| > 1$ $\Longleftrightarrow$ - instabilità

(4D) A con autovalori multipli

Esempio 1:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$$

A è diagonale (quindi evidentemente diagonalizzabile!)

$$\Rightarrow \quad A^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \alpha^k \end{bmatrix}$$

contiene termini del tipo α^k

(4D) $\mathbf{A}$ con autovalori multipli

Esempio 2:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$$

A non è diagonalizzabile!

Proviamo a calcolare ricorsivamente:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\Rightarrow \quad A^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{bmatrix}$$

contiene termini del tipo $\alpha^k,\ k\alpha^{k-1}$

Quindi riassumendo:

$|\alpha| = 1 \iff$ - instabilità

$|\alpha| < 1 \iff$ - stabilità asintotica

$|\alpha| > 1 \iff$ - instabilità

Generalizzando:

- autovalori multipli con molteplicità ν

- matrice A non diagonalizzabile

A^k contiene termini del tipo

$$\lambda_i^k, \quad \binom{k}{n} \lambda_i^{k-n}, \; n = 1, 2, \ldots, \nu - 1$$

In sintesi:

Data la matrice A

gli elementi della matrice A^k contengono termini del tipo

$$\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \lambda^{k-n}$$

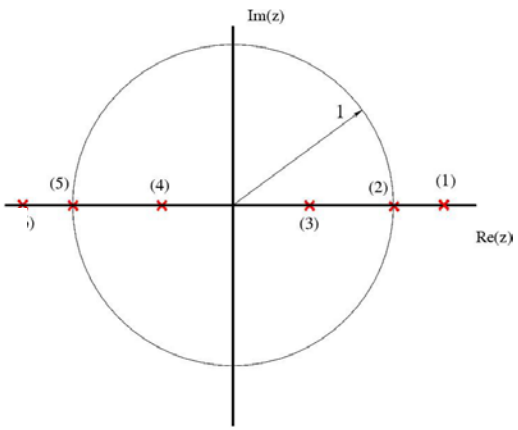
dove:

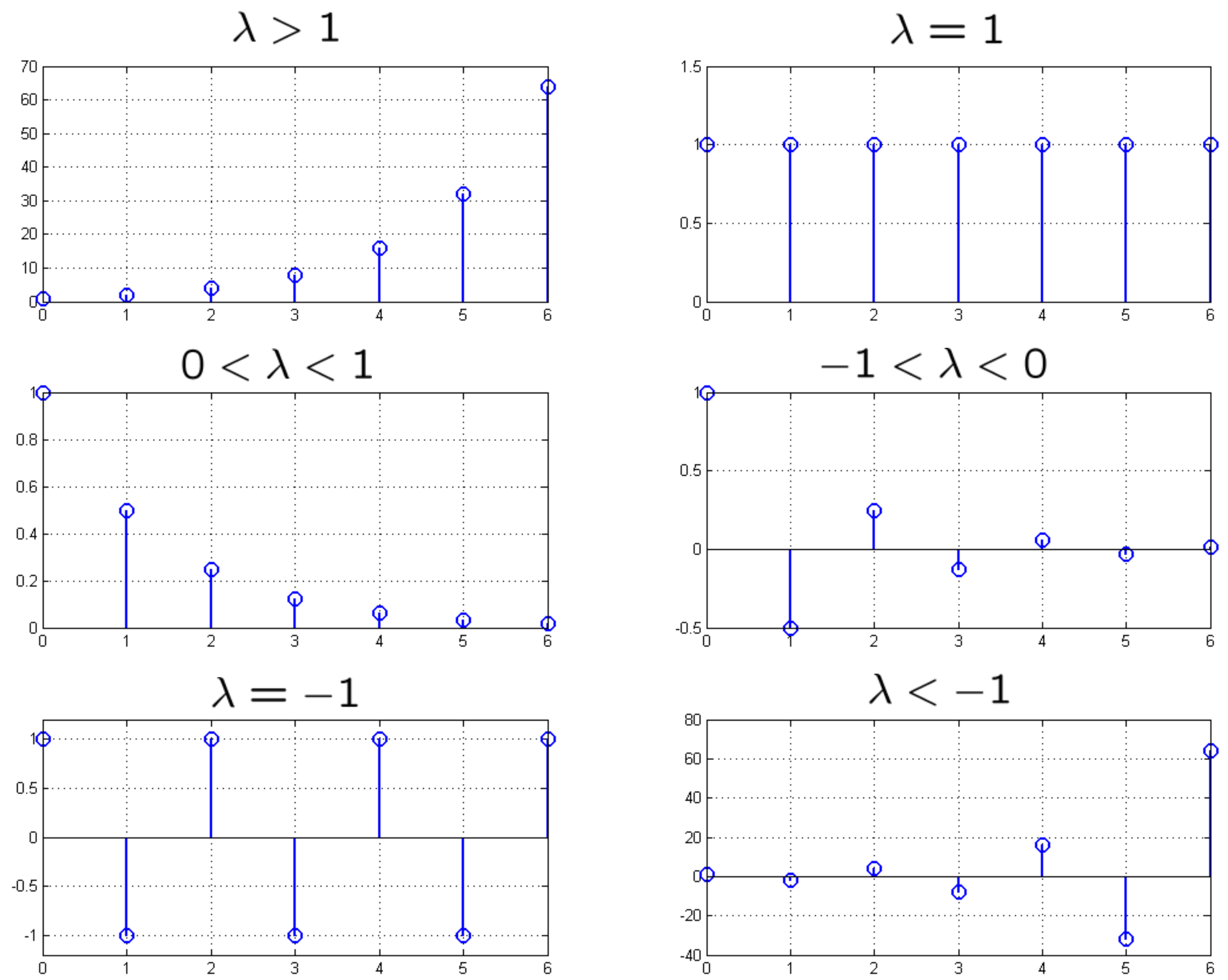
$$\lambda \in \mathbb{C}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

Studio qualitativo del termine $\binom{k}{n} \lambda^{k-n}$

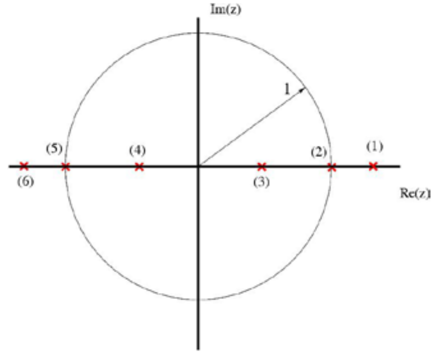
a) $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalori semplici

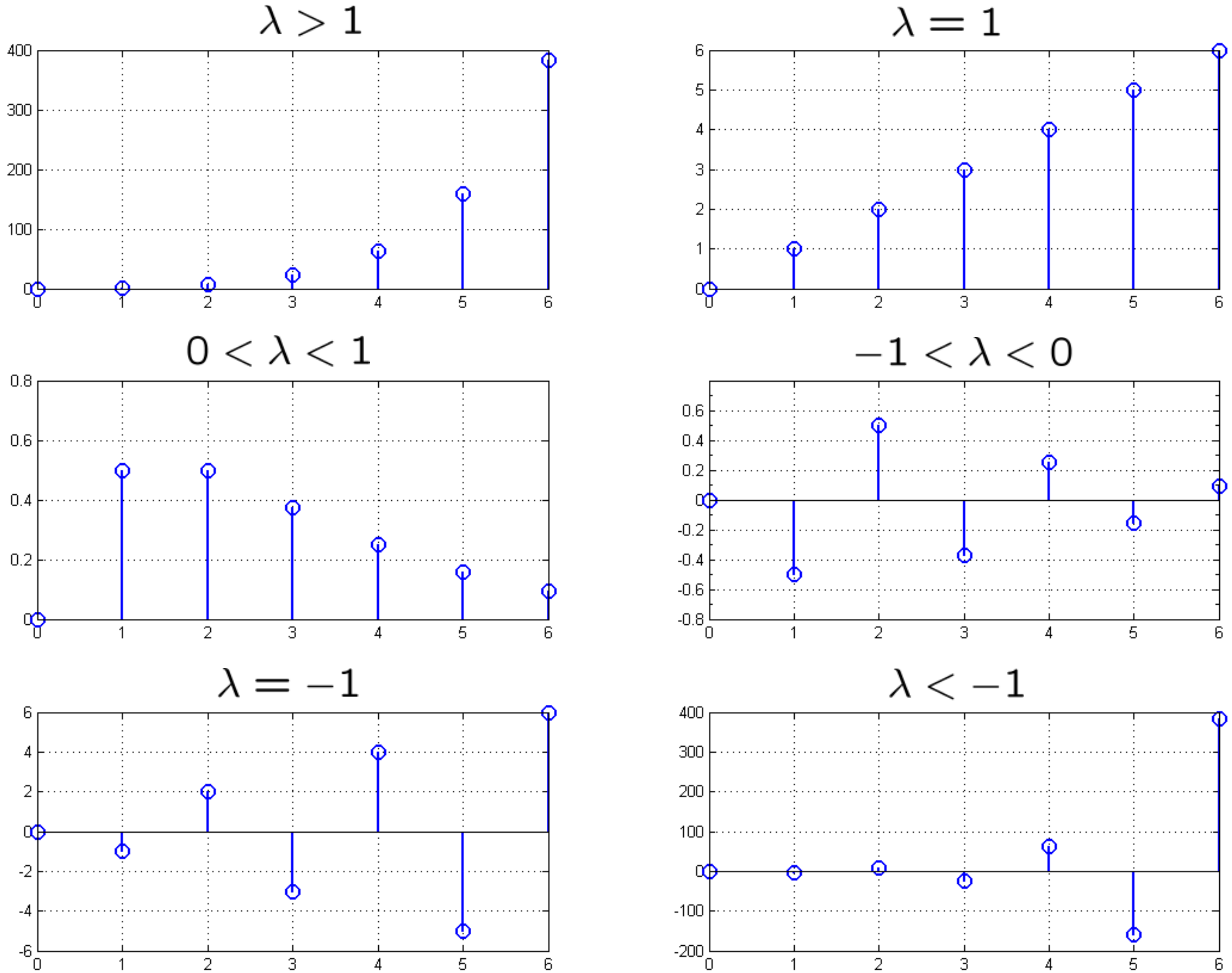




Studio qualitativo del termine $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \lambda^{k-n}$

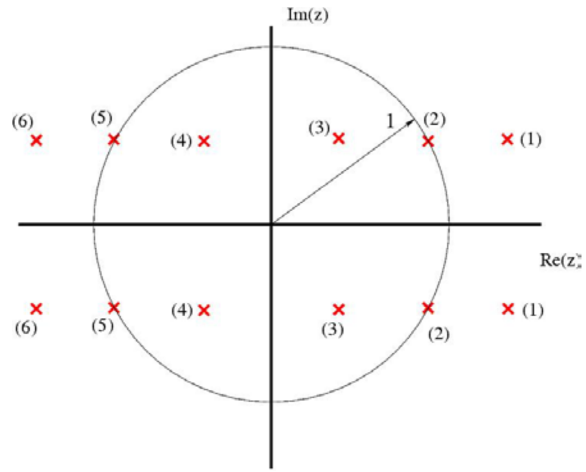
a) $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalori multipli (doppi)



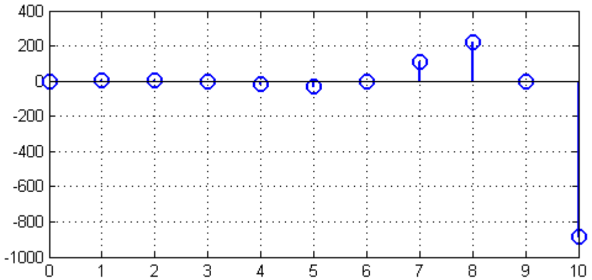


Studio qualitativo del termine $\binom{k}{n} \lambda^{k-n}$

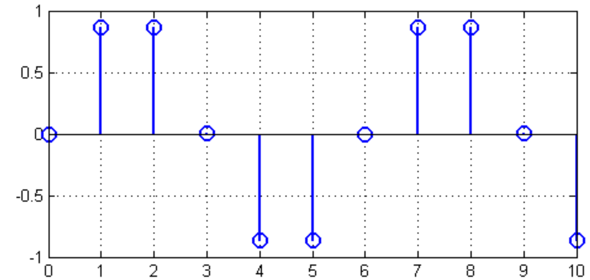
b) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ autovalori semplici



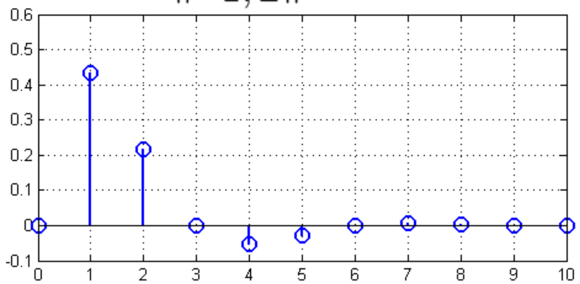
(1) $\|\lambda_{1,2}\| > 1$



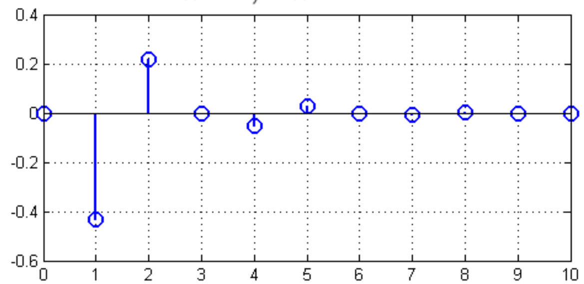
(2) $\|\lambda_{1,2}\| = 1$



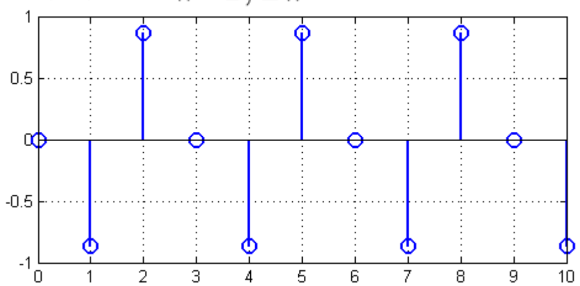
(3) $\|\lambda_{1,2}\| < 1$



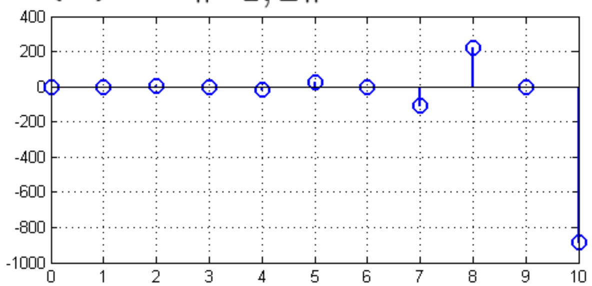
(4) $\|\lambda_{1,2}\| < 1$



(5) $\|\lambda_{1,2}\| = 1$

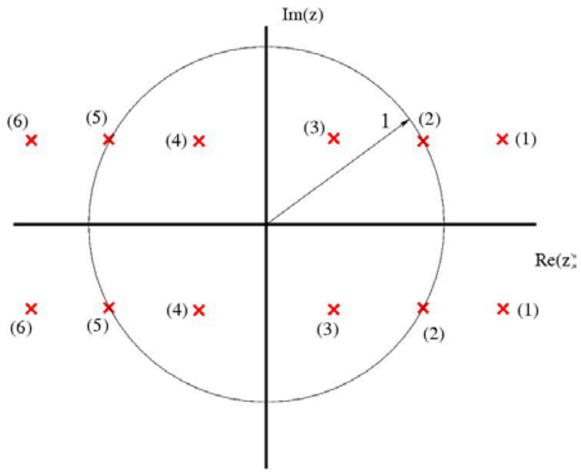


(6) $\|\lambda_{1,2}\| > 1$

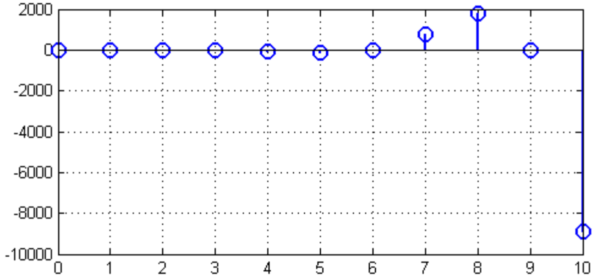


Studio qualitativo del termine $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \lambda^{k-n}$

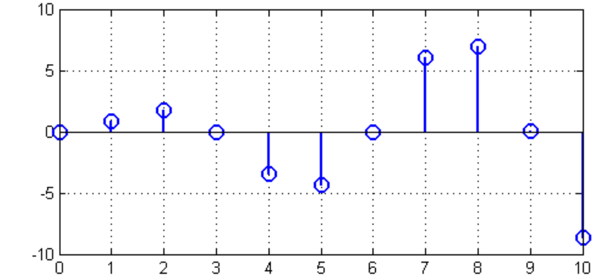
b) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ autovalori multipli (doppi)



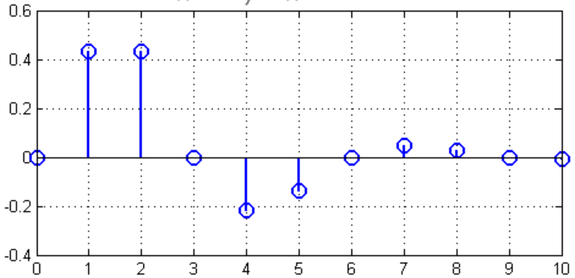
(1) $\|\lambda_{1,2}\| > 1$



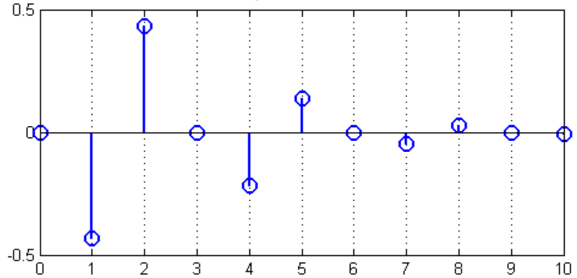
(2) $\|\lambda_{1,2}\| = 1$



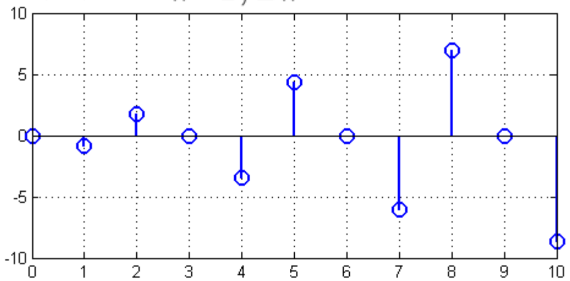
(3) $\|\lambda_{1,2}\| < 1$



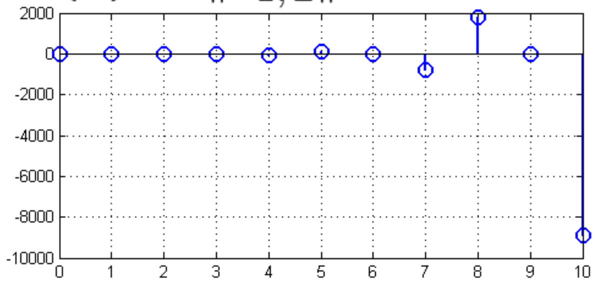
(4) $\|\lambda_{1,2}\| < 1$



(5) $\|\lambda_{1,2}\| = 1$



(6) $\|\lambda_{1,2}\| > 1$



Quindi si dimostrano i seguenti:

Teorema 1D

$$|\lambda_i| < 1,\ \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad \text{stabilità asintotica}$$

Teorema 2D

$$\exists\, i : |\lambda_i| > 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{instabilità}$$

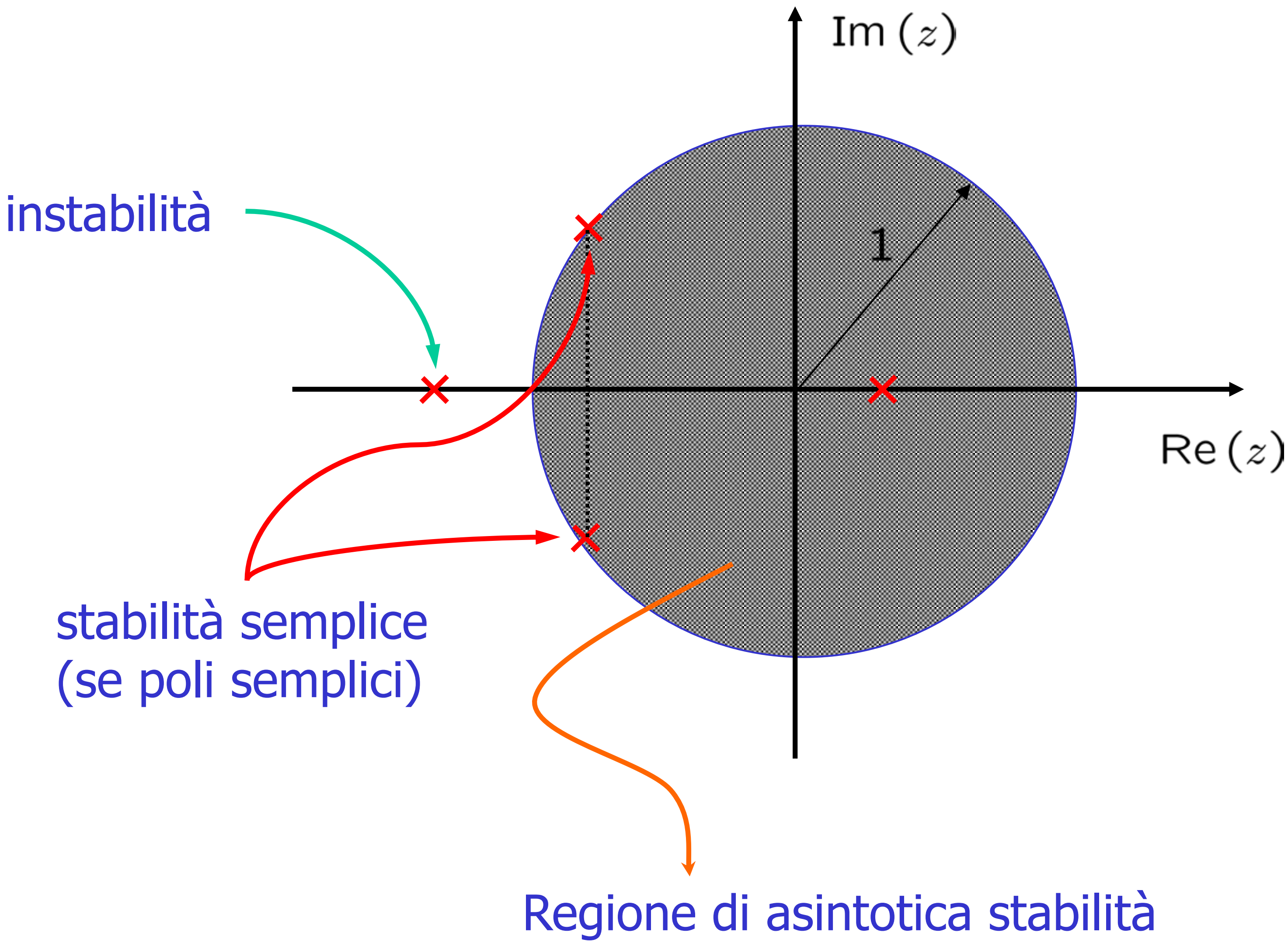
Caso critico:

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda_i| \leq 1,\ \forall i \\ \exists\, j : |\lambda_j| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ non asintoticamente stabile

- autovalori con $|\lambda_i| = 1$ distinti $\Rightarrow$ Stabile ma non asintoticamente

- autovalori con $|\lambda_i| = 1$ multipli **?**
  - Stabile ma non asintoticamente
  - Instabile

Rappresentazione grafica:



Altri criteri di stabilità a tempo discreto

Criteri che non richiedono il calcolo degli autovalori:

- basati sullo studio del polinomio caratteristico

$$p(z) = \det(zI - A) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n$$

$$\varphi_0 \neq 0$$

- Criterio 1

asintotica stabilità $\Rightarrow$ $|\varphi_n| < |\varphi_0|$

Condizione necessaria per la stabilità asintotica è che ...

- Criterio 2

asintotica stabilità $\Rightarrow$ $\varphi_0 \cdot p(1) = \varphi_0 \left[\sum_{i=0}^{n} \varphi_i \right] > 0$

Condizione necessaria per la stabilità asintotica è che il polinomio caratteristico valutato per $\lambda=1$ sia concorde con φ_0

- Criterio 3

asintotica stabilità $\Rightarrow$ $$(-1)^n \, \varphi_0 \cdot p(-1) > 0$$

Condizione necessaria per la stabilità asintotica è che il polinomio caratteristico valutato per λ=-1 sia concorde con φ_0 per n pari, discorde per n dispari.

- Criterio 4

$$\varphi_0 > \varphi_1 > \varphi_2 > \cdots > \varphi_{n-1} > \varphi_n > 0$$

$\Rightarrow$ asintotica stabilità

Condizione sufficiente per la stabilità asintotica è che …

- Criterio 5

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i| < |\varphi_0|$$

$\Rightarrow$ asintotica stabilità

Condizione sufficiente per la stabilità asintotica è che …

Esempi

$$\varphi(z) = z^3 + 4z^2 - 0.81z - 3.24$$

non asintoticamente stabile (criteri 1, 3)

$$z_1 = 0.9, \quad z_2 = -0.9, \quad z_3 = -4$$

$$\varphi(z) = z^3 + 0.6z^2 + 0.11z + 0.006$$

asintoticamente stabile (criteri 4, 5)

$$z_1 = -0.1, \quad z_2 = -0.2, \quad z_3 = -0.3$$

$$\varphi(z) = 8z^3 + 12z^2 + 6z + 1$$

???

Nessun criterio ci permette di stabilire se il sistema sia asintoticamente stabile o meno.

$$z_{1,2,3} = -0.5$$

Trasformazione bilineare e criterio di Routh-Hurwitz

$$p(z) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n$$

Lo studio della stabilità analizzando il polinomio caratteristico p(z) non è agevole!

Con una opportuna **trasformazione di variabile**, si può ottenere un polinomio differente, da analizzare in modo molto più agevole, tramite il **criterio di Routh-Hurwitz**.

La trasformazione è tale da garantire che i **risultati sulla stabilità** ottenuti analizzando il polinomio trasformato **valgono** anche per il polinomio caratteristico **originario**.

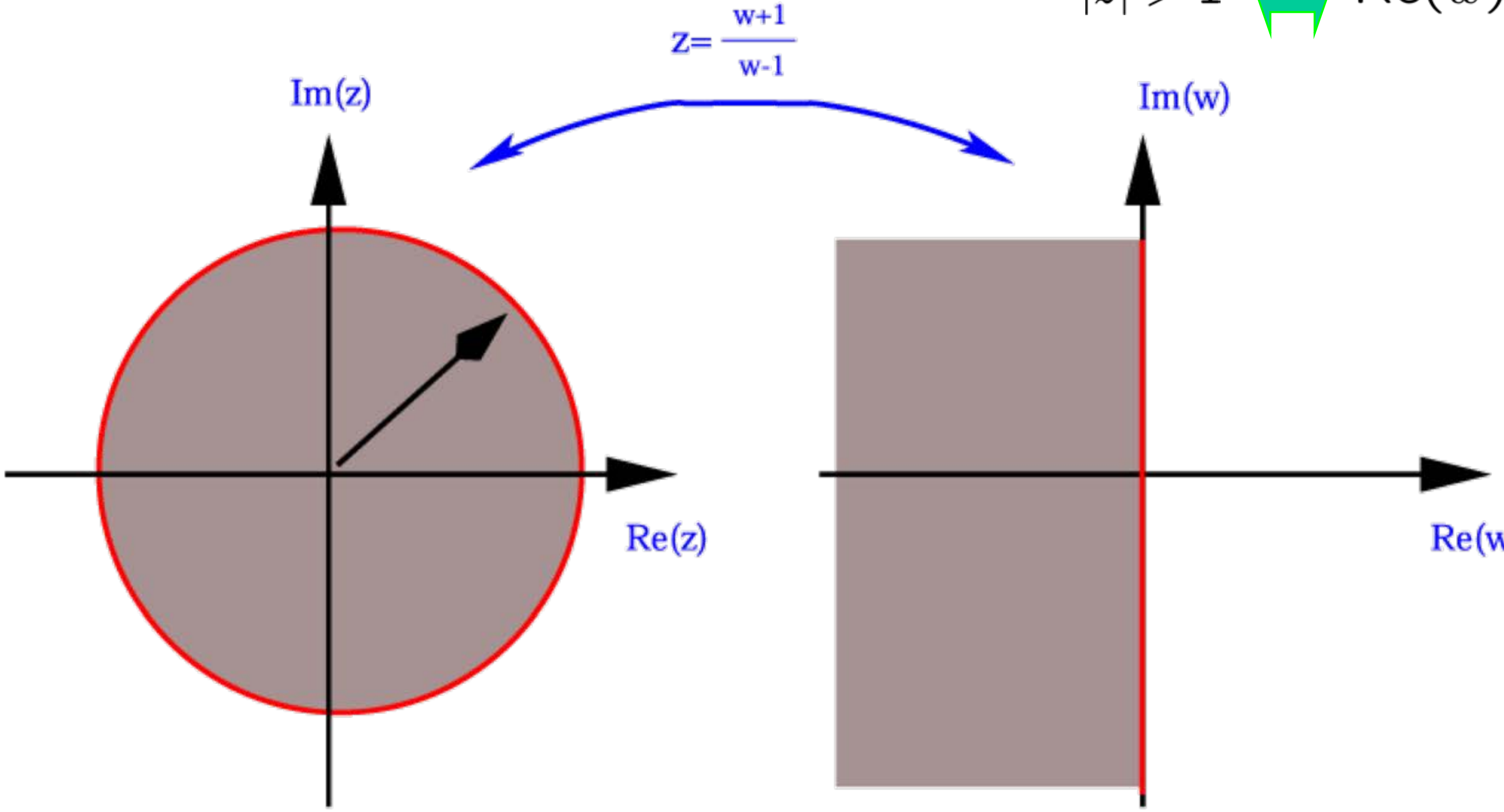
Trasformazione bilineare

$$z = \frac{w+1}{w-1}, \; z, w \in \mathbb{C}$$

$|z| < 1 \iff \mathrm{Re}(w) < 0$

$|z| = 1 \iff \mathrm{Re}(w) = 0$

$|z| > 1 \iff \mathrm{Re}(w) > 0$



Trasformazione bilineare

$$z = \frac{w+1}{w-1}, \; z, w \in \mathbb{C}$$

$$p(z) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n$$

$$q(w) = (w-1)^n \left[\varphi_0 \frac{(w+1)^n}{(w-1)^n} + \varphi_1 \frac{(w+1)^{n-1}}{(w-1)^{n-1}} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \varphi_{n-1} \frac{(w+1)}{(w-1)} + \varphi_n \right]$$

$$q(w) = q_0 \, w^n + q_1 \, w^{n-1} + \cdots + q_{n-1} \, w + q_n$$

Trasformazione bilineare

La **sostituzione diretta non** è un metodo **efficiente** per ottenere il polinomio trasformato!

Algoritmo efficiente:

M. Policastro "*A simple algorithm to perform the bilinear transformation*", Int. Journal of Control, vol. 30, n. 4, 1979

Descrizione dell'algoritmo:

FA Esercitazioni – Algoritmi utili: la trasformazione bilineare

Alcuni esempi

(1) Studiare la stabilità del sistema con equazione caratteristica

$$p(z) \;=\; z^3 + 2\,z^2 + z + 1$$

L'applicazione della formula della trasformazione bilineare porta al polinomio

$$q(w) \;=\; (w-1)^3 \left[\frac{(w+1)^3}{(w-1)^3} + 2\,\frac{(w+1)^2}{(w-1)^2} + \frac{w+1}{w-1} + 1 \right]$$

$$q(w) \;=\; 5\,w^3 + w^2 + 3\,w - 1$$

$$q(w) = 5w^3 + w^2 + 3w - 1$$

A questo polinomio è ora possibile applicare il criterio di Routh—Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & \\ 0 & \boxed{-1} & \end{array}$$

Dall'analisi dei termini nella prima colonna della tabella di Routh risulta che il **polinomio** $q(w)$ risulta **instabile**: c'è una variazione di segno nello schema. Una radice di $q(w)$ è a parte reale positiva. Ciò significa che anche il **polinomio originario** $p(z)$ risulta associato ad un sistema dinamico **instabile** e che, in particolare, esiste una radice con modulo maggiore dell'unità.

(2) Studiare la stabilità del sistema con equazione caratteristica

$$p(z) \;=\; z^4 + 1.4\, z^3 + 0.71\, z^2 + 0.154\, z + 0.012$$

L'applicazione della formula della trasformazione bilineare porta al polinomio

$$q(w) \;=\; (w-1)^4 \left[\frac{(w+1)^4}{(w-1)^4} + 1.4\, \frac{(w+1)^3}{(w-1)^3} + 0.71\, \frac{(w+1)^2}{(w-1)^2} + 0.154\, \frac{w+1}{w-1} + 0.012 \right]$$

$$q(w) \;=\; 3.276\, w^4 + 6.444\, w^3 + 4.652\, w^2 + 1.460\, w + 0.168$$

$$q(w) = 3.276\,w^4 + 6.444\,w^3 + 4.652\,w^2 + 1.460\,w + 0.168$$

A questo polinomio è ora possibile applicare il criterio di Routh—Hurwitz

4	3.276	4.652	0.168
3	6.444	1.460	
2	3.9098	0.168	
1	1.1831		
0	0.168		

Dall'analisi dei temimi nella prima colonna della tabella di Routh risulta che il **polinomio** $q(w)$ risulta **stabile**: c'è permanenza di segno nella prima colonna della tabella. Le radici di $q(w)$ sono tutte a parte reale negativa. Ciò significa che anche il **polinomio originario** $p(z)$ risulta associato ad un sistema dinamico **stabile**.

(3) Studiare la stabilità del sistema con equazione caratteristica

$$p(z) = z^2 + a\,z + b = 0$$

al variare dei parametri $a\,,\ b \in \mathbb{R}$

L'applicazione della formula della trasformazione bilineare porta al polinomio

$$q(w) = (w-1)^2 \left[\frac{(w+1)^2}{(w-1)^2} + a\,\frac{(w+1)}{(w-1)} + b \right]$$

$$q(w) = (1+b+a)\,w^2 + 2\,(1-b)\,w - a + 1 + b$$

$$q(w) \;=\; (1+b+a)\,w^2 + 2\,(1-b)\,w - a + 1 + b$$

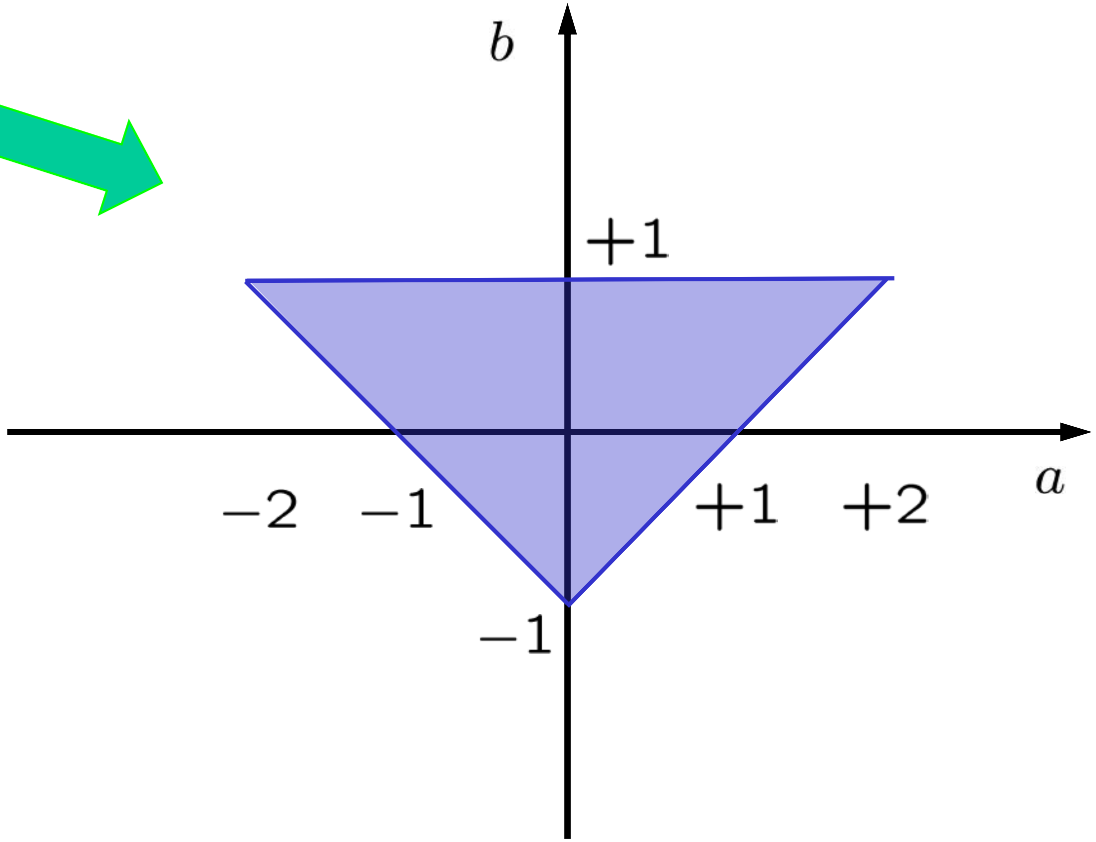
Calcolando la tabella di Routh si ottiene a questo punto

$$\begin{array}{c|cc} 2 & (1+b+a) & (1+b-a) \\ 1 & 2(1-b) & \\ 0 & (1+b-a) & \end{array}$$

Imponendo permanenza di segno agli elementi in prima colonna si arriva a

$$\begin{cases} 1+b+a & > & 0 \\ 2\,(1-b\,) & > & 0 \\ 1+b-a & > & 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} b & > & -a-1 \\ b & < & 1 \\ b & > & a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b & > & -a-1 \\ b & < & 1 \\ b & > & a-1 \end{cases}$$



(4) Analizzare la stabilità al variare del parametro K del sistema a tempo discreto con equazione caratteristica

$$z^2 + (K - 1.8)\,z + (0.8 - 0.5\,K) \;=\; 0$$

con $K \in \mathbb{R}$

L'applicazione della formula della trasformazione bilineare porta al polinomio

$$q(w) \;=\; (w-1)^2 \left[\frac{(w+1)^2}{(w-1)^2} + (K - 1.8)\,\frac{(w+1)}{(w-1)} + (0.8 - 0.5\,K)\right]$$

$$q(w) \;=\; \frac{1}{2} K\, w^2 + \left(\frac{2}{5} + K\right) w + \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2} K\right)$$

$$q(w) \;=\; \frac{1}{2}K\,w^2 + \left(\frac{2}{5} + K\right)\,w + \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2}K\right)$$

La tabella di Routh per questo polinomio vale

$$\begin{array}{c|cc} 2 & \boxed{\frac{1}{2}K} & \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2}K\right) \\ 1 & \left(\frac{2}{5} + K\right) & \\ 0 & \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2}K\right) & \end{array}$$

Imponendo permanenza di segno agli elementi in prima colonna si arriva a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}K & > \; 0 \\ \left(\frac{2}{5} + K\right) & > \; 0 \\ \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2}K\right) & > \; 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}K & > & 0 \\ \left(\frac{2}{5}+K\right) & > & 0 \\ \left(\frac{18}{5}-\frac{3}{2}K\right) & > & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K & > & 0 \\ K & > & -\frac{2}{5} \\ K & < & \frac{12}{5} \end{cases}$$

$$0 \; < \; K \; < \; \frac{12}{5}$$

Per avere asintotica stabilità

Trasformazione bilineare e criterio di Routh-Hurwitz: conclusioni

- È il metodo che **fornisce tutte le informazioni possibili** a riguardo della posizione delle radici di un polinomio caratteristico di un sistema dinamico a tempo discreto (**vantaggio**).

- Nel caso in cui la **stabilità** del sistema dinamico a tempo discreto dipenda da **parametri** (qualche coefficiente del polinomio caratteristico è funzione di parametri) è il **metodo da preferire** (**vantaggio**).

- È computazionalmente **oneroso** (**svantaggio**). Esiste un algoritmo efficiente per eseguire la trasformazione bilineare (vedi FA Esercitazioni – Algoritmi utili: la trasformazione bilineare).

Stabilità dell'equilibrio nei sistemi non lineari

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases}$$

$$x = f(x, \bar{u}) \rightarrow \bar{x}$$

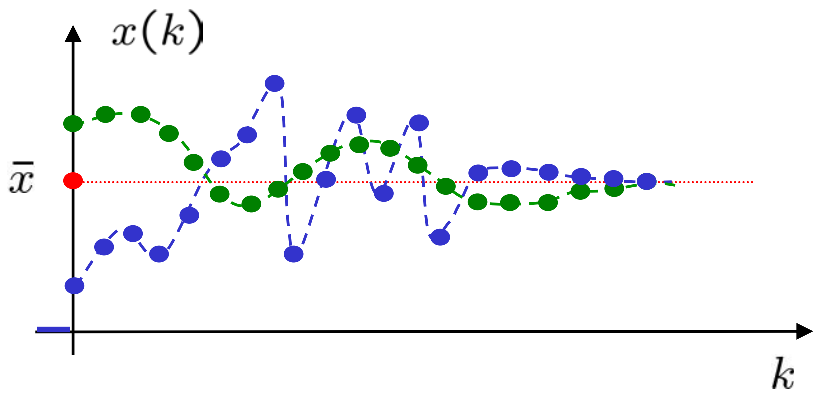
Stato d'equilibrio $\bar{x}$ associato all' ingresso $\bar{u}$

Perturbazione dello stato iniziale (di equilibrio):

$$u(k) = \bar{u}, k \geq 0$$
$$x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x}$$

$$\rightarrow \quad x(k) \neq \bar{x}, k \geq 0$$

Movimento perturbato dello stato



Stabilità dell'equilibrio nei sistemi non lineari

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases}$$

$$x = f(x, \bar{u}) \quad \bar{u} \Rightarrow \bar{x}$$

$$\delta x(k+1) = \underbrace{f_x(\bar{x}, \bar{u})}_{A}\delta x(k) + \underbrace{f_u(\bar{x}, \bar{u})}_{B}\delta u(k)$$

$$\delta y(k) = \underbrace{g_x(\bar{x}, \bar{u})}_{C}\delta x(k) + \underbrace{g_u(\bar{x}, \bar{u})}_{D}\delta u(k)$$

$$\begin{cases} \delta x(k+1) = A\delta x(k) + B\delta u(k) \\ \delta y(k) = C\delta x(k) + D\delta u(k) \end{cases}$$

$$\delta x \in \mathbb{R}^n \qquad \delta u \in \mathbb{R}^m \qquad \delta y \in \mathbb{R}^p$$

$\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$

autovalori di

$A = f_x(\bar{x}, \bar{u})$

Si dimostrano i seguenti:

Teorema 1

$|\lambda_i| < 1,\ \forall i \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$ Stato di eq. asintoticamente stabile

Teorema 2

$\exists\, i : |\lambda_i| > 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$ Stato di eq. instabile

Caso critico:

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda_i| \leq 1, \; \forall i \\ \exists\, i : |\lambda_i| = 1 \end{array}\right\} \; ?$$

$\bar{x}$ stato di eq. asintoticamente stabile

$\bar{x}$ stato di eq. stabile

$\bar{x}$ stato di eq. instabile

Esempio

Consideriamo ancora il sistema SISO non lineare

$$
\begin{cases}
x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha(1-\beta x_1(k))x_1(k) + \\
\qquad\qquad -\gamma x_1(k)x_2(k) + u(k) \\
x_2(k+1) = x_2(k) - \delta x_2(k) + \eta x_1(k)x_2(k) \\
\\
y(k) = x_2(k)
\end{cases}
$$

$$\bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{\eta} \\ \dfrac{\alpha}{\gamma}\left(1 - \dfrac{\beta\delta}{\eta}\right) \end{bmatrix}$$

Determiniamo le espressioni dei sistemi linearizzati in corrispondenza dell'ingresso e degli stato d'equilibrio considerati.

Quindi:

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array}\right]_{\bar{x},\bar{u}} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} (1+\alpha-2\alpha\beta x_1-\gamma x_2) & -\gamma x_1 \\ \eta x_2 & 1-\delta+\eta x_1 \end{array}\right]_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$\bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A}_{(1)} = \begin{bmatrix} (1+\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\delta \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{A}_{(2)} = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & -\frac{\gamma}{\beta} \\ 0 & 1-\delta+\frac{\eta}{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha}{\gamma}\left(1-\frac{\beta\delta}{\eta}\right) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{(3)} = \begin{bmatrix} \left(1-\frac{\alpha\beta\delta}{\eta}\right) & -\frac{\gamma\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha\eta}{\gamma}\left(1-\frac{\beta\delta}{\eta}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{(1)} = \begin{bmatrix} (1+\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\delta \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1+\alpha \quad \lambda_2 = 1-\delta$$

Per $\alpha > 0$ certamente stato d' equilibrio instabile

Per $\delta > 2$ è certamente stato d' equilibrio instabile

$$\bar{A}_{(2)} = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & -\frac{\gamma}{\beta} \\ 0 & 1-\delta+\frac{\eta}{\beta} \end{bmatrix}$$

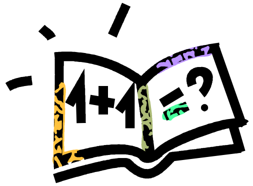
Per $\alpha > 2$ è certamente stato d' equilibrio instabile

$\frac{\eta}{\beta} > \delta$ oppure

$2 + \frac{\eta}{\beta} < \delta$

ed è certamente stato d' equilibrio instabile

Esercizio “per casa”



Analizzare la stabilità del terzo stato d’equilibrio dell’esempio:

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{\eta} \\ \dfrac{\alpha}{\gamma}\left(1 - \dfrac{\beta\delta}{\eta}\right) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{(3)} = \begin{bmatrix} \left(1 - \dfrac{\alpha\beta\delta}{\eta}\right) & -\dfrac{\gamma\delta}{\eta} \\ \dfrac{\alpha\eta}{\gamma}\left(1 - \dfrac{\beta\delta}{\eta}\right) & 1 \end{bmatrix}$$