STUDIO ATTORNO PTI DI EQ.

$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t))$ ← ci interessa comportamento di $\bar{x}(t)$ in prossimità di $\bar{c}$ $\left(\bar{f}(\bar{c}) = 0\right)$

$$f_i(\bar{x}) = \underbrace{f_i(\bar{c})}_{=0} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j}}_{A_{ij}} (x_j - c_j) + O(\|\bar{x}-\bar{c}\|^2)$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) = A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + \dots$$

$\bar{\xi}(t) \equiv \bar{x}(t) - \bar{c}$ soddisfa eq. lineare $\dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi} + \dots$

(risolto, otteniamo $\bar{\xi}(t) \Rightarrow \bar{x}(t) = \bar{\xi}(t) + \bar{c}$).

$\dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi}$ $(*)$ ← sistema di eq. diff. LINEARE del 1° ordine, OMOGENEA

⇓

soluzione generale sarà combinaz. lineare di ℓ soluz. particolari indipendenti

Cerchiamo solut. particolari della forma

$\bar{\xi}(t) = \rho(t) \cdot \bar{u}$ $\quad \bar{u} \in \mathbb{R}^\ell$ vett. cost. $\quad (\star)$

- ci interessano solut. non-banali ⇒ $\bar{\xi}(t)$ non si annulla mai.

(∃ solut. t.c. $\bar{\xi}(t_0) = 0$ e questa è la solut. $\bar{\xi}(t) = 0$ $\forall t$ ⇒ le altre traiettorie non possono passare per $\bar{\xi} = 0$)

- sostituiamo $(\star)$ in $(*)$:

$$\underline{\underline{\dot{\rho}(t) \cdot \bar{u}}} = A(\rho(t) \cdot \bar{u}) = \underline{\underline{\rho(t)\, A\bar{u}}}$$

l'uguaglianza è possibile solo se $\bar{u}$ e $A\bar{u}$ sono vett. paralleli $\rightsquigarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\boxed{A\bar{u} = \alpha \bar{u}}$ (o)

- $\dot{\rho}(t) = \alpha\, \rho(t) \Rightarrow \rho(t) = c\, e^{\alpha t}$ $\quad c = \rho(0)$

- (o) ci dice che $\bar{u}$ è un AUTOVETT. di A con AUTOVAL. α.

<u>Prop.</u> Eq. lin. $\dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi}$ ha soluz. particolari

$$\bar{\xi}(t) = C\, e^{\alpha t} \cdot \bar{u}$$

dove $\bar{u}$ è autov. di A con autoval. α.

Per risolvere (*!) uno deve diagonalizzare A.

Se $\exists$ una base di autovettori (A diagonalizzabile) allora posso scrivere la soluz. generale come

$$\bar{\xi}(t) = \sum_{j=1}^{\ell} C_j\, e^{\alpha_j t}\, \bar{u}_j$$

autoval. $\quad$ autovett.

SISTEMI MECCANICI UNIDIMENSIONALI (1 grado di libertà)

- $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$
- ci concentriamo su sistemi con $F = F(x)$

⇝ si conserva l'ENERGIA

$$E(x,v) = \underbrace{T(v)}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}}$$

è una cost. del moto

$$\rightarrow \quad E(x(t), v(t)) = \underbrace{E}_{\text{costante}}$$

- Le traiettorie sul piano di fase giacciono sulle curve di livello date dall'eq.

$$E(x,v) = E$$

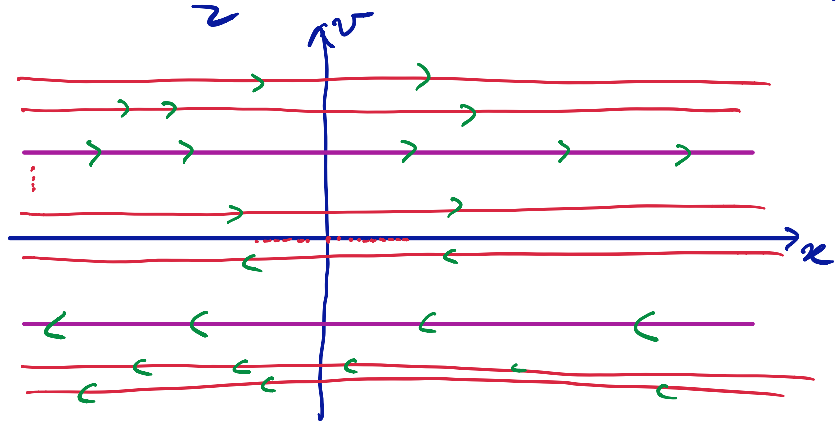
ES 1) PARTICELLA LIBERA

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$\ddot{x} = 0 \qquad E(x,v) = \frac{m v^2}{2}$

Curve di livello sono date da eq.

$$\frac{m v^2}{2} = E \quad \rightarrow \quad v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$



$v = \dot{x}$

$v > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0$

$\Rightarrow x$ cresce cost.

2) OSC. ARM.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \quad E(x,v) = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

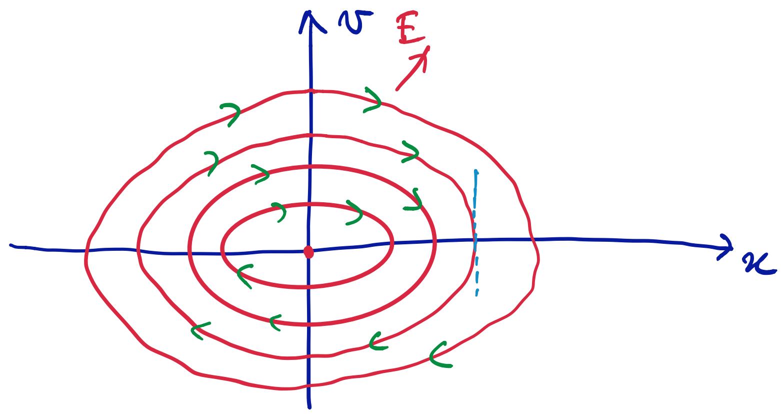
Curve di livello:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = E$$

$E \neq 0$

$$\frac{v^2}{2E/m} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \quad \leftarrow \text{ELLISSE}$$

$E = 0$ $\quad \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = 0 \rightsquigarrow (x,v) = (0,0) \rightarrow$ curva di liv. degenere (1 pto)



Traiettorie giacciono sulle curve di livello

- nel semipiano superiore le frecce vanno verso DESTRA,
  " " inferiore " " " " SINISTRA;
- traiettorie attraversano l'asse delle ascisse VERTICALMENTE (se il pto di intersez. NON è di equil.):

[Tang. a una curva $y = f(x)$ nel piano (x,y) in un pto x_0 è la retta $y = \alpha x + q$ con $\alpha = f'(x_0)$; una retta verticale ha pendenza m infinita]

La curva nel piano (x,v) avrà eq.

$$v = v(x)$$

$$\alpha = \frac{dv(x_0)}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \dot{v} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{f(x_0)}{v(x_0)} \qquad (*)$$

x_0 è il pto di attraversam. dell'asse delle ascisse

$\rightarrow$ se x_0 non è di equil. (cioè $f(x_0) \neq 0$),
allora $\alpha \rightarrow \infty$ (poichè $v(x_0) \rightarrow 0$). //

(*) $\alpha = \left.\dfrac{dv(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ $\qquad$ $v(x) = \underbrace{v}_{v(t)}(\underbrace{t(x)}_{\text{è l'inversa di } x(t)})$

Analisi qualitativa

$$E(x, v) = T(v) + V(x)$$

le curve di livello: $T(v) + V(x) = \underbrace{E}_{\text{cost.}}$

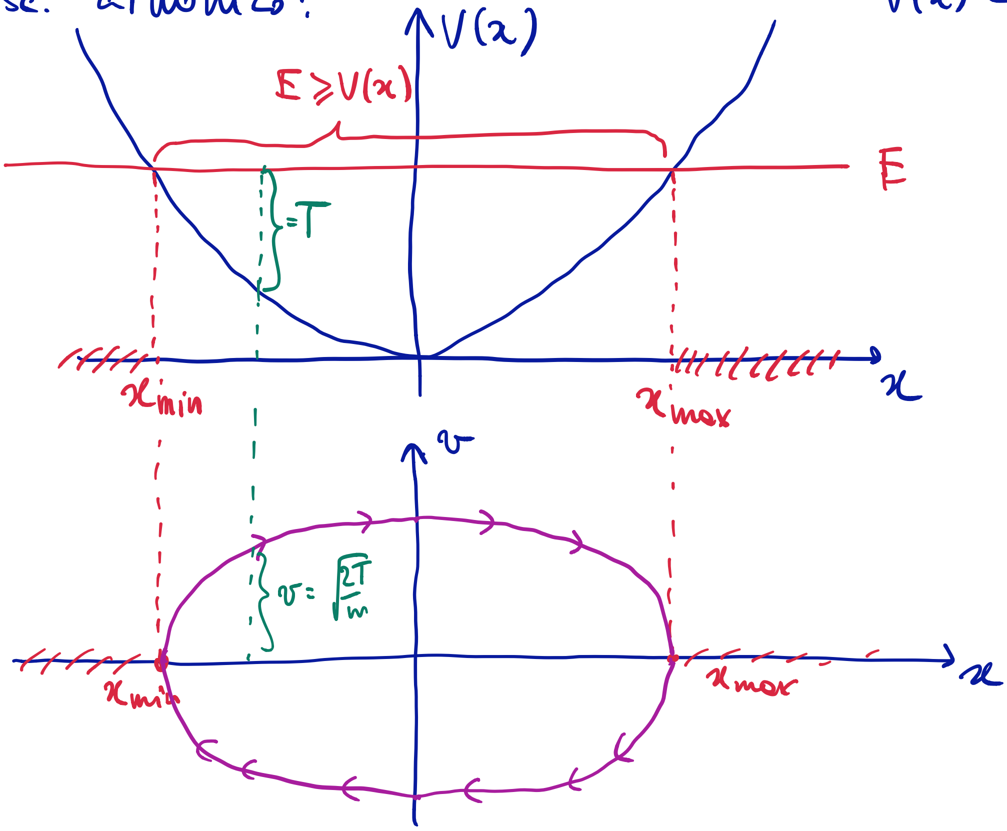
- $T(v) = \dfrac{mv^2}{2} \geq 0$

$\Downarrow$

$E - V(x) \geq 0 \qquad (\cdot)$

un pto x può stare su una curva di livello (e quindi essere un pto permesso, cioè un pto attraverso cui può passare una traiettoria) se soddisfa $(\cdot)$, cioè $V(x) \leq E$

ES. Osc. armonico: $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$



Differenza tra E e V mi dà T. Dato $T = \frac{mv^2}{2}$ ho $v = \pm\sqrt{\frac{2T}{m}}$

- $x(t) \in \{ x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq E \}$

  per osc. armonico $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \leq E \rightarrow x^2 \leq \frac{2E}{m\omega^2}$

  $\hookrightarrow x(t) \in \Big[\underbrace{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{x_{min}} , \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{x_{max}} \Big]$

- Nei pti dove $V(x) = E$ (x_{min} e x_{max} per osc. arm.)

  $\hookrightarrow T = 0 \Rightarrow v = 0$

  Tali pti sono chiamati PUNTI D'INVERSIONE.

$$\ddot{x} = f(x) = -\frac{1}{m} V'(x)$$

pti invers. $V'(x) \neq 0$

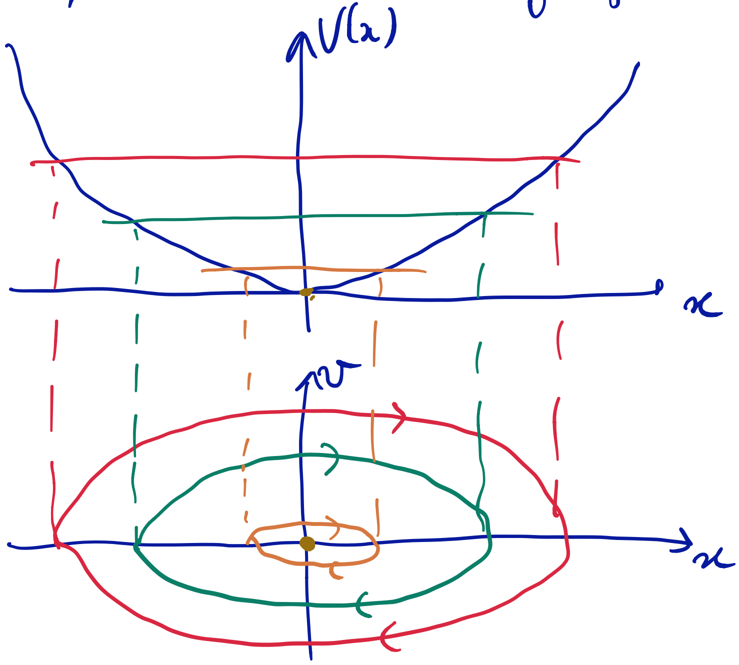
$\Rightarrow$ anche se $v = 0$ la traiettoria transita per questi pti (forza non-nulla)

- Per osc. arm.

$E>0$: il moto è dato da una curva CHIUSA

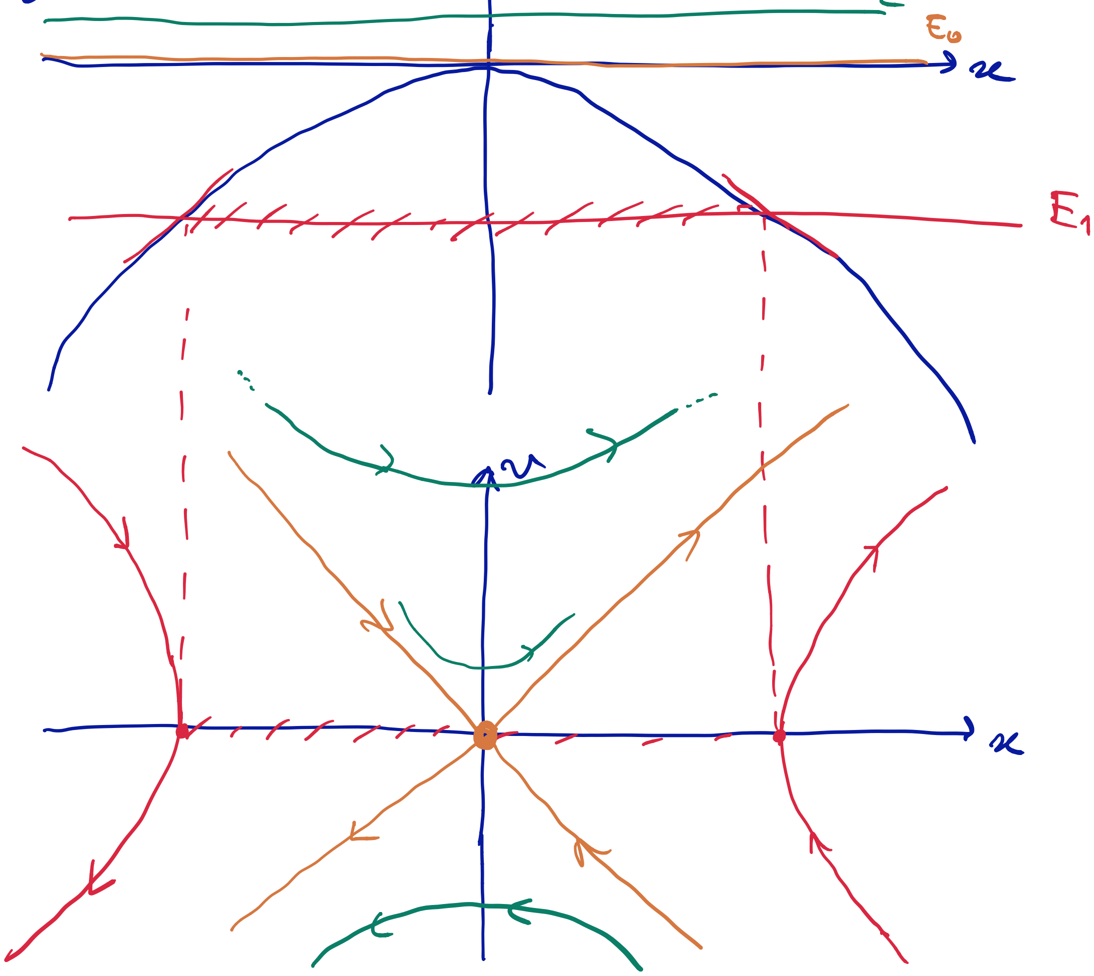
$\to$ il moto $x(t)$ è una funz. PERIODICA

$\to$ Traiettorie si possono ottenere (qualitativam.) semplicemente dal grafico di $V(x)$



$E=0$) l'unico pto per cui $V(x) \leq E$ è $x=0$ $\to$ il pto equil.

ES. REPULSORE ARM.



$V(x) = -\frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$(x,v) = (0,0)$ è pto di equil.

Notiamo delle traiettorie in $\mathbb{R}^2$ che si intersecano (non ce le aspettiamo perché il sist. è autonomo) → questo può avvenire solo per $t \to \pm\infty$

Vediamo se effettivamente le curve di livello sono qlle ricavate con l'analisi qualitativa:

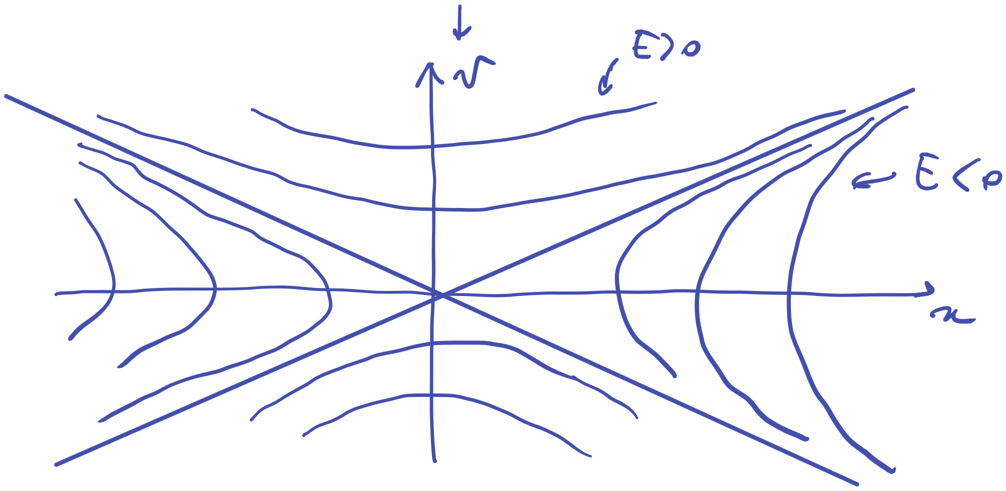
Rep. arm. $\ddot{x} = \omega^2 x$ $\qquad E(x,v) = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

Curve di livello: $\qquad E(x,v) = E \leftarrow$ cost.

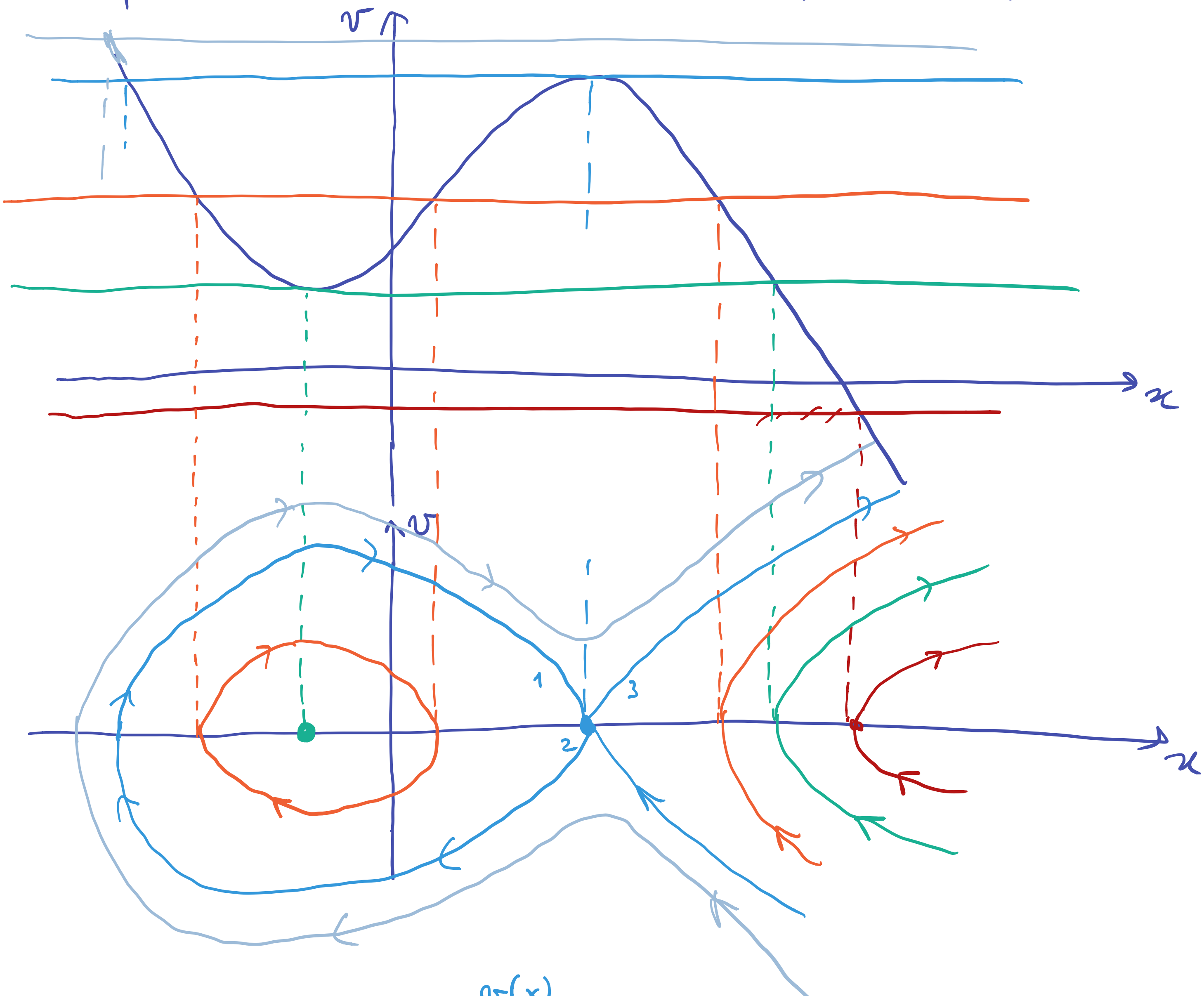
$E \neq 0 \qquad \frac{v^2}{2E/m} - \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \qquad$ IPERBOLE

$E = 0 \qquad v^2 - \omega^2 x^2 = 0$

$(v - \omega x)(v + \omega x) = 0 \to$ UNIONE di due RETTE



ES) Dato l'andam. qualitativo di $U(x)$, determinare qualitativam. le traiettorie nel piano di fase (x, v).



$$\overset{v(x)}{\frac{dv}{dx}} \sim \frac{f}{v} \longrightarrow \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

Esercizio: tracciare il diagramma di fase (a livello qualit.) relativo al potenziale