MECCANICA RAZIONALE

Ing. Civile & Ambientale
Navale

22 marzo 2021

Problema della statica: corpo rigido, vincolato, sistemi articolati

configurazione di un corpo rigido

→ coordinate libere

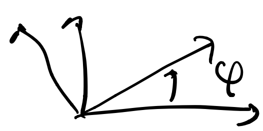
Corpo rigido 3D sono 6

(x_0, y_0, z_0)

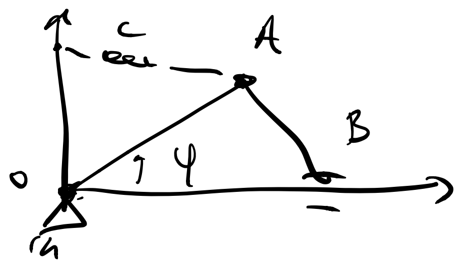
(φ, θ, ψ)

Corpo rigido 2D 3

(x_0, y_0, φ)



Vincoli olonomi, sistemi articolati



$\downarrow g$ Forze attive

$\downarrow$

PLV

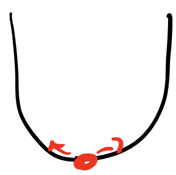
$$PLV = \sum_{B \in \mathcal{R}}' \underline{F}_B^a \cdot \delta \underline{x}_B = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} Q_i \, \delta q_i$$

$$Q_i = 0 \quad = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$\longrightarrow$ studio di $V(q_1, \dots, q_\ell)$

V :



Statica : forze (conservative)

$\rightarrow$ calcolare l' energia potenziale espresso in termini delle coordinate libere $\longrightarrow$ $dV = 0$ equilibrio

$V = V(q)$ oppure $V = V(q_1, \dots, q_\ell)$

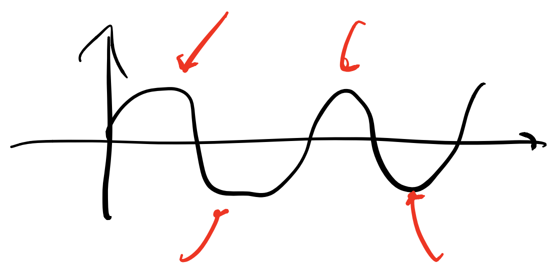
$V = V(q_1, \dots, q_\ell)$: $\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial q_\ell} = 0$

$$\text{Hess } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$V = V(q) \leftarrow \quad \frac{dV}{dq} = 0 \rightarrow$ eq.

$\frac{d^2V}{dq^2}$: $>0 \leftarrow$ eq. stabile
$= 0$
< 0

$V =$ sin, cos, x^2



$LV = \underline{Q(q)\, dq} \overset{!}{=} d(-V)$

$\uparrow$

1 coordinata libera e forze posizionali

$V = -\int \underline{Q}$

$\int_{C_0}^{C_1} F\, dx$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

S sistema materiale in equilibrio.

Per principio di inerzia $\underline{F}_P = \underline{0}$ $\forall$ punto P di S

forza totale

Allora: $\underline{F}_P = \underline{0}$ $\forall P \in S$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum'_{P \in S} \underline{F}_P = \underline{0} \\ \underline{M}(O) = \sum'_{P \in S} (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P = \underline{0} \end{cases}$$

O punto fissato a piacere

Dividiamo $\underline{F}_P$ in forze interne e forze esterne

Azione e reazione: le forze interne

sono a due a due coppie di braccio nullo.

Quindi:

- $\underline{R}^{(i)} = \sum_{P \in S} \underline{F}_P^{(i)} = 0$ risultante delle forze interne

- $\underline{M}^{(i)}(O) = 0$ momento risultante delle forze interne rispetto ad O

Quindi per le forze esterne:

$$S \text{ in equilibrio} \Rightarrow \begin{cases} \underline{R}^{(e)} = \underline{0} \\ \underline{M}^{(e)}(O) = \underline{0} \end{cases}$$

equazioni cardinali della statica (ECS)

condizione <u>necessaria</u>

In generale non sono sufficienti.

Ma: il corpo rigido.

Infatti: per il corpo rigido ECS = PLV

$$LV_{\text{rigido}} = \underline{R} \cdot \delta \underline{x}_0 + \underline{M}(O) \cdot \underline{\chi}$$

$\left(\begin{array}{l} \underline{R}^{(i)} = \underline{0} \\ \underline{M}^{(i)}_{(O)} = \underline{0} \end{array} \right)$ $\quad L_D = \underline{R}^{(e)} \cdot \delta \underline{x}_0 + \underline{M}^{(e)}_{(O)} \cdot \underline{\chi}$

. se $LV = 0 \quad \forall\, \delta \underline{x}_0, \underline{\chi} \implies$

$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} = \underline{0} \\ \underline{M}^{(e)}_{(O)} = \underline{0} \end{cases} \qquad \text{E.C.S}$$

. se valgono $\underline{R}^{e} = \underline{0}$, $\underline{M}^{e}(O) = 0$

allora $LV = 0 \quad \forall\, \delta \underline{x}_0, \underline{\chi}$

<u>Commento</u>: se $\underline{M}(O) = \underline{0}$ è verificato per O, allora vale anche per un punto O' (visto $\underline{R} = \underline{0}$)

Infatti: $\underline{M}(O) = \sum_p' (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \wedge \underline{F}_p$

$$= \sum_p{}' \left([\underline{x}_p - \underline{x}_{O'}] + [\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O] \right) \wedge \underline{F}_p$$

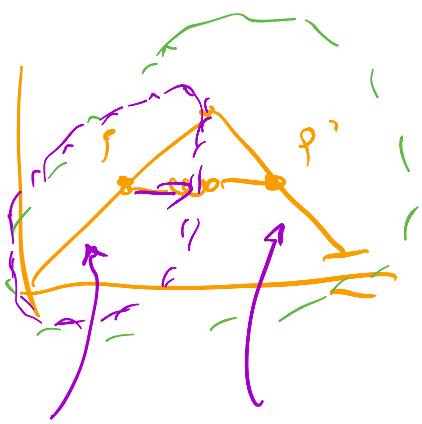
$$= \left(\sum_p{}' (\underline{x}_p - \underline{x}_{O'}) \wedge \underline{F}_p \right) + \left((\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge \sum_p \underline{F}_p \right)$$

$$= \underline{M}(O') + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge \underline{R}$$

da cui $\underline{R} = \underline{0} \Rightarrow \underline{M}(O) = \underline{M}(O')$

$$\underline{M}(O) = \sum_p \underbrace{(\underline{x}_p - \underline{x}_O)} \wedge \underline{F}_p$$

$O = p'$, $\underline{F}_{p'}$ non contribuisce



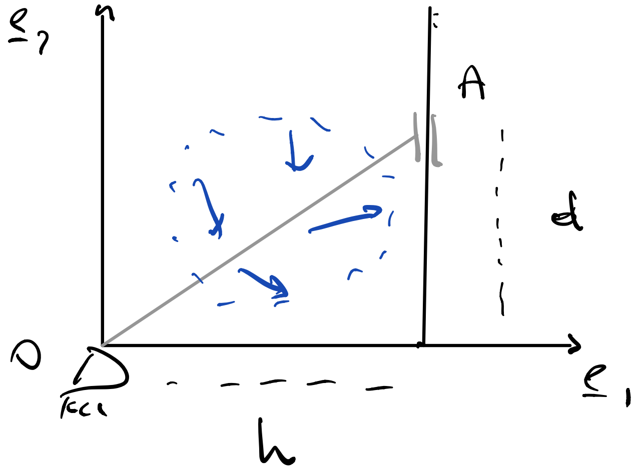
$\underline{R} = \underline{0}$

$\underline{M}(O) = \underline{0}$

Seconda parte

<u>Applicazioni</u>

$\overline{OA} = L$

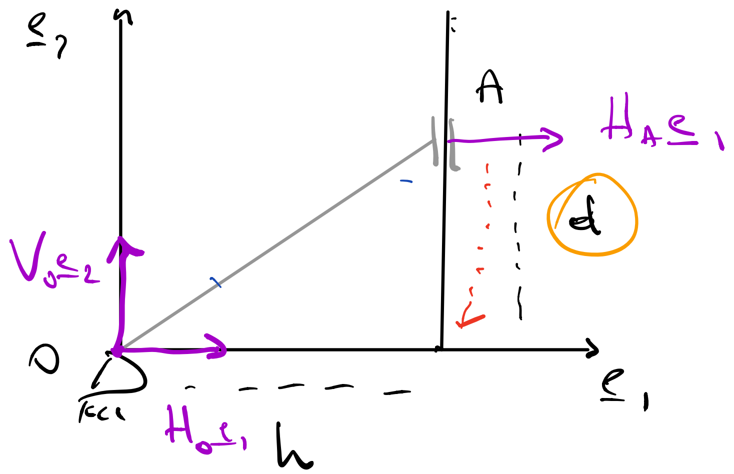


$d = \sqrt{L^2 - h^2}$

$\underline{R}^{e,a}$ risultante forze attive esterne

$\underline{M}^{e,a}$

Calcolare le reazioni vincolari



E.C.S. :

$\underline{R}^e = \underline{0} \Rightarrow \underline{e}_1 : \quad H_O + H_A + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_1 = 0$

$\underline{e}_2 : \quad V_O + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_2 = 0$

$\underline{M}^e_{(O)} = 0 \Rightarrow \underline{e}_3 : \quad -H_A d + \underline{M}^{e,a}_{(O)} \cdot \underline{e}_3 = 0$

Allora: se $d \neq 0 \Rightarrow H_O, V_O, H_A$

$H_A = \dfrac{\underline{M}^{e,a} \cdot \underline{e}_3}{d}$

Sono determinate in modo unico per ogni sistema di forze attive

Invece se $d = 0$

- se $\underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{e}_3 = 0 \Rightarrow H_A$ è indeterminato
- se $\underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{e}_3 \neq 0 \Rightarrow$ no soluzioni

Abbiamo un sistema eq. lineare non omogeneo

$$A \cdot \underline{F}^{r} = \underline{F}^{a}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix} \qquad \underline{F}^{r} = \begin{pmatrix} H_O \\ V_O \\ H_A \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}^{a} = \begin{pmatrix} -\underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_1 \\ -\underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_2 \\ -\underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ risolvere $\quad \underline{F}^{r} = A^{-1} \underline{F}^{a}$

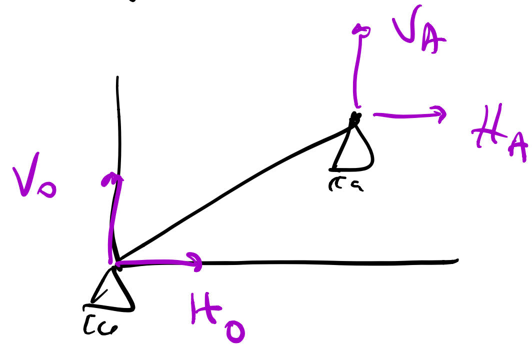
$\exists \quad \det A \neq 0$

Nel nostro caso $\det A = -d$

Se abbiamo più incognite che equazioni : staticamente indeterminato

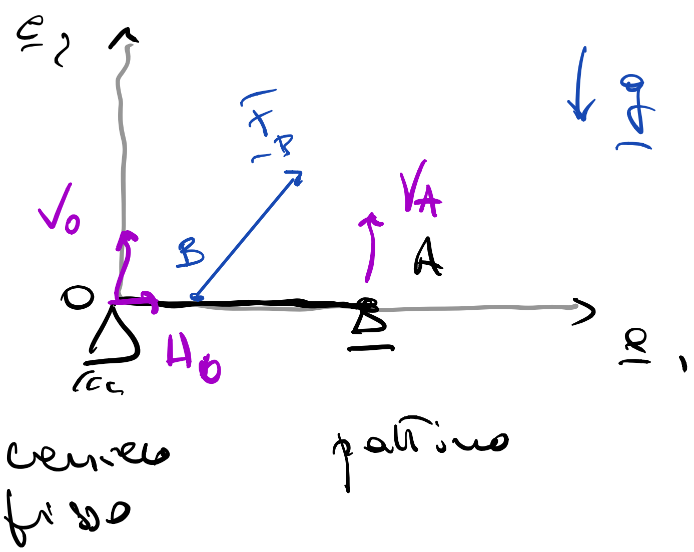
Ad esempio : vincoli non lisci

Oppure



3 equazioni per 4 incognite (H_0, V_0, H_A, V_A)

Esempio



$\underline{F}_B = f\,\underline{e}_1 + 2f\,\underline{e}_2$

$\overline{OB} = \frac{\ell}{4}$ M

$\overline{OA} = \ell$

Problema : calcolare le reazioni vincolari

$\underline{R}^e = \underline{0} \Rightarrow$ lungo $\underline{e}_1$ $H_0 + f = 0$

lungo $\underline{e}_2$ $V_0 + V_A - Mg + 2f = 0$

$$H_0 \underline{e}_1 + \underline{R}^{(a)} \cdot \underline{e}_1 = 0$$

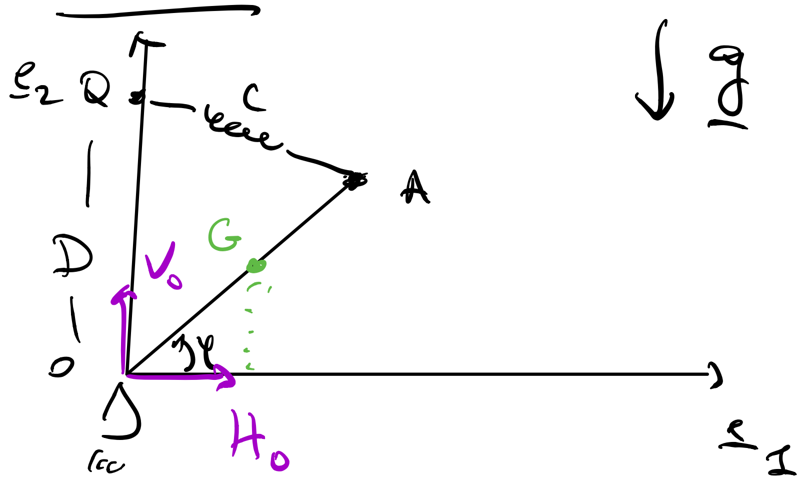
$$\underline{M}^e = \underline{0} \implies \underbrace{\ell V_A}_{} - \underbrace{Mg\frac{\ell}{2}}_{} + \underbrace{2f\frac{\ell}{4}}_{} = 0$$

$$(\underline{x}_A - \underline{x}_0) \wedge (V_A \underline{e}_2)$$

Quindi:

$$\begin{cases} H_0 = -f \\ V_0 = Mg - 2f - V_A = \dfrac{Mg}{2} - \dfrac{3}{2}f \\ V_A = \dfrac{Mg}{2} - \dfrac{f}{2} \end{cases}$$

<u>Esercizio</u>



asta omogenea

$\overline{OA} = L$

$\overline{OQ} = D$

Determinare

- configurazioni di equilibrio
- reazioni vincolari in O all'equilibrio

<u>PLV</u>: forze conservative

$$V = mg\,y_G + \frac{c}{2}\|\underline{x}_A - \underline{x}_Q\|^2$$

$$= mg\frac{L}{2}\sin\varphi + \frac{c}{2}\|L\cos\varphi\,\underline{e}_1 + (L\sin\varphi - D)\underline{e}_2\|^2$$

$$= mg\frac{L}{2}\sin\varphi + \frac{c}{2}\Big(L^2\cos^2\varphi + L^2\sin^2\varphi + D^2 +$$

$$-2DL\sin\varphi\Big)$$

$$= L\sin\varphi\left(\frac{mg}{2} - cD\right) + \frac{c}{2}(L^2 + D^2)$$

- se $\frac{mg}{2} = cD \rightarrow V =$ costante

  equilibrio indifferente

  $\rightarrow$ equilibrio $\forall\,\varphi$

- se $\frac{mg}{2} \neq cD$ minimi sono $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

  se $\frac{mg}{2} > cD$ $\quad -\frac{\pi}{2}$ stabile

  se $\frac{mg}{2} < cD$ $\quad \frac{\pi}{2}$ stabile

Ritroviamo questi risultati con ECS

Vogliamo un'eq che non contenga H_0, V_0

$\rightarrow$ eq. dei momenti con polo O

$$\underline{M}(O) = \underline{0}$$

$\hookrightarrow \quad -mg\frac{L}{2}\cos\varphi + cLD\cos\varphi = 0$

$$(\underline{x}_A - \underline{x}_0) \wedge \left(-c(\underline{x}_A - \underline{x}_0)\right) \cdot \underline{e}_3$$

$$= (L\cos\varphi\, \underline{e}_1 + L\sin\varphi\, \underline{e}_2) \wedge \Big[-c\big(L\cos\varphi\, \underline{e}_1 + L\sin\varphi\, \underline{e}_2 - D\, \underline{e}_2\big)\Big]$$

$$= cL^2\cos\varphi\sin\varphi + cL\cos\varphi\, D - cL^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= cL\cos\varphi\, D$$

$$-mg\frac{L}{2}\cos\varphi + cLD\cos\varphi = 0$$

è proprio $-V'(\varphi) = 0$. Infatti:

$$-V'(\varphi) = Q_\varphi = \underline{M}(0) \cdot \underline{e}_3$$

$\rightarrow$ ritroviamo la stessa condizione di equilibrio che per P.L.V.

Calcoliamo le reazioni in O. Usiamo l'equazione della risultante

$\underline{R}^e = \underline{0}$

$$\to \quad H_O + [-c(\underline{x}_A - \underline{x}_Q)]\cdot \underline{e}_1 = 0$$

$$H_O + [-c(L\cos\varphi\, \underline{e}_1 + L\sin\varphi\, \underline{e}_2 - D\,\underline{e}_2)]\cdot \underline{e}_1 = 0$$

$$H_O = cL\cos\varphi$$

$$\to \quad V_O - mg + \underline{e}_2 \cdot [-c(\underline{x}_A - \underline{x}_Q)] = 0$$

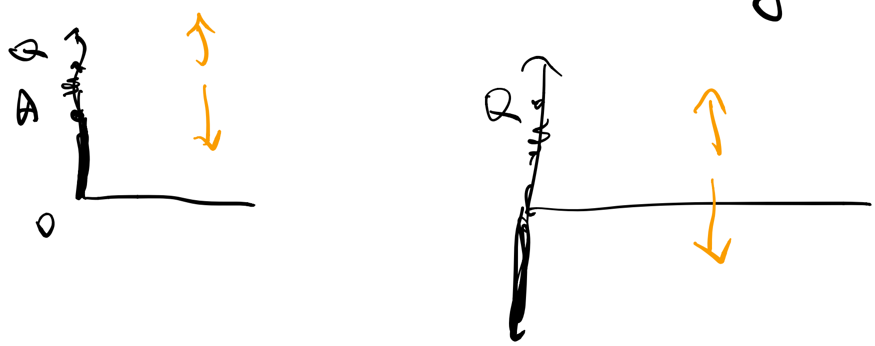
$$V_O = mg + c(L\sin\varphi - D)$$

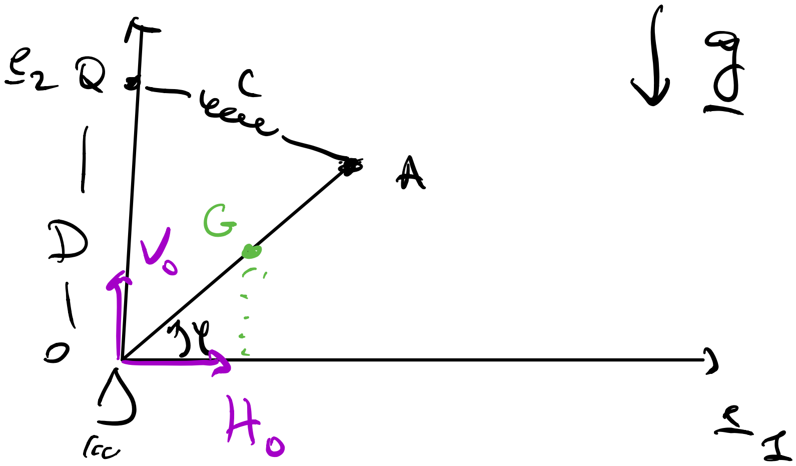
Allora nelle configurazioni di eq.

- se $\frac{mg}{2} \neq cD$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$$\begin{cases} H_O = 0 \\ V_O = mg + c(L - D) \end{cases}$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$
$$\begin{cases} H_O = 0 \\ V_O = mg - c(L + D) \end{cases}$$





e2
Q
C
A
G
D
V0
O
φ
H0
e1
g