ANALISI QUANTITATIVA

$E(x,v) \equiv T(v) + V(x)$ cost. del moto

traiettorie giacciono sulle curve di livello

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = E$$

cost.

(cioè se $x(t)$ è una traiettoria, allora

$$\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + V(x(t)) = E$$)

possiamo invertirla:

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

← deve valere per ogni traiettoria

segno dip. del verso (scegliamo +) di percorrenza

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x(t))\right)}$$

← Eq diff. 1° ordine in $x(t)$

cost.

(Famiglia a 1 parametro di eq. diff. del 1° ordine) E

Qta eq. implica la seguente eq. diff. per la funzione $t(x)$ che è l'inversa di $x(t)$

$(x(t(x)) = x)$

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{\dot{x}(t(x))} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$\longrightarrow$ integrazione

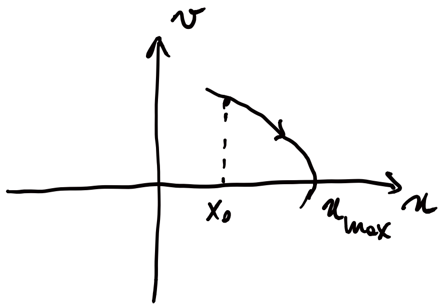
$$t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}} \qquad x_0 = x(t_0)$$

$\longrightarrow$ invertiamo

$$x(t)$$

"Risolvere l'eq. diff. originaria per QUADRATURE"

- Nei pti di inversione $V(x) = E$ e l'integrando diverge
  ⇝ cosa succede all'integrale ?



$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{x_0}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}}$$

Mi concentro sul caso $|x_{max} - x_0| \ll 1$ $\longrightarrow$

$\rightarrow$ posso espandere $V(\tilde{x})$ attorno a x_{max}

$$V(\tilde{x}) = \underbrace{V(x_{max})}_{=E} + V'(x_{max})(\tilde{x} - x_{max}) + O(|\tilde{x} - x_{max}|^2)$$

denom : $\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{V'(x_{max})}\sqrt{x_{max} - \tilde{x}}$

cambiamo variab. integraz. $\xi = x_{max} - \tilde{x}$

$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{0}^{x_{max} - x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2V'(x_{max})}{m}}\,\xi^{1/2}}$$

$\frac{1}{\xi^{1/2}}$ è integrabile in $\xi \sim 0$

$\Rightarrow$ il pto arriva in x_{max} (pto invers.) in un tempo FINITO.

- Nei pti di massimo di $V(x)$ con $E = V(c)$ $\quad$ ($x=c$)

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)}} \qquad |c - x_0| \ll 1$$

$$\rightarrow V(\tilde{x}) = \underset{\overset{\parallel}{E}}{V(c)} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{V'(c)}(\tilde{x}-c) + \frac{1}{2}V''(c)(\tilde{x}-c)^2 + \dots$$

$$V''(c) < 0$$

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{1}{m}\left(-V''(c)\right)(\hat{x}-c)^2}} = t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{c - \tilde{x}} =$$

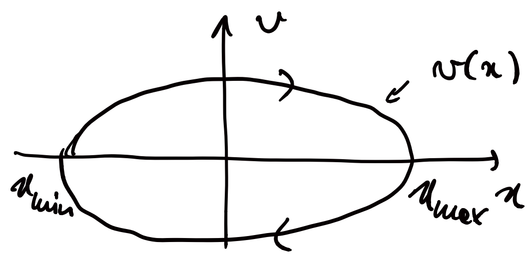
$$\underset{\xi \equiv c - \tilde{x}}{=} t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_{0}^{c-x_0} \frac{d\xi}{\xi}$$

$\frac{1}{\xi}$ non è integrabile a $\xi \sim 0$

$\Rightarrow$ INTEGRALE DIVERGE

$\Rightarrow$ il pto materiale arriva al pto di equil. (instab.) in un TEMPO INFINITO

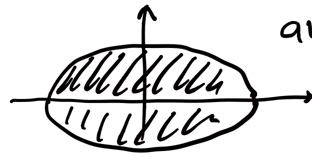
- Moti periodici



Periodo T è il tempo impiegato per andare da x_{min} a x_{max} e ritorno

$$T_E = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)}}$$

Def. $S_E = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)}\, d\tilde{x} = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} v(\tilde{x}; E)\, d\tilde{x}$



area dentro la curva

$$m \frac{dS_E}{dE} = m\, 2\, \frac{d}{dE} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}\, dx =$$

$$= 2\cancel{m} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1 \cdot \cancel{2}/\cancel{m}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}\, dx = T_E$$

$T_E = m \frac{dS_E}{dE}$ dove S_E è l'area dentro la curva chiusa nel piano di fase

ES.) osc. arm. $S_E =$ Area ellisse $= \pi \frac{2E}{m\omega}$

$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$

$v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$

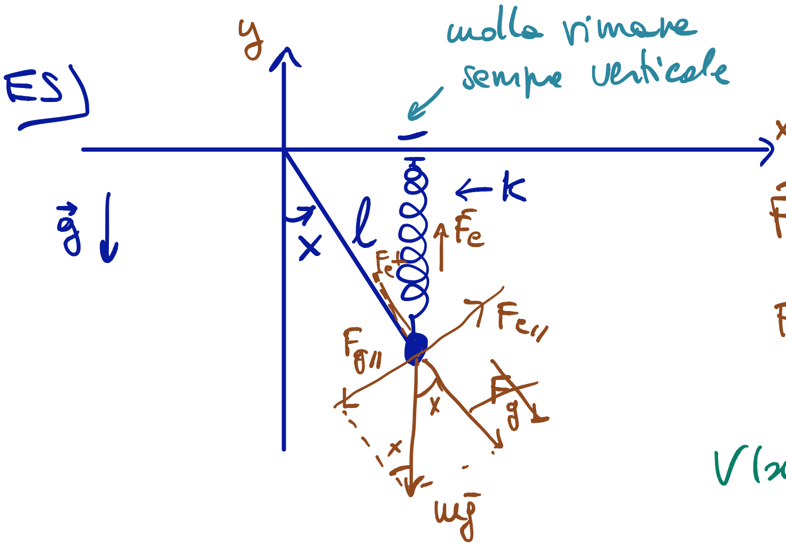
$T_E = m \frac{dS_E}{dE} = \frac{2\pi}{\omega}$

In qto caso particolare T_E non dip. da E

BIFORCAZIONI

Le eq. diff. possono dipendere da dei PARAMETRI; il comportamento qualitativo delle soluzioni può cambiare drasticam. al variare del parametro.

ES)



$F_e = K\ell\cos x\ \bar{e}_y \qquad \bar{F}_g = -mg\,\bar{e}_y$

$F_{e\parallel} = K\ell\cos x \operatorname{sen} x \qquad F_{g\parallel} = -mg \operatorname{sen} x$

$V(x) = mg\,(1-\cos x)\ell + \frac{1}{2}K\ell^2\cos^2 x$

$$m\ell\ddot{x} = -mg\operatorname{sen}x + K\ell\cos x\operatorname{sen}x$$

$$\ddot{x} = -\underbrace{\frac{g}{\ell}}_{=\omega^2}\operatorname{sen}x + \underbrace{\frac{K}{m}}_{=\Omega^2}\cos x\operatorname{sen}x \qquad \left(= -\frac{V'(x)}{m\ell}\right)$$

due parametri da cui dip. l'eq. diff.

$$\ddot{x} = -\omega^2\operatorname{sen}x + \Omega^2\cos x\operatorname{sen}x \equiv f(x) \qquad (\neq)$$

dip. da ω e Ω

Le soluz. più semplici dell'eq. $(\neq)$ sono i pti di equil., cioè i c t.c. $f(c) = 0$

$$f(x) = 0 \ : \quad \Omega^2\operatorname{sen}x\left(\cos x - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) = 0$$

$\rightarrow \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \pi \quad \leftarrow$ esistono sempre $\forall$ valore dei parametri ω, Ω.

$$C_{3,4} = \pm \arccos\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) \quad \leftarrow \text{ esistono solo se } \frac{\omega^2}{\Omega^2} \leq 1$$

$\omega^2 \leq \Omega^2 \longrightarrow$ 4 pti equil.

$\omega^2 > \Omega^2 \longrightarrow$ 2 pti equil.

Studiamo la stabilità di questi pti di equil.

$$V(x) = mg(1-\cos x)\ell + \frac{1}{2}k\ell^2\cos^2 x =$$

$$= m\ell^2\left[(1-\cos x)\omega^2 + \frac{\Omega^2}{2}\cos^2 x\right]$$

$c_1 = 0$
$c_2 = \pi$
$\cos(c_{3,4}) = \frac{\omega^2}{\Omega^2}$

$$V'(x) = m\ell^2\left[\omega^2 \operatorname{sen} x - \Omega^2 \cos x \operatorname{sen} x\right]$$

$$V''(x) = m\ell^2\left[\omega^2\cos x - \Omega^2\cos^2 x + \Omega^2\underset{\substack{\parallel \\ 1-\cos^2 x}}{\operatorname{sen}^2 x}\right] = m\ell^2\left[\omega^2\cos x - 2\Omega^2\cos^2 x + \Omega^2\right]$$

$$V''(c_1) = m\ell^2\left[\underline{\omega^2 - \Omega^2}\right]$$

$$V''(c_2) = m\ell^2\left[-\omega^2 - \Omega^2\right] < 0$$

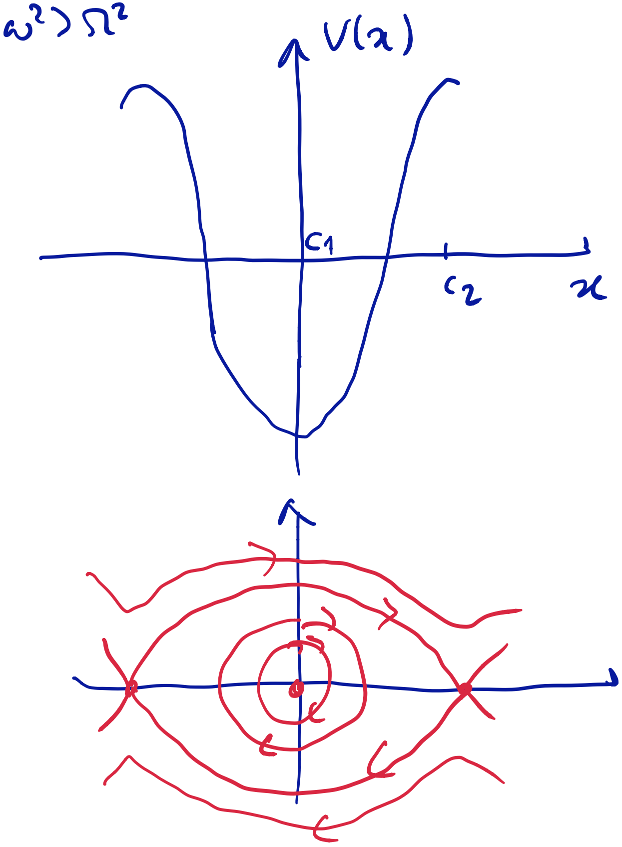
$$V''(c_{3,4}) = m\ell^2\left[\cancel{\omega^2 \frac{\omega^2}{\Omega^2}} - \cancel{2}\Omega^2\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + \Omega^2\right]$$

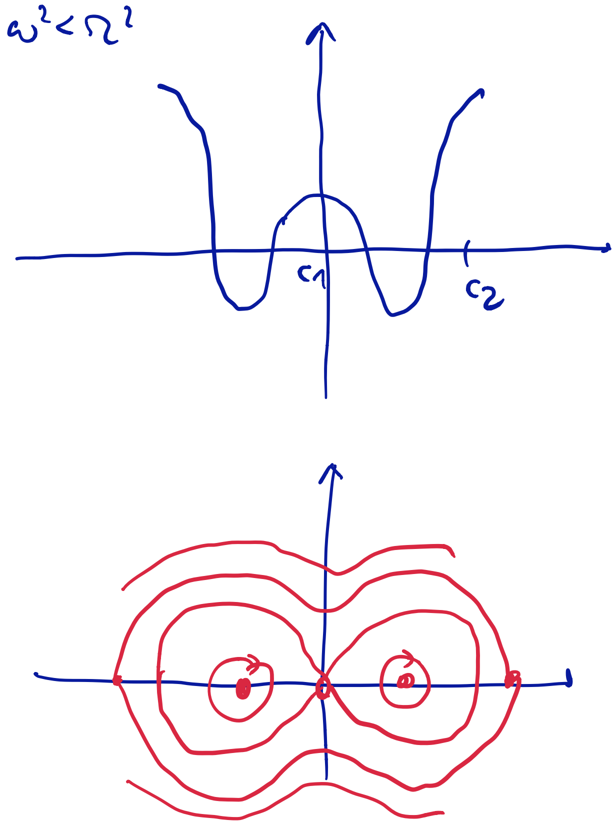
$$= m\ell^2\left[\Omega^2 - \frac{\omega^4}{\Omega^2}\right] = \frac{m\ell^2}{\Omega^2}\left[\Omega^4 - \omega^4\right] =$$

$$= \frac{m\ell^2}{\Omega^2}\left(\underline{\Omega^2 - \omega^2}\right)\left(\Omega^2 + \omega^2\right)$$

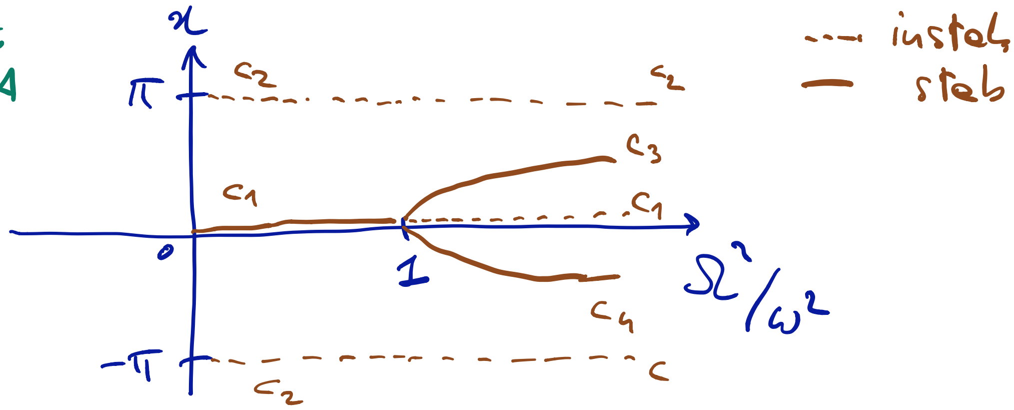
Quando $\omega^2 > \Omega^2$
c_1 è MIN ← stab.
c_2 è MAX ← instab.
$c_{3,4}$ non sono soluz.

Quando $\omega^2 < \Omega^2$
c_1 è MAX ← inst.
c_2 è MAX ← inst.
$c_{3,4}$ sono MINIMI ← stab.





BIFORCAZIONE
A FORCHETTA



Al variare del parametro, cambia il numero e il tipo di pti di equilibrio.