Consideriamo una funzione

$$I : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$$

Scriviamo la seguente eq

$$I(\bar{x}) = \rho \qquad \text{dove } \rho \text{ cost. reale} \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^l$$

$\downarrow$

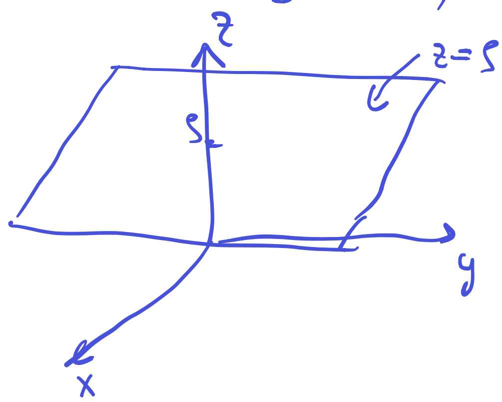
Le soluz. di questa eq. appartengono a un SOTTOINSIEME di $\mathbb{R}^l$ $\rightsquigarrow$ un' IPERSUPERFICE

ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) \equiv x^2 + y^2 + z^2$

eq. $I(\bar{x}) = R^2 \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \rightsquigarrow$ SFERA

ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) = z$

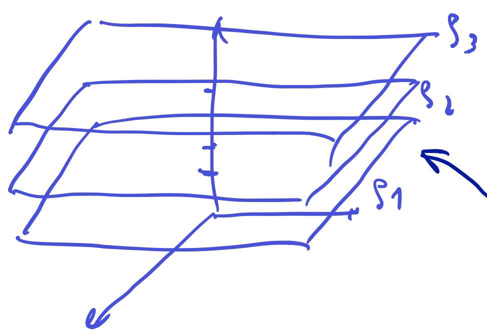
eq. $I(\bar{x}) = \rho \rightsquigarrow z = \rho$



Al variare del parametro ρ, ho una FAMIGLIA di IPERSUPERFICI (disgiunte) che costituisce una FOLIAZIONE (stratificazione) di $\mathbb{R}^l$

l'unione di tutte le ipersuperfici è $\mathbb{R}^l$ stesso.

ES)



$I(\bar{x}) \equiv z$

"insiemi di livello"

Sia I una COSTANTE del MOTO per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

cioè una funz. $I : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ con

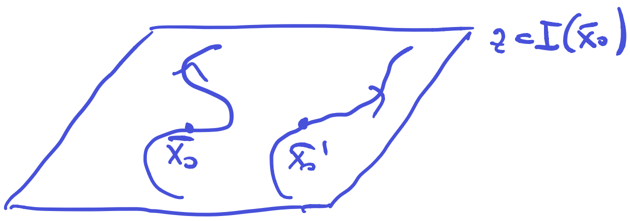
$I(\bar{x}(t)) = I(\bar{x}_0)$ ovvero $\frac{d}{dt} I(\bar{x}(t)) = 0$

$\forall t$ e $\forall \bar{x}(t)$ soluz. di $(*)$

$\Rightarrow$ Tutti i pti di una traiettoria che risolve $(*)$ giacciono su un'ipersuperficie, in qto caso

$$I(\bar{x}) = I(\bar{x}_0)$$

ES) Immaginiamo che $I(\bar{x}) = z$ sia cost. del moto per $(*)$



$\to$ le traiettorie giacciono su un piano (parallelo al piano xy) $\Rightarrow$ si può ridurre il problema da tridimensionale a un probl. piano.

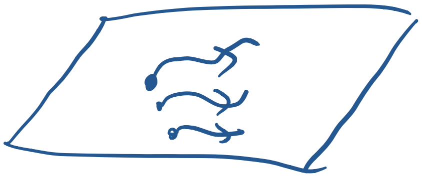
$\Rightarrow$ le cost. del moto permettono di ridurre il problema originario (cioè risolvere $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ in $\mathbb{R}^\ell$) a un problema con un MINOR NUMERO di VARIABILI e di EQ. DIFF.

Servono dei criteri per individuare le cost. del moto prima di risolvere le eq. $(*)$.

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^\ell$ si dice INVARIANTE per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ se il suo evoluto $\varphi^t(A)$ coincide con A $\forall t$

Se $\exists$ cost. del moto I, allora l'isosup. $I(\bar{x}) = \rho$ è un insieme invariante

ES.



$\forall \bar{x} \in A \quad \varphi^t(\bar{x}) \in A$

ES.) osc. ARM. $\mathbb{R}^\ell \equiv \mathbb{R}^2$ con coor. (x, v)
$\omega = 1$, $m = 1$

$x(t) = x_0 \cos t + v_0 \operatorname{sen} t$

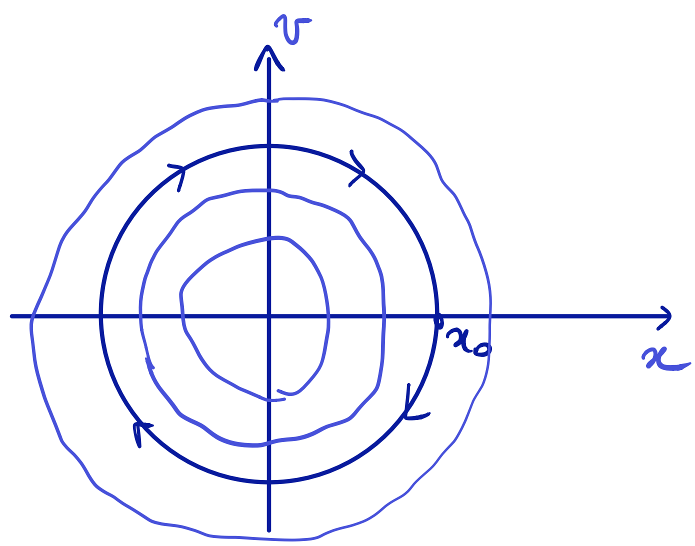
$v(t) = -x_0 \operatorname{sen} t + v_0 \cos t$

Prendiamo come dato iniz. $(x_0, 0)$ (cioè $v_0 = 0$)

$x(t) = x_0 \cos t$

$v(t) = -x_0 \operatorname{sen} t$

descrizione parametrica di una circonf. di raggio x_0



Cost. del moto $I(x, v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} x^2$

Insiemi di livello sono $I(x, v) = I(x_0, v_0)$
cioè le "sup." $v^2 + x^2 = x_0^2$

ES. DI COST. del MOTO:

ENERGIA in sist. meccanici a 1 grado di libertà, autonomi e con forze puramente posizionali:

$$f(x,v) = f(x) \qquad f = \frac{F}{m}$$

$\Downarrow$

$\exists$ una primitiva di F $\quad (\ F = -\nabla V\ )$

$\exists V(x)$ t.c. $F = -V'$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = V'(x) \qquad \frac{\partial E}{\partial v} = mv$$

$$\ddot{x} = f(x)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \quad (*)$$

$$E(x,v) = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}}$$

è una cost. del moto

solut. di eq. del moto

Dim.

$$\frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) =$$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}(x(t), v(t))\,\dot{x}(t) + \frac{\partial E}{\partial v}(x(t), v(t))\,\dot{v}(t)$$

$x(t), v(t)$ è solut. di $(*)$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}(\cdot)\,v(t) + \frac{\partial E}{\partial v}(\dots)\,f(x(t))$$

$$= V'(x(t))\,v(t) + m v(t) f(x(t)) \qquad mf = F, \quad V' = -F$$

$$= -F(x(t))\,v(t) + v(t)\,F(x(t)) = 0 \quad //$$

DERIVATA DI LIE

Data una funzione $G : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ (detta VARIABILE DINAMICA), consideriamo la derivata totale di G lungo una traiettoria $\bar{x}(t)$ che soddisfa $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

$$\frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot \dot{x}_i(t)$$

soluz. di $(*)$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot f_i(\bar{x}(t)) \quad \leftarrow \bar{\nabla} G \cdot \bar{f} \quad (dG[\bar{f}])$$

È significativo introdurre una nuova variabile dinamica

$\mathcal{L}_{\bar{f}} G : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ detta DERIVATA DI LIE di G rispetto al campo vett. $\bar{f}$

def. da

$$(\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{\ell} f_i(\bar{x}) \frac{\partial G(\bar{x})}{\partial x_i}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = (\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}(t))$$

solut. di $(*)$

Prop. $G : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ è una COST. del MOTO per $(*)$ $\iff$ $\mathcal{L}_{\bar{f}} G = 0$

Dim

$(\Leftarrow)$: $\frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = \underbrace{(\mathcal{L}_{\bar{f}} G)}_{0}(\bar{x}(t)) = 0$ //

solut. di $(*)$

$(\Rightarrow)$: $\forall \bar{x}_0$ $\exists!$ solut. $\bar{x}(t)$ che passa per esso :

$\forall \bar{x}_0$ $\quad \mathcal{L}_{\bar{f}} G(\bar{x}_0) = \mathcal{L}_{\bar{f}} G(\bar{x}(t_0)) = 0$ //

TEOREMA DI LJAPUNOV (Punti di equil.)

Se conosciamo la solut. di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ (*), possiamo dire se un pto è di equil. è stabile o no.

Ma se non siamo in grado di risolvere (*) ?

Prop. Sia $\bar{c}$ un pto di equil. per $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ in $\mathbb{R}^\ell$ (cioè $\bar{f}(\bar{c}) = 0$).

Se in un intorno U_0 di $\bar{c}$ $\exists$ una variabile dinamica $W : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ ("funz. di Ljapunov") t.c.

a) W ha un MIN. stretto in $\bar{c}$
(cioè $W(x) > W(\bar{c})$ in $U_0 \setminus \{\bar{c}\}$)

b) $\mathcal{L}_{\bar{f}} W \leq 0$ in U_0 (cioè W è non-crescente lungo ogni moto in U_0 per t crescente)
$(\geq)$ $(=)$

$\Longrightarrow$ $\bar{c}$ è un pto di equil. STABILE per tempi positivi (negativi) (per tutti i tempi)

Teor. di Ljapunov permette di ottenere informaz. sulla stabilità del pto di equil. in modo rapido, senza risolvere (*).

Corollario. Si consideri un sist. meccanico con forze puramente posizionali

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases}$$

Se l'en. potenziale $V(x)$ ha un MIN. ISOLATO in $x^* \in \mathbb{R}$, allora $\bar{c} = (x^*, 0) \in \mathbb{R}^2$ è un pto di equil. STABILE.

Dim. Se $V(x)$ ha min. stretto in x^*, allora

$$f(x^*) = -\frac{V'(x^*)}{m} = 0 \ ;$$

inoltre $E(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ ha anch'essa un min. isolato, e si trova in $\bar{z} = (x^*, 0) \Rightarrow$ a) del teor. di Ljap.

Inoltre E è una cost. del moto $\Rightarrow L_{\bar{f}} E = 0 \Rightarrow$ b) //

Il risultato del corollario si estende a tutti i sist. meccanici a più gradi di libertà per i quali si può scrivere l'en. totale come somma di $\underbrace{\text{en. cin.}}_{\text{def. positiva}}$ e en. pot.

Stabilità nel futuro persiste anche se aggiungiamo alle forze un termine dissipativo

ES. $\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu\dot{x}$ $\qquad V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x - 2\mu v \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \end{matrix}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$L_{\bar{f}} E = \frac{\partial E}{\partial x} f_1 + \frac{\partial E}{\partial v} f_2 = \cancel{m\omega^2 x} \cdot v + $$
$$+ mv \cdot (\cancel{-\omega^2 x} - 2\mu v)$$
$$= -2\mu m v^2 \leq 0$$

STUDIO ATTORNO AI PTI di EQUIL.

Linearizzazione : studio locale attorno al pto di equil., nel quale si approssima il sistema non-lineare ("difficile") con un sistema lineare ("facile")

Sistema lineare in $\mathbb{R}^l$ è un sist. di eq. diff. lineari del tipo $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ $\qquad \bar{x}$ a valori in $\mathbb{R}^l$ e A una matrice $l \times l$

Partiamo da un sistema autonomo

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \qquad \bar{x} \text{ in } \mathbb{R}^l \qquad \bar{f} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$$

A.c. $\bar{f}$ ha un pto singolare (pto equil.) in $\bar{c}$ ($\bar{f}(\bar{c})=0$)

Siccome vogliamo studiare le soluz. $\bar{x}(t)$, quando passano per pti vicini a $\bar{c}$, ci interessa il comportamento di $\bar{f}$ attorno a $\bar{c}$, cioè per $\|\bar{x}-\bar{c}\| \ll 1$

$\rightsquigarrow$ esp. di Taylor attorno a $\bar{c}$

$$f_i(\bar{x}) = \underbrace{\cancel{f_i(\bar{c})}}_{=0} + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j} (x_j - c_j) + O(\|\bar{x}-\bar{c}\|^2)$$

Attorno a $\bar{c}$ la funz. $\bar{f}$ è ben approssimata da

$$\bar{f}(\bar{x}) = A \cdot (\bar{x}-\bar{c}) \quad \text{con} \quad A_{ij} = \frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j}$$

Def. $\bar{\xi} = \bar{x} - \bar{c}$

$$\dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{x}} = A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + O(\|\bar{x} - \bar{c}\|^2) = A \cdot \bar{\xi} + O(\|\bar{\xi}\|^2)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\bar{\xi}} = A \cdot \bar{\xi} + \cancel{O(\|\bar{\xi}\|^2)}$$

trascuriamo

$\leftarrow$ eq. lineare di approssimazione del $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ per $\|\bar{x} - \bar{c}\| \ll 1$

Se il sist. autonomo viene da

$$\ddot{x} = f(x) \qquad \bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(c) & 0 \end{pmatrix}$$