Struttura per Scadenza dei Tassi

Struttura per Scadenza dei Tassi

lo studio

- Obbiettivo è ~~la costruzione~~ della struttura per scadenza dei tassi (o CURVA DEI TASSI).
- A tal fine si considera un modello idealizzato di mercato obbligazionario, caratterizzato da numerose ipotesi semplificatrici, più o meno forti.
- Nella realtà la curva dei tassi è relativa ad un emittente (e.g. uno stato) o ad un certo tipo di mercato (LIBOR, EURIBOR, imprese con un dato rating), ad una certa valuta, ad un certo intervallo temporale, ...

Ipotesi: Scadenzario

- Sia $\mathbb{T}$ lo scadenzario (tenor), cioè l'insieme delle epoche in cui avvengono le transazioni. In particolare, concentriamo l'attenzione su due casi.
  - ⋆ Scadenzario discreto (finito o infinito):

$$\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots\}.$$

    Caso particolare: $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per ogni $i \geq 1$.
  - ⋆ Scadenzario continuo:

$$\mathbb{T} = [0, T] \text{ oppure } \mathbb{T} = [0, +\infty[$$

  - ⋆ 0 = oggi; il tempo viene misurato in anni.

EPOCA DI VALUTAZIONE

Ipotesi: Mercati Perfetti

- Mercato Competitivo: gli agenti sono price-takers (non price-makers) cioè con le loro azioni non modificano i prezzi.
- Mercato privo di Frizionalità: non ci sono tassazioni sui guadagni, né costi di transazione, non ci sono vincoli di vendita allo scoperto (short-selling) e i titoli sono perfettamente divisibili.
- Mercato privo di Opportunità di Arbitraggio (AOA). PORTAFOGLIO
  Un'arbitraggio (free-lunch) è una "strategia" che produce una sequenza di cash-flows nonnegativi in ogni epoca ed in ogni stato del mondo, e, con probabilità positiva, un cash-flow positivo in qualche epoca.

  QUALUNQUE SIA L'EVOLUZIONE DELL'INCERTEZZA

  ≡ IN QUALCHE STATO DEL MONDO

  - ⋆ AOA è condizione necessaria per l'equilibrio;
  - ⋆ AOA ⇒ Legge del prezzo unico: due strategie che offrono gli stessi cash-flows devono avere lo stesso valore iniziale.

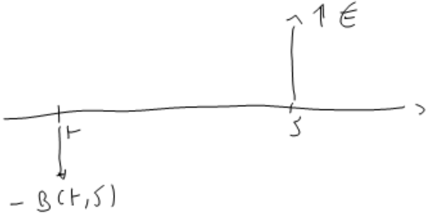
  PREZZO INIZIALE

Struttura per Scadenza dei Prezzi

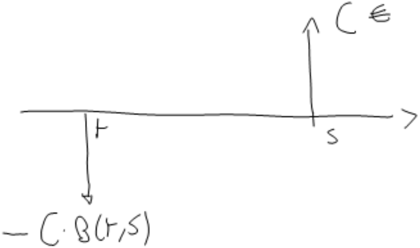
- Per ogni $s \in \mathbb{T}$, $s > 0$ supponiamo che vi sia un titolo a cedola nulla (TCN) con scadenza in s, di valore nominale 1€, e che tale titolo possa essere scambiato ad ogni epoca $t \in \mathbb{T}$, $t < s$. Il suo prezzo sarà indicato con $B(t, s)$.
- $B(t, s)$ può essere visto come fattore di sconto tra s e t: il valore in t di C€ in s è $CB(t, s)$.
- Proprietà di $B(t, s)$:
  - Ci mettiamo nel caso in cui i TCN siano default-free, cioè pagano con certezza 1€ a scadenza. A tal fine possiamo pensare a titoli emessi da uno stato o altro emittente con rating elevato. Di conseguenza deve essere $B(s, s) = 1$.
  - Per AOA, deve essere inoltre $B(t, s) > 0$ per $t < s$ e $B(t, s) = 0$ per $t > s$.
- Si chiama **struttura per scadenza dei prezzi (discount function)** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ la funzione

FISSATO

$$\boxed{s \to B(t, s); \quad s \geq t, \ s \in \mathbb{T}.}$$



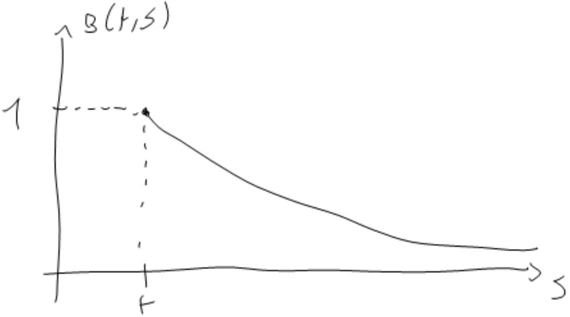
SE ACQUISTO UNA QUANTITÀ PARI A C



"IL VALORE IN t DI C € DISPONIBILI IN s È

$$C \cdot \underbrace{B(t,s)}_{\text{FATTORE DI SCONTO}}$$"

STRUTTURA PER SCADENZA DEI PREZZI



$B(t,t) = 1$

$B(t,s)$ DECRESCENTE CON s ?

PIÙ LONTANO NEL TEMPO È IL VALORE NOMINALE 1€, MINORE È IL SUO VALORE OGGI

Struttura per Scadenza dei Tassi a Pronti

- Convenzione: tutti i tassi che consideriamo sono annualizzati.
- Definiamo il **tasso a pronti** in t per l'epoca s, $r(t,s)$, con $t,\ s \in \mathbb{T},\ t < s$ tramite la

$$\boxed{B(t,s) = \mathrm{e}^{-(s-t)r(t,s)}.}$$

  - ⋆ Quindi $r(t,s)$ è il tasso di rendimento (intensità d'interesse), in regime di interesse composto, corrispondente all'operazione in cui si compra in t il TCN e lo si detiene fino alla scadenza s.
  - ⋆ Si tratta di tassi a pronti (**spot**), cioè tassi concordati in t per un investimento che inizia in t stesso.
- Riesce dunque

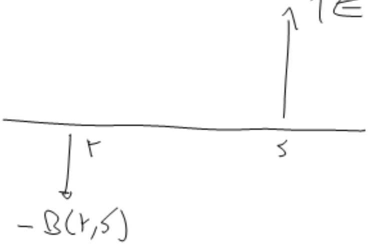
$$\boxed{r(t,s) = -\frac{1}{s-t}\log B(t,s)}$$

- La **struttura per scadenza dei tassi a pronti** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$\boxed{s \to r(t,s); \quad s \geq t, \quad s \in \mathbb{T}.}$$

  Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi**.

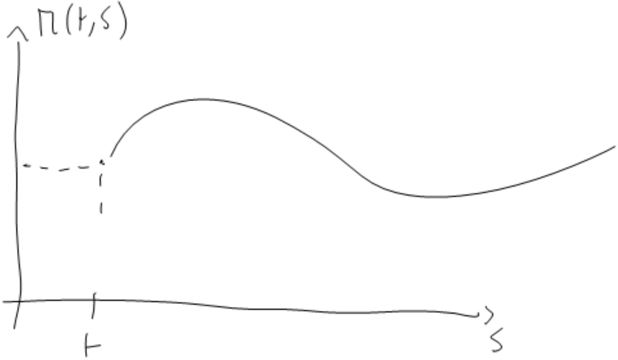
$r(t,s)$



$$VAN = -B(t,s) + 1€ \cdot e^{-\overbrace{r(t,s)}^{\text{INTENSITÀ DI INTERESSE TRA } t \text{ ED } s \text{ COSTANTE}} \cdot (s-t)}$$

$$VAN = 0 \longleftrightarrow r(t,s) = \text{TIR DI QUESTA OPERAZIONE}$$

$$B(t,s) = e^{-r(t,s)\cdot(s-t)} \Longleftrightarrow \boxed{r(t,s) = -\frac{1}{s-t}\log B(t,s)}$$



Π(t,s)
t
s

Day Count Conventions

- Al fine di calcolare tassi e rendimenti, occorre calcolare la frazione d'anno che intercorre fra due date. Prevalgono regole di calcolo diverso a seconda dei mercati e degli strumenti. La maggior parte delle regole rientrano fra le seguenti (o fra loro varianti).
  1. Actual/Actual: numero effettivo di giorni fra le due date rapportato al numero effettivo di giorni nell'anno (365 o 366), con correzioni se fra due anni diversi.
  2. Actual/360 (Variante: Actual/365): numero effettivo di giorni fra le due date diviso 360 (o 365).
  3. 30/360: ogni mese ha 30 giorni, ogni anno ha 360 giorni.
- Esempio: frazione d'anno tra 27/2/07 e 5/1/07: 1) $\leftarrow$ S-t
  $53/365 = 0.1452$, 2) $53/360 = 0.1472$, 3) $52/360 = 0.1444$.
- Importanti sono anche le 'business date conventions', in base alle quali date di pagamento che coincidono con festività vengono convertite in date lavorative.
- Excel: *YEARFRAC* e *WORKDAY*; **R**: eg pacchetti **RQuantlib** e la suite **RMetrics**

PRONTI VS. TERMINE
(SPOT VS FORWARD)

TASSI A TERMINE

(TASSI IMPLICITI)

- A differenza dei tassi a pronti, i **tassi a termine** o **forward** sono relativi a investimenti concordati in un dato istante, che iniziano in un istante successivo.
- Fissati $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ con $t \leq s < u$, consideriamo la seguente operazione costruita all'epoca t.

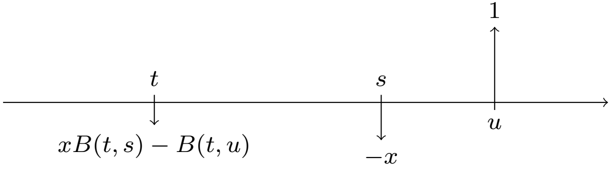
2 OPERAZIONI A PRONTI

  - ⋆ Acquisto un TCN con scadenza u: flusso in t pari a $-B(t,u)$ ed in u pari a $+1$;
  - ⋆ vendo x TCN con scadenza s: flusso in t pari a $+xB(t,s)$ ed in s pari a $-x$.

t = ACCORDO

s = IL CONTRATTO COMINCIA A PRODURRE EFFETTI

u = TERMINE



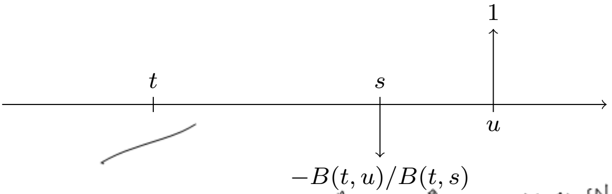
SI SCEGLIE TRA x TALE CHE IL FLUSSO È 0

. . . Tassi a Termine

- ⋆ Scegliamo x in maniera tale che il flusso in t sia nullo:

$$\underline{xB(t,s) - B(t,u) = 0} \Leftrightarrow \boxed{x = B(t,u)/B(t,s).} \quad > 0$$

- ⋆ La situazione è allora



NOTI IN t

- Tale operazione genera flussi di cassa in s ed u, ma non in t (istante in cui l'operazione è concordata).

$$B(t,U)/B(t,S) = B_f(t,S,U)$$

PREZZO FORWARD IN t DI UN TCN CON SCADENZA U, PER LA SCADENZA S

... Tassi a Termine

- Si definisce **tasso a termine** in t per il periodo $[s, u]$, $f(t, s, u)$, il tasso di rendimento (in regime di interesse composto) corrispondente a questa operazione:

$$\boxed{\frac{B(t, u)}{B(t, s)} = e^{-(u-s)f(t,s,u)},}$$

DATO $f(t,s,u)$, POSSO CALCOLARE $B(t,u)$, $B(t,s)$?

da cui si ricava che

$$\boxed{f(t, s, u) = -\frac{1}{u - s} \log \frac{B(t, u)}{B(t, s)}.}$$

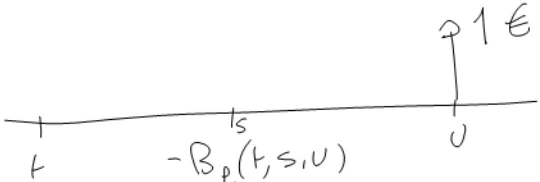
DATI $B(t,u)$ E $B(t,S)$, CALCOLO $f(t,S,u)$

- La **struttura per scadenza dei tassi forward** all'epoca t è la funzione

t ↳ FISSATO

$$(s, u) \to f(t, s, u), \quad u > s \geq t, \quad s, \; u \in \mathbb{T}.$$

TASSO A TERMINE $f(t,s,u)$



$$-B_f(t,s,u) = -\frac{B(t,u)}{B(t,s)}$$

$$VAN = -\frac{B(t,u)}{B(t,s)} + 1€\, e^{-\overbrace{f(t,s,u)(u-s)}^{\text{INTENSITÀ COSTANTE TRA S ED U}}}$$

$VAN = 0 \Rightarrow f(t,s,u) =$ TIR DI QUESTA OPERAZIONE FINANZIARIA

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

- È equivalente conoscere, ad una certa epoca t, i prezzi $B(t,s)$, i tassi a pronti $r(t,s)$ o i tassi a termine $f(t,s,u)$.
    - Infatti, noti i prezzi, si determinano (per costruzione) i tassi a termine.
    - Viceversa, noti i tassi a termine, si hanno come caso particolare i tassi a pronti: ponendo $s = t$ in $f(t,s,u)$ si trova

$$X = \frac{B(t,u)}{B(t,s)} \underset{s=t}{=} \frac{B(t,u)}{B(t,t)} = B(t,u)$$

$$\begin{aligned} f(t,t,u) &= -\frac{1}{u-t}\log\frac{B(t,u)}{B(t,t)} \quad \} = 1 \\ &= -\frac{1}{u-t}\log B(t,u) \\ &= r(t,u). \end{aligned}$$

- Infine, come già osservato, noti i tassi a pronti, sono noti anche i prezzi.

$$B(t,s) = e^{-(s-t)\cdot r(t,s)}$$

$B(t,u) = e^{-(u-t)\cdot r(t,u)}$

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

(3) <=> (4) :

- Per $t,\ u \in \mathbb{T}$ e $t < u$, $\boxed{r(t,u) > 0 \Leftrightarrow B(t,u) < 1}$ cioè i tassi a pronti sono positivi se e solo se il corrispondente TCN vende a sconto.
- L'ultima proprietà ha le seguenti implicazioni: le seguenti proposizioni sono equivalenti

OGNI PROPRIETÀ VALE PER OGNI t, s, u

1. $B(t,s) > B(t,u)$ per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ e $t \leq s < u$: DISCOUNT FUNCTION IN t È DECRESCENTE
2. $f(t,s,u) > 0$ per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ e $t \leq s < u$: TASSI FWD SEMPRE POSITIVI
3. $B(t,u) < 1$ per $t,\ u \in \mathbb{T}$ e $t < u$: FATTORI DI SCONTO SEMPRE < 1
4. $r(t,u) > 0$ per $t,\ u \in \mathbb{T}$ e $t < u$: TASSI A PRONTI > 0

(1) $\Leftrightarrow$ (2) segue dalla definizione di $f(t,s,u)$,

$$B(t,u) = B(t,s)e^{-f(t,s,u)(u-s)}.$$

SE $B(t,s) > B(t,u) \Leftrightarrow e^{-(u-s)f(t,s,u)} < 1 \Leftrightarrow f(t,s,u) > 0$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) è stata vista sopra.

(1) $\Rightarrow$ (3) basta prendere $t = s$ in (1).

CON 3 TCN ✓

Per provare che (3) $\Rightarrow$ (1), consideriamo la seguente strategia: in (i) t acquisto di un TCN con scadenza s, (ii) vendita di un TCN con scadenza u; (iii) in s acquisto di un TCN con scadenza u

$(1) \Leftrightarrow (2)$

$\Updownarrow$

$(3) \Leftrightarrow (4)$

(1) $B(t,s) > B(t,u)$ PER OGNI $t \leq s < u$

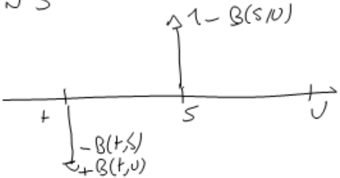
(3) $1 > B(t,u)$ PER OGNI $t < u$

$(1) \Rightarrow (3)$ BASTA PRENDERE $s = t$ IN (1)

$(3) \Rightarrow (1)$

Prezzi, Tassi a pronti e a Termine

(i) compro 1 TCN (s) } in t
(ii) vendo 1 TCN (u)
(iii) compro 1 TCN (u) → in s



▷ I flussi di cassa sono:
- ⋆ in t, $-B(t,s) + B(t,u)$
- ⋆ in s, $1 - B(s,u)$
- ⋆ in u, $1 - 1 = 0$

essendo il flusso in s dato da $1 - B(s,u) > 0$ (da (3)), il flusso in t deve essere $-B(t,s) + B(t,u) < 0$, cioè $B(t,u) < B(t,s)$ (1) altrimenti ci sarebbe un arbitraggio.

▷ quindi i tassi sono (sempre) positivi sse la 'discount function' è (sempre) decrescente.

PREZZI, TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ Fissiamo $t < s < u$;
  - ⋆ partendo dalla

$$\overbrace{B(t,u)}^{e^{-(u-t)r(t,u)}} = \underbrace{B(t,s)}_{e^{-(s-t)r(t,s)}}\mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

    sostituendo i tassi a pronti si trova

$$\underbrace{\mathrm{e}^{-(u-t)r(t,u)}}_{\text{SCONTARE TRA U E T}} = \underbrace{\mathrm{e}^{-(s-t)r(t,s)}}_{\text{SCONTARE TRA S ED U}}\underbrace{\mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)}}_{\text{SCONTARE TRA U ED S (A CONDIZIONI STABILITE IN T)}},$$

  - ⋆ passando ai logaritmi e esplicitando $r(t,u)$,

$$r(t,u) = \frac{s-t}{u-t}r(t,s) + \frac{u-s}{u-t}f(t,s,u)$$

    cioè il tasso 'a lungo termine' $r(t,u)$ è media ponderata del tasso 'a breve termine' $r(t,s) = f(t,t,s)$ e del tasso forward $f(t,s,u)$;

$$e^{-(U-t)\cdot r(t,U)} = e^{-(S-t)\cdot r(t,S)} \cdot e^{-(U-S)\cdot f(t,S,U)}$$

$$\cancel{-}(U-t)\cdot \underbrace{r(t,U)}_{\substack{\text{TASSO} \\ \text{"A LUNGO"}}} = \cancel{-}(S-t)\, \underbrace{r(t,S)}_{\substack{\text{TASSO} \\ \text{"A BREVE"}}}\ \cancel{-}\ (U-S)\, \underbrace{f(t,S,U)}_{\substack{\text{TASSO} \\ \text{A TERMINE}}}$$

$$\boxed{r(t,U) = \frac{S-t}{U-t}\, r(t,S) + \frac{U-S}{U-t}\, f(t,S,U)}$$

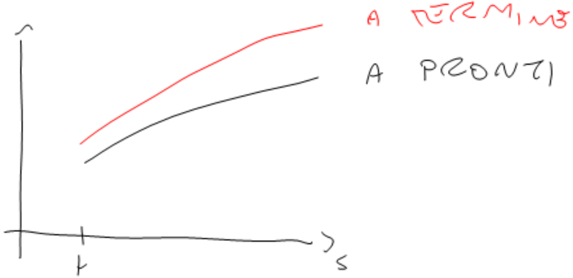
$$U-t = S-t+U-S$$

Tassi a pronti e a Termine

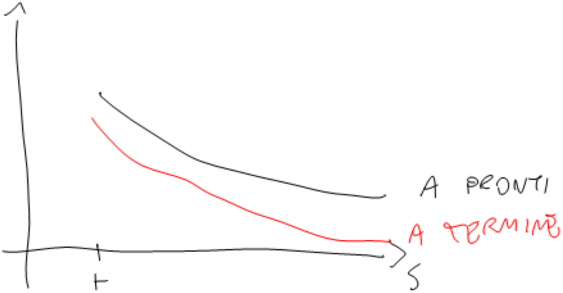
- Dalla relazione che esprime $r(t,u)$ come media ponderata di $r(t,s)$ e $f(t,s,u)$ si trova che, per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}\,(t < s < u)$

$$r(t,s) > r(t,u) \Leftrightarrow r(t,s) > r(t,u) > f(t,s,u)$$
$$r(t,s) < r(t,u) \Leftrightarrow r(t,s) < r(t,u) < f(t,s,u).$$

- Ne segue che
  - ⋆ Se la struttura dei tassi a pronti è crescente (descrescente) allora è dominata dai (domina i) tassi a termine.
  - ⋆ Quando la curva dei tassi a pronti 'cambia andamento', cioè passa da crescenza a decrescenza o viceversa, allora la curva dei tassi a termine 'attraversa' quella dei tassi a pronti.

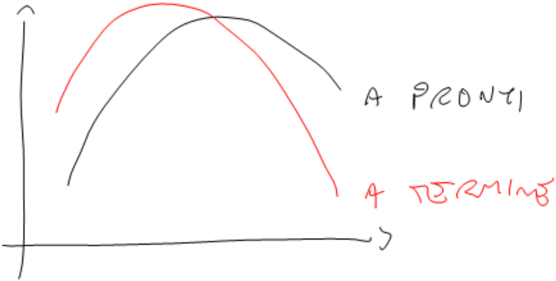


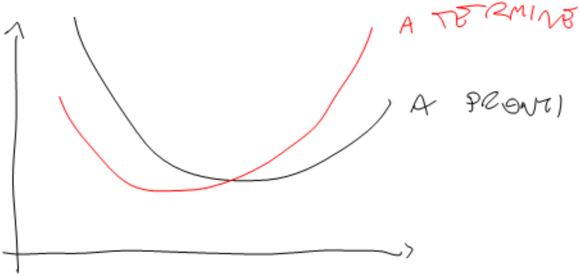
CURVA DEI TASSI "NORMALE"



CURVA DEI TASSI "INVERSA"

"HUMPED"





Tassi e Intensità

- In luogo delle intensità di interesse, $r(t,s)$ (spot) e $f(t,s,u)$ (forward), si possono utilizzare i corrispondenti tassi di interesse.
- Il legame tra queste quantità è dato da

$$(1+\text{tasso})^{\text{periodo}} = \mathrm{e}^{\text{periodo}\cdot\text{intensità}}.$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1+\text{TASSO} = e^{\text{INTENSITÀ}}$$

- Avremo quindi i tassi $i(t,s)$ (spot) e $i_f(t,s,u)$ (forward), definiti da

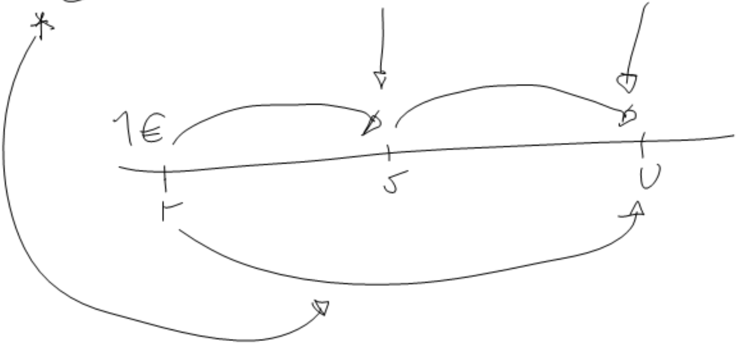
$$1+i(t,s) = \mathrm{e}^{r(t,s)}$$
$$1+i_f(t,s,u) = \mathrm{e}^{f(t,s,u)},$$

e legati da

$$\boxed{(1+i(t,u))^{u-t} = (1+i(t,s))^{s-t}(1+i_f(t,s,u))^{u-s},}$$

quindi il fattore di capitalizzazione 'a lungo' $1+i(t,u)$ è media geometrica dei corrispondenti fattori 'a breve' e a termine.

$$e^{(u-t)r(t,u)} = e^{(s-t)r(t,s)} \cdot e^{(u-s)f(t,s,u)}$$



$$\left(1+i(t,u)\right)^{u-t} = \left(1+i(t,s)\right)^{s-t} \cdot \left(1+i_f(t,s,u)\right)^{u-s}$$

SIMILE INTERPRETAZIONE CON "SCONTO" INVECE CHE "MONTANTE"

MEDIA GEOMETRICA DI X, Y $\quad p \quad 1-p$

$0 < p < 1$

$$X^p \cdot Y^{1-p}$$

IN GENERALE $X_1, \_\_\_, X_n$ $\quad p_1, \_\_\_, p_n$

$p_i > 0, \ \sum p_i = 1$

$$X_1^{p_1} \cdot X_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot X_n^{p_n}$$

$$1 + i(t,u) = (1 + i(t,s))^{\overbrace{\frac{s-t}{u-t}}^{=p}} \cdot (1 + i_f(t,s,u))^{\overbrace{\frac{u-s}{u-t}}^{1-p}}$$

INTERNALITÀ $\Rightarrow$ $i(t,u)$ COMPRESO TRA $i(t,s)$
E $i_f(t,s,u)$

INTERESSE = TASSO × CAPITALE × × PERIODO

Tassi Semplici

- ▷ A volte si calcola il rendimento di un'operazione basandosi su tassi semplici (cioè in regime di interesse semplice), soprattutto per investimenti di durata inferiore a 1 anno.
- ▷ Definiamo allora il **tasso semplice** a pronti in t per l'epoca s, $L(t,s)$, con $t,\ s \in \mathbb{T}$ e $t \leq s$, come il tasso in regime di interesse semplice corrispondente ad un investimento tra t e s:

"LIBOR"

$$\boxed{B(t,s) = \frac{1}{1 + L(t,s)(s-t)},}$$

da cui si ricava

$$\boxed{L(t,s) = \frac{1}{s-t}\left[\frac{1}{B(t,s)} - 1\right].}$$

- ▷ La **struttura per scadenza dei tassi semplici** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \to L(t,s), \quad s \geq t, \quad s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la curva dei tassi semplici.

Tassi semplici a termine

- Il tasso semplice a termine in t per il periodo $[s, u]$, $L_f(t, s, u)$, con $t \leq s < u$ e $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ è definito implicitamente da

$$\underbrace{(1 + L(t, s)(s - t))}_{1/B(t,s)}(1 + L_f(t, s, u)(u - s)) = \underbrace{(1 + L(t, u)(u - t))}_{1/B(t,u)},$$

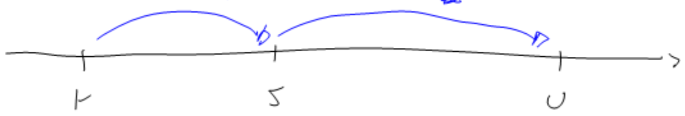
- Il legame con le altre quantità introdotte in precedenza è dato da:

$$\begin{aligned} L_f(t, s, u) &= \frac{1}{u - s}\left[\frac{1 + L(t, u)(u - t)}{1 + L(t, s)(s - t)} - 1\right] \\ &= \frac{1}{u - s}\left[\frac{B(t, s)}{B(t, u)} - 1\right] \\ &= \frac{e^{(u-s)f(t,s,u)} - 1}{u - s}. \end{aligned}$$

- Il tasso a lungo semplice non è media di tasso breve e tasso forward

CI SONO ESEMPI IN CUI $L(t,u) > L(t,s)$, $L_f(t,s,u)$

$$1+L(t,u)\cdot(u-t) = \left[1+L(t,s)\cdot(s-t)\right]\cdot\left[1+L_f(t,s,u)\cdot(u-s)\right] \quad *$$



$L_f(t,s,u)$ NOTO IN t

$$* \quad \cancel{1+}L_f(t,s,u)\cancel{(u-s)} = \left[\frac{1+L(t,u)(u-t)}{1+L(t,s)(s-t)} - 1\right]\frac{1}{u-s}$$

Δ_i

$t_i \qquad t_{i+1}$

Scadenzario Discreto

FINITO

INFINITO

- Consideriamo il caso $\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots\}$;
  - poniamo $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ per $i \geq 0$.
  - Per $t_i, t_j \in \mathbb{T}$ con $t_i \leq t_j < \sup \mathbb{T}$, definiamo **il tasso a termine uniperiodale** in t_i per t_j, $f(t_i, t_j)$, come il tasso a termine dell'investimento stabilito in t_i, che comincia in t_j e termina nell'epoca successiva t_{j+1}:

$f(t, s, u)$

$t_i \quad t_j \quad t_{j+1}$

$$= -\frac{1}{u-s} \log \frac{B(t,u)}{B(t,s)}$$

$$\boxed{f(t_i, t_j) = f(t_i, t_j, t_{j+1}) = -\frac{1}{\Delta_j} \log \frac{B(t_i, t_{j+1})}{B(t_i, t_j)}.}$$

- La **struttura dei tassi a termine uniperiodali** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \to f(t, s), \quad t < s < \sup \mathbb{T}, \; t, \; s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine uniperiodali**.

Scadenzario Discreto

- Dai tassi uniperiodali si possono ricostruire le altre quantità:
  - I prezzi dei TCN e i tassi a pronti: per $t_i < t_j$ con $t_i,\ t_j \in \mathbb{T}$,

$$B(t_i, t_j) = \mathrm{e}^{-\sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l)}, \quad r(t_i, t_j) = \frac{1}{t_j - t_i} \sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l),$$

  - I tassi a termine: per $t_i \leq t_j < t_k$, con $t_i,\ t_j,\ t_k \in \mathbb{T}$,

$$f(t_i, t_j, t_k) = \frac{1}{t_k - t_j} \sum_{l=j}^{k-1} \Delta_l f(t_i, t_l).$$

  - I tassi a pronti e a termine sono medie ponderate dei tassi uniperiodali sui corrispondenti periodi di investimento.
- Definiamo ancora il **tasso a pronti uniperiodale** in $t_i \in \mathbb{T}$ con $t_i < \sup \mathbb{T}$, $r(t_i)$, come

$t_j = t_i$

A PRONTI

$$r(t_i) = f(t_i, t_i) = r(t_i, t_{i+1}) = -\frac{1}{\Delta_i} \log B(t_i, t_{i+1})$$

cioè $B(t_i, t_{i+1}) = \mathrm{e}^{-\Delta_i\, r(t_i)}$.

$$B(t_i, t_J) = e^{-\sum_{\ell=i}^{J-1} \Delta_\ell \underbrace{f(t_i, t_\ell)}}$$

TASSI UNIPERIODALI IN t_i

$$\sum_{\ell=i}^{J-1} \Delta_\ell f(t_i, t_\ell) = \sum_{\ell=i}^{J-1} \cancel{\Delta_\ell} \left(- \frac{1}{\cancel{\Delta_\ell}} \log \frac{B(t_i, t_{\ell+1})}{B(t_i, t_\ell)} \right)$$

$$= - \sum_{\ell=i}^{J-1} \log \frac{B(t_i, t_{\ell+1})}{B(t_i, t_\ell)} = - \log \left(\prod_{\ell=i}^{J-1} \frac{B(t_i, t_{\ell+1})}{B(t_i, t_\ell)} \right)$$

$$= - \log \left(\frac{\cancel{B(t_i, t_{i+1})}}{\underbrace{B(t_i, t_i)}_{=1}} \cdot \frac{\cancel{B(t_i, t_{i+2})}}{\cancel{B(t_i, t_{i+1})}} \cdot \cancel{\ldots} \cdot \frac{B(t_i, t_J)}{\cancel{B(t_i, t_{J-1})}} \right)$$

$$= - \log B(t_i, t_J)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{EXP}\left(- \sum_{\ell=i}^{J-1} \Delta_\ell f(t_i, t_\ell) \right) = e^{-(-\log B(t_i, t_J))} = B(t_i, t_J)$$

$$B(t_i, t_J) = e^{-\sum_{\ell=i}^{J-1} \Delta_\ell \, f(t_i, t_\ell)}$$

$$= e^{-(t_J - t_i) \cdot r(t_i, t_J)}$$

$$\Rightarrow r(t_i, t_J) = \frac{1}{t_J - t_i} \sum_{\ell=i}^{J-1} \Delta_\ell \, f(t_i, t_\ell)$$

$$= \sum_{\ell=i}^{J-1} \frac{\Delta_\ell}{t_J - t_i} \, f(t_i, t_\ell)$$

PESI DI SOMMA 1

$$\sum_{\ell=i}^{J-1} \frac{\Delta_\ell}{t_J - t_i} = \sum_{\ell=i}^{J-1} \frac{t_{\ell+1} - t_\ell}{t_J - t_i} = \frac{t_J - t_i}{t_J - t_i} = 1$$

$r(t_i, t_J)$ = MEDIA DI $f(t_i, t_i), f(t_i, t_{i+1}), \ldots, f(t_i, t_{J-1})$

Tassi Semplici Uniperiodali

- In regime di interesse semplice, si definiscono i corrispondenti tassi semplici uniperiodali a termine:

$$
\begin{aligned}
L_f(t_i, t_j) &= L_f(t_i, t_j, t_{j+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta_j}\left[\frac{B(t_i, t_j)}{B(t_i, t_{j+1})} - 1\right] \\
&= \frac{e^{\Delta_j f(t_i, t_j)} - 1}{\Delta_j},
\end{aligned}
$$

- e quello a pronti: $t_j = t_i$

$$
\begin{aligned}
L(t_i) &= L_f(t_i, t_i) = L(t_i, t_{i+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta_i}\left[\frac{1}{B(t_i, t_{i+1})} - 1\right] \\
&= \frac{e^{\Delta_i\, r(t_i)} - 1}{\Delta_i}.
\end{aligned}
$$

Money Market Instrument

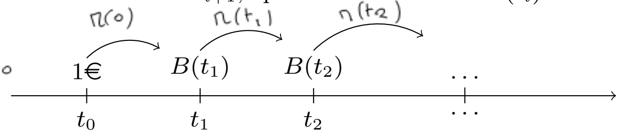
(BANK ACCOUNT)

- Chiamiamo **money market instrument** il titolo, il cui prezzo all'epoca t è indicato con $B(t)$, costruito a partire dai TCN di tutte le scadenze mediante la seguente strategia (detta roll-over):
  - ⋆ in $t_0 = 0$, 1€ viene investito in TCN con scadenza t_1, epoca in cui si riceve l'ammontare $B(t_1) = \mathrm{e}^{\Delta_0\, r(0)}$;
  - ⋆ ad ogni epoca successiva t_i, l'ammontare $B(t_i)$ viene investito in TCN con scadenza t_{i+1}, epoca in cui si riceve $B(t_i)\mathrm{e}^{\Delta_i\, r(t_i)}$;

$r(0) = r(t_0)$

$= r(t_0, t_1)$

$B(t_1) = \underbrace{B(t_0)}_{=1} \cdot e^{r(0)\Delta_0}$



- Riassumendo, tale strumento finanziario è tale che il suo prezzo verifica la $B(0) = B(t_0) = 1$ e, per $t_i \in \mathbb{T}$,

$$B(t_i) = \mathrm{e}^{\sum_{l=0}^{i-1} \Delta_l\, r(t_l)} = \prod_{l=0}^{i-1} \frac{1}{B(t_l, t_{l+1})} = \prod_{l=0}^{i-1} (1 + \Delta_l L(t_l)).$$

* IN $t_0 = 0$, COMPRO X ZCN CON SCADENZA t_1

$$X \cdot B(t_0, t_1) = 1 \Rightarrow X = \frac{1}{B(t_0, t_1)}$$

* IN t_1, RICEVO $X = \frac{1}{B(t_0, t_1)}$ €, COMPRO Y ZCN CON SCADENZA t_2

$$Y \cdot B(t_1, t_2) = \frac{1}{B(t_0, t_1)} \Rightarrow Y = \frac{1}{B(t_0, t_1) \cdot B(t_1, t_2)}$$

* ....

Tassi EURIBOR - t_i=1/12/06

$t_j - t_i$	$L(t_i, t_j)$ %
1s	3.33
2s	3.45
3s	3.52
1m	3.59
2m	3.62
3m	3.64
4m	3.68
5m	3.72
6m	3.74
7m	3.77
8m	3.79
9m	3.81
10m	3.83
11m	3.84
12m	3.85

$$B(t_i,t_j) = e^{-(t_j-t_i)\,r(t_i,t_j)} = \frac{1}{1+(t_j-t_i)\,L(t_i,t_j)}$$

Tassi EURIBOR composti - $\boxed{t_i\!=\!1/12/06}$

TASSI A TERMINE UNIPERIODALI

$t_j - t_i$	$r(t_i,t_j)$%	$f(t_i,t_{j-1})$%
1s	3.33	3.33
2s	3.45	3.57
3s	3.52	3.65
1m	3.58	3.73
2m	3.61	3.63
3m	3.62	3.66
4m	3.66	3.76
5m	3.69	3.83
6m	3.71	3.77
7m	3.73	3.87
8m	3.74	3.84
9m	3.76	3.86
10m	3.77	3.89
11m	3.77	3.81
12m	3.78	3.82

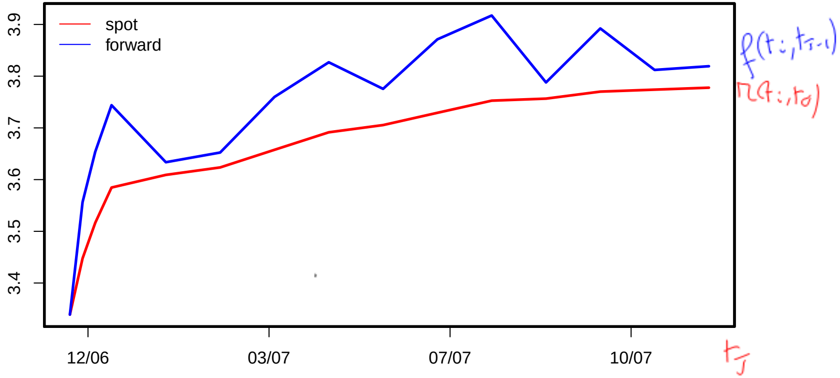
$= f(t_i, t_{j-1}, t_j)$

$t_j \rightarrow r(t_i,t_j)$ NON DECRESCENTE

$\Rightarrow r(t_i,t_j) \leq$
$\leq f(t_i,t_{j-1})$

Tassi a Pronti e a Termine

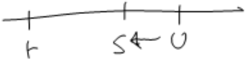
ANDAMENTO PIÙ IRREGOLARE



Scadenzario Continuo

- Nel caso $\mathbb{T} = [0, T]$ oppure $\mathbb{T} = [0, +\infty[$, per $t, s \in \mathbb{T}$ con $t \leq s < \sup \mathbb{T}$ definiamo il **tasso forward istantaneo** in t per s come (assumendo che il limite esista)

$$\boxed{f(t, s) = \lim_{u \downarrow s} f(t, s, u).}$$



- Riesce

$$f(t, s) = \lim_{u \downarrow s} \left(-\frac{1}{u - s} \log \frac{B(t, u)}{B(t, s)} \right)$$

$$= -\lim_{u \downarrow s} \frac{\log B(t, u) - \log B(t, s)}{u - s}$$

RAPPORTO INCREMENTALE DI $u \to \log B(t,u)$ NEL PUNTO s

$$\boxed{= -\frac{\partial}{\partial s} \log B(t, s)}$$

$$\boxed{= -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t, s)}{B(t, s)}.}$$

"SEMI ELASTICITÀ" DI $B(t,s)$ RISPETTO AD S = VARIAZIONE % DI $B(t,s)$

Scadenzario Continuo

▷ Interpretazione:

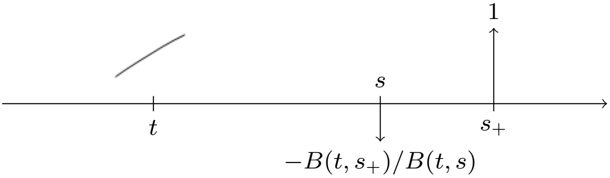
- ⋆ '$f(t,s) = f(t,s,s_+)$', cioè $f(t,s)$ è il tasso a termine istantaneo concordato in t, per un investimento che inizia in s e finisce un istante dopo (in s_+).
- ⋆ Infatti consideriamo l'operazione concordata in t, in cui acquisto (i) un TCN che scade in $s_+ = s + \Delta s$ (con $\Delta s > 0$) e vendo (ii) $B(t,s_+)/B(t,s)$ TCN con scadenza s. Il costo in t di tale operazione è 0

$\Delta s = \frac{1}{252}$

(i) + (ii)

$$\frac{B(t,s_+)}{\cancel{B(t,s)}}\cancel{B(t,s)} - B(t,s_+) = 0,$$

per cui la situazione è



$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Tassi forward istantanei

$$B(t, s_+) \approx B(t,s) + \frac{\partial}{\partial s} B(t,s) \cdot \underbrace{(s_+ - s)}_{\Delta s}$$

$$f(t,s) = -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)}{B(t,s)} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} B(t,s) = -B(t,s) \cdot f(t,s) \to \frac{\partial}{\partial s} B(t,s) = -B(t,s)\, f(t,s)$$

▷ ⋆ L'interesse generato da tale operazione è

$$\underbrace{\underbrace{\text{Montante}}_{=1} - \overbrace{\text{Capitale iniziale}}^{B(t,s_+)/B(t,s)}}_{\text{INTERESSE}} = 1 - \frac{B(t, s_+)}{B(t, s)} \quad \approx B(t,s) - f(t,s)B(t,s)\Delta s$$

$$\cong 1 - \frac{B(t, s) - f(t, s)B(t, s)\Delta s}{B(t, s)}$$

$$= f(t, s)\Delta s.$$

▷ La **struttura dei tassi a termine istantanei** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$\boxed{s \to f(t, s), \quad t, s \in \mathbb{T}, \ t \leq s < \sup \mathbb{T}.}$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine istantanei**.

Tassi forward istantanei

▷ Dai tassi istantanei si ricavano tutte le altre quantità.

- ⋆ infatti riesce, per $t,\ s \in \mathbb{T}$ con $t < s$,

$$\begin{aligned}\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v &= -\int_t^s \frac{\partial}{\partial v}\log B(t,v)\mathrm{d}v \\ &= -[\log B(t,s) - \log \overbrace{B(t,t)}^{=1}] \\ &= -\log B(t,s),\end{aligned}$$

  da cui

$$\boxed{B(t,s) = \mathrm{e}^{-\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v}.}$$

- ⋆ Noti i prezzi si possono trovare anche gli altri tassi in funzione di quelli istantanei.

Tassi forward istantanei

▷ ⋆ Si trova infatti che per $t,\ s \in \mathbb{T}$ con $t < s$

$B(t,s) = e^{-\int_t^s f(t,v)dv}$

$$\boxed{r(t,s)} = -\frac{1}{s-t}\log B(t,s)$$
$$= \boxed{\frac{1}{s-t}\int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v,}$$

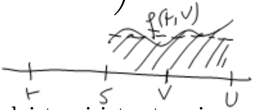
MEDIA INTEGRALE

⋆ più in generale, per $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$ con $t \le s < u$,

$r(t,u) = \frac{s-t}{u-t}\, r(t,s) + \frac{u-s}{u-t}\, f(t,s,u)$

$$\boxed{f(t,s,u)} = \frac{u-t}{u-s}r(t,u) - \frac{s-t}{u-s}r(t,s)$$
$$= \frac{1}{u-s}\left(\int_t^u f(t,v)\mathrm{d}v - \int_t^s f(t,v)\mathrm{d}v\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{u-s}\int_s^u f(t,v)\mathrm{d}v.}$$

✓



⋆ Quindi i tassi $r(t,s)$ e $f(t,s,u)$ sono le medie dei tassi istantanei sui corrispondenti periodi di investimento.

A PRONTI = SPOT
ISTANTANEO = SHORT

Tasso a pronti istantaneo

▷ Possiamo ancora definire, per $t \in \mathbb{T}$ con $t < \sup \mathbb{T}$, il **tasso a pronti istantaneo** come

s = t IN f(t, s)

$$\begin{aligned} r(t) &= f(t,t) \\ &= \lim_{s \downarrow t} r(t,s) \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial s} \log B(t,s)\right]_{s=t} \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)\right]_{s=t} \end{aligned}$$

$f(t,s) = -\dfrac{\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)}{B(t,s)}$

$B(t,t) = 1$

quindi è il tasso che remunera un investimento che inizia in t e finisce immediatamente dopo (in '$t_+ = t + \Delta t$').

Tasso semplici istantanei

▷ Se partiamo dai tassi semplici e definiamo in maniera analoga a prima i tassi istantanei

TASSI (SEMPLICI) FORWARD ISTANTANEI

$$\underline{L_f(t,s) = \lim_{u \downarrow s} L_f(t,s,u)}, \quad L(t) = L_f(t,t),$$

si trova

$$\begin{aligned} \boxed{L_f(t,s)} &= \lim_{u \downarrow s} L_f(t,s,u) \\ &= \lim_{u \downarrow s} \frac{B(t,s) - B(t,u)}{(u-s)B(t,u)} = -\lim_{u \downarrow s} \frac{B(t,u) - B(t,s)}{(u-s)\,B(t,u)} \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)}{B(t,s)} \\ &= \boxed{f(t,s)} \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial s} B(t,s)$

$B(t,s)$

e quindi anche $L(t) = r(t)$. I tassi istantanei sono gli stessi in regime di interesse composto e semplice.

$L_f(t,S,U)$:

$$B(t,U) = B(t,S)\,\frac{1}{1+(U-S)L_f(t,S,U)}$$

$$\Rightarrow 1+(U-S)L_f(t,S,U) = \frac{B(t,S)}{B(t,U)}$$

$$\Rightarrow L_f(t,S,U) = \frac{1}{U-S}\left[\frac{B(t,S)}{B(t,U)} - 1\right]$$

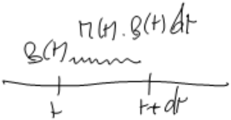
$$= \frac{1}{U-S}\,\frac{B(t,S)-B(t,U)}{B(t,U)}$$

Money Market Instrument

- Possiamo infine definire il **money market instrument** o **conto bancario** come il titolo (supposto esistente), il cui prezzo all'epoca t si indica con $B(t)$, costruito a partire dai TCN relativi a tutte le scadenze:
  - ⋆ si parte con 1€ all'epoca 0;
  - ⋆ in ogni istante t il valore di questo titolo viene investito in TCN che scadono immediatamente dopo, e così via. Formalmente, il prezzo del titolo verifica

$$\begin{cases} B(0) = 1 \\ \mathrm{d}B(t) = B(t)r(t)\mathrm{d}t, \end{cases}$$

$B(t+dt) - B(t)$



  - ⋆ quindi si trova

$$\boxed{B(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t r(v)\mathrm{d}v}.}$$

STRUTTURA PER SCADENZA DETERMINISTICA

- all'istante di valutazione $t = 0$ conosciamo la struttura per scadenza corrente ma non evidentemente la sua evoluzione futura, cioè $B(s, u)$ (e quindi $r(s, u)$, $r(s)$, $B(s)$, ...) con $0 < s \leq u$ sono variabili aleatorie.
- se assumiamo che le varie quantità $B(s, u)$ siano in realtà **deterministiche** (non aleatorie) allora, in assenza di opportunità di arbitraggio, le seguenti proprietà equivalenti devono sussistere
  1. $B(t, u) = B(t, s)B(s, u)$ per ogni $t \leq s \leq u$ SCINDIBILITÀ
  2. $\boxed{f(t, s, u) = r(s, u)}$ per ogni $t \leq s < u$ TASSI A TERMINE = TASSI A PRONTI FUTURI
  3. $f(t, s) = r(s)$ per ogni $t < s$
  4. $B(t, s) = \frac{B(t)}{B(s)}$

  e quindi

$$B(t, s) = \mathrm{e}^{-\sum_{t \leq t_j < s} \Delta_j r(t_j)}$$

nel caso di scadenzario discreto, mentre nel caso di scadenzario continuo

$$\boxed{B(t, s) = \mathrm{e}^{-\int_t^s r(v)\mathrm{d}v}}$$

$r(v) = \delta(v)$ INTENSITÀ ISTANTANEA DI INTERESSE

STRUTTURA PER SCADENZA DETERMINISTICA

- che la (1) (o la (2)) segue dall'assenza di arbitraggi è immediato essendo $B(s,u)$ (o $r(s,u)$) noto in $t < s$ e quindi deve essere

$$B(t,u) = B(t,s)B(s,u) = B(t,s)\mathrm{e}^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

cioè l'attualizzazione tra s e u avviene al tasso $r(s,u)$ o $f(t,s,u)$, che devono quindi coincidere.

$$\int_t^s = \int_0^s - \int_0^t$$

la (2) implica la (3), basta prendere $u = s+$ nel caso di scadenzario discreto e $\lim_{u \downarrow s}$ in caso di scadenzario continuo.
la (4) segue poi dalla (3), essendo ad esempio nel caso di scadenzario continuo

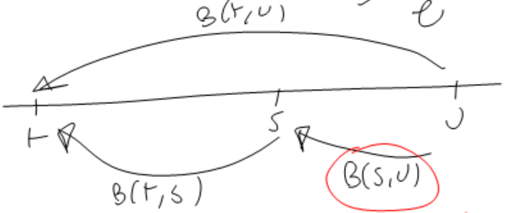
$$B(t,s) = \mathrm{e}^{-\int_t^s \overbrace{f(t,u)}^{\overset{(3)}{=} r(u)} \mathrm{d}u} = \mathrm{e}^{-\int_t^s r(u)\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^{-\int_0^s r(v)dv} / \mathrm{e}^{-\int_0^t r(v)dv} = \frac{B(t)}{B(s)}$$

$$\frac{1/B(s)}{1/B(t)}$$

per finire, è subito visto che la (4) implica la (1):

$$B(t,u) \overset{(4)}{=} \frac{B(t)}{B(u)} = \underbrace{\frac{B(t)}{B(s)}}_{B(t,s)} \underbrace{\frac{B(s)}{B(u)}}_{B(s,u)} = B(t,s)B(s,u).$$

$$(1) \quad B(t,U) = B(t,S)\cdot \underbrace{B(S,U)}_{= e^{-(U-S)\cdot r(S,U)}}$$



NOTO IN t!

IN PRECEDENZA, ABBIAMO DEFINITO I TASSI A TERMINE COME

$$B(t,U) = B(t,S)\cdot e^{-(U-S)\cdot f(t,S,U)}$$

$$\Rightarrow f(t,S,U) = r(S,U) \qquad (2)$$

(3) $f(t,s) = \underbrace{r(s)}_{\text{TASSO A PRONTI "SHORT"}}$

(2) => (3)

$$f(t,s) = \lim_{u \downarrow s} f(t,s,u) \overset{(2)}{=} \lim_{u \downarrow s} r(s,u)$$

$$= r(s)$$

Un Modello Parametrico: Nelson-Siegel (1987)

→ MODELLO PER LA CURVA DEI TASSI IN UN DATO ISTANTE

- ▷ $\mathbb{T} = [0, \infty[$.
  - ⋆ Fissiamo $t \geq 0$; il modello specifica la forma dei tassi forward istantanei all'epoca t per ogni scadenza successiva:

$$\boxed{f(t,s) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{e}^{-(s-t)/a} + \beta_2 \frac{s-t}{a} \mathrm{e}^{-(s-t)/a},}$$

    con $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Il modello dipende da 4 parametri.
  - ⋆ $f(t,s)$ dipende solo dall'ampiezza del periodo $s-t$. Nel seguito possiamo allora considerare $t = 0$:

$$\boxed{f(0,t) = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{e}^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a} \mathrm{e}^{-t/a}.}$$

- ▷ Questo modello e sue varianti vengono usato frequentemente per descrivere e/o stimare la curva dei tassi.
- ▷ https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html

. . . Nelson-Siegel

▷ Deriviamo le altre quantità:

⋆ i tassi a pronti sono dati da

$$
\begin{aligned}
r(0,t) &= \frac{1}{t}\int_0^t f(0,u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\beta_0+\beta_1 e^{-\frac{u}{a}} + \overbrace{\beta_2 \frac{u}{a} e^{-\frac{u}{a}}}^{\text{PER PARTI}}\Big)\,du \\
&= \beta_0 + (\beta_1+\beta_2)\frac{1-\mathrm{e}^{-t/a}}{t/a} - \beta_2 \mathrm{e}^{-t/a}.
\end{aligned}
$$

⋆ Più in generale, i tassi forward per l'intervallo $[s,u]$ sono

$$
\begin{aligned}
f(0,s,u) =& \frac{1}{u-s}\int_s^u f(0,v)\,\mathrm{d}v \\
=& \beta_0 + \frac{\beta_1+\beta_2}{(u-s)/a}\left(\mathrm{e}^{-s/a}-\mathrm{e}^{-u/a}\right) \\
&+ \frac{\beta_2}{u-s}\left(s\mathrm{e}^{-s/a} - u\mathrm{e}^{-u/a}\right).
\end{aligned}
$$

... Nelson-Siegel

- ⋆ Infine, i prezzi dei TCN (la 'discount function') sono

$$\boxed{B(0,t)} = \mathrm{e}^{-t\, r(0,t)}$$
$$= \mathrm{e}^{-t\beta_0 - (\beta_1+\beta_2)a(1-\mathrm{e}^{-t/a}) + \beta_2 t \mathrm{e}^{-t/a}}$$

- Osserviamo che, fissato a, i tassi (a pronti o a termine) dipendono da β_0, β_1, β_2 in maniera lineare $\Rightarrow$ regressione lineare può essere usata per stimare i parametri (con a fissato).
- Interpretazione dei parametri:
  - ⋆ $f(0,t)$ è somma di tre componenti:

$$f(0,t) = c_1(t) + c_2(t) + c_3(t),$$

con

$$c_1(t) = \beta_0, \quad c_2(t) = \beta_1 \mathrm{e}^{-t/a}, \quad c_3(t) = \beta_2 \frac{t}{a} \mathrm{e}^{-t/a}.$$

STIMA "SEMPLICE" DEL MODELLO DI NELSON - SIEGEL

$\underline{\underline{a}}$ FISSATO

DATI $\hat{r}(0,t_1), \hat{r}(0,t_2), \_\_\_, \hat{r}(0,t_n)$

REGRESSIONE DI

$$r^{NS}(0,t_i) = \beta_0(- -) + \beta_1(\_\_\_) + \beta_2(\_\_\_)$$

RISPETTO A $\hat{r}(0,t_i)$

$$\min_{\beta_0,\beta_1,\beta_2} \sum_{i=1}^{n} w_i\Big(\hat{r}(0,t_i) - \underbrace{r^{NS}(0,t_i)}_{\text{LINEARE IN } \beta_0,\beta_1,\beta_2}\Big)^2$$

$$\longrightarrow \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$$

POI SI VARIA $a > 0$

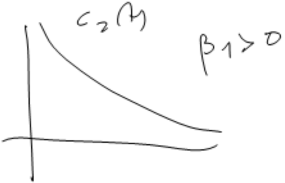
. . . Nelson-Siegel

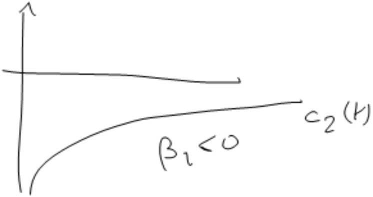
$C_1(t) = \beta_0$, $C_2(t) = \beta_1 e^{-\frac{t}{a}}$, $C_3(t) = \beta_2 \cdot \frac{t}{a} \cdot e^{-\frac{t}{a}}$

- ▷ Riesce
  - ⋆ c_1 è costante: $\lim_{t\to 0} c_1(t) = \lim_{t\to\infty} c_1(t) = \beta_0$;
  - ⋆ c_2 è monotona decrescente se $\beta_1 > 0$, crescente se $\beta_1 < 0$, (costante se $\beta_1 = 0$).
    Inoltre $\lim_{t\to 0} c_2(t) = c_2(0) = \beta_1$ e $\lim_{t\to\infty} c_2(t) = 0$.
  - ⋆ Se $\beta_2 = 0$, $c_3(t)$ è costante. Se $\beta_2 > 0$, c_3 cresce fino a $t^* = a$ e poi decresce (t^* è punto di massimo assoluto). Se invece $\beta_2 < 0$, c_3 decresce fino a t^* e poi è crescente (t^* punto di minimo assoluto). Inoltre riesce $\lim_{t\to 0} c_3(t) = \lim_{t\to\infty} c_3(t) = 0$.

    $\underbrace{\frac{t}{a}}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-\frac{t}{a}}}_{\to 0} \to 0$
- ▷ Di conseguenza, si può interpretare
  - ⋆ c_1 come componente di lungo termine (è l'unica che ha limite non nullo in ∞), $C_2(t), C_3(t) \to 0$ QUANDO $t \to +\infty$
  - ⋆ c_2 come componente di breve termine (il limite in 0 è non nullo) $C_3(t) \to 0$ QUANDO $t \to 0$
  - ⋆ e c_3 come componente di medio periodo (ha limite 0 sia in 0 che in ∞).

$C_2(t)$

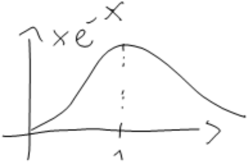


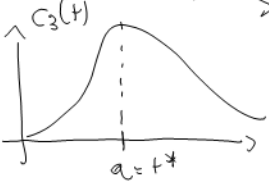


$C_3(t) = \beta_2 \frac{t}{a} e^{-\frac{t}{a}}$

$f(x) = x e^{-x} \qquad f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x} \gtreqless 0$

$(x = \frac{t}{a}) \qquad \Leftrightarrow x \lesseqgtr 1$

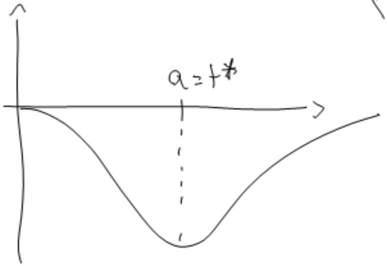




$\beta_2 > 0$

$\underline{c_3(t)}$

$\beta_2 < 0$



. . . Nelson-Siegel

▷ Osserviamo ancora che

- ⋆ Il tasso istantaneo per una scadenza 'infinita' è

$$f(0,\infty) = \lim_{t\to\infty} f(0,t) = \beta_0.$$

"TASSO (FORWARD) A LUNGO"

- ⋆ Il tasso istantaneo a pronti ('spot rate') è

SHORT

"TASSO A BREVE"

$$r(0) = f(0,0) = r(0,0) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \beta_0 + \beta_1.$$

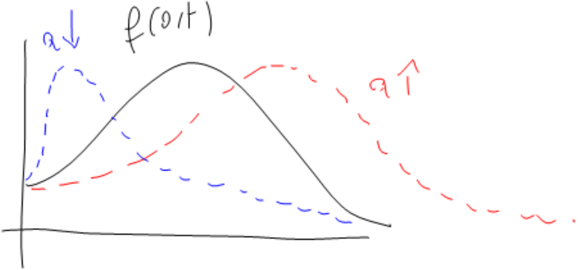
β_1 = "SPREAD TASSO BREVE VS TASSO A LUNGO"

t/a

- ⋆ Il parametro a è un parametro di ~~posizione~~ SCALA: non cambia il 'tipo di andamento' della curva dei tassi, ma la 'comprime' (se a piccolo) o 'allunga' (se a grande) infatti, è $f(0,t;a) = f(0,kt;ka)$.

▷ Per $r(0,t)$ si possono fare le stesse osservazioni che per $f(0,t)$. In particolare $r(0,\infty) = \beta_0$, $r(0,0) = r(0) = \beta_0 + \beta_1$, e le forme di $s \to r(t,s)$ possono essere costanti, monotone o campanulari.

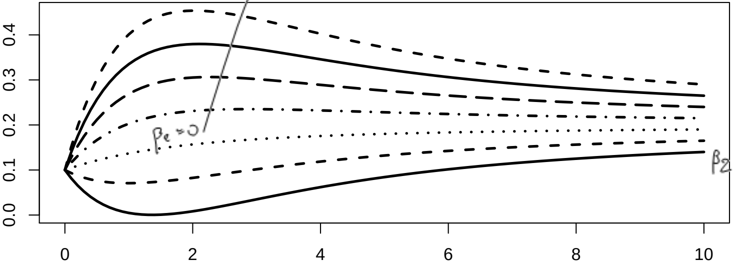
▷ In **R**: pacchetti **fBonds**, **NMOF**, **YieldCurve**, **termstrc**


f(θ,t)
a↓
a↑

. . . Nelson-Siegel

$$r(0,t) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1-e^{-t/a}}{t/a}$$

$r(0,t)$



$\beta_2 = -0.5$

MAX/MIN di $C_3(t)$

$r(0,\infty)$

$r(0) - r(0,\infty)$

$\Rightarrow r(0) = 10\%$

Figura: $r(0,t)$: $\underbrace{a = 1}$, $\underbrace{\beta_0 = 0.2}$, $\underbrace{\beta_1 = -0.1}$,
$\beta_2 = -0.5,\ -0.25,\ 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$

. . . Nelson-Siegel

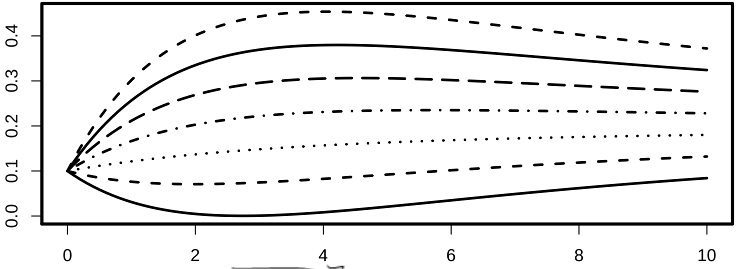


Figura: $r(0, t)$: $a = 2$, $\beta_0 = 0.2$, $\beta_1 = -0.1$,
$\beta_2 = -0.5, \ -0.25, \ 0, \ 0.25, \ 0.5, \ 0.75, \ 1$

. . . Nelson-Siegel

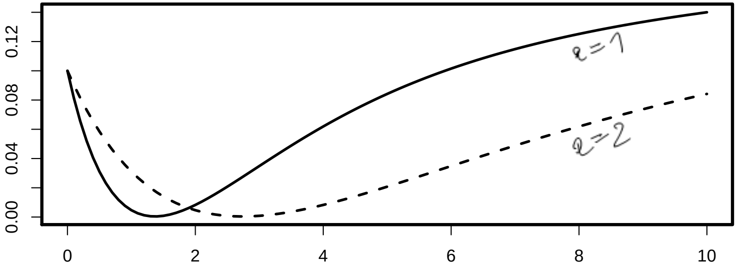


Figura: $r(0,t)$: $a = 1,\ 2,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,\ \beta_2 = -0.5$

. . . Nelson-Siegel

$r(0,t) = \tilde{c}_1(t) + \tilde{c}_2(t) + \tilde{c}_3(t)$

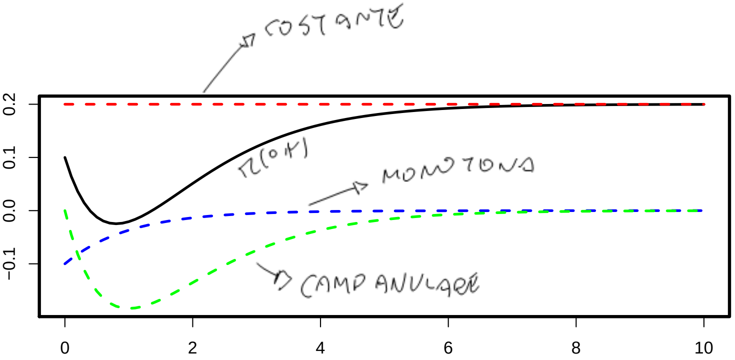
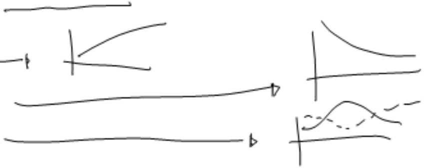


Figura: $r(0,t)$: $a = 1,\ \cancel{2},\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = -0.1,\ \beta_2 = -0.5$

Proprietà Empiriche della Curva dei Tassi

- Le curve dei tassi che si osservano in pratica rientrano fra le seguenti forme:

NS
  - ⋆ **piatta** (flat);
  - ⋆ **crescente** (normale);
  - ⋆ **decrescente** (invertita);
  - ⋆ **campanulare** (humped);
  - ⋆ **a S** o a cucchiaio.



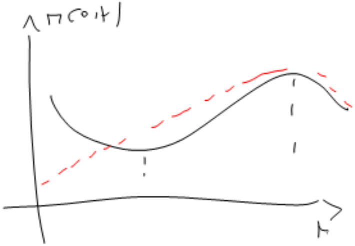
- La famiglia di curve dei tassi del tipo Nelson-Siegel cattura le prime 4 forme.
- Al fine di riprodurre anche l'ultima forma, sono state proposte alcune estensioni di Nelson-Siegel, in particolare il modello di Svensson:

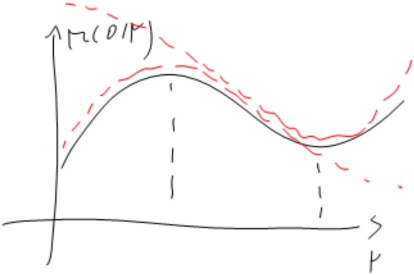
$a_1 \neq a$

$$f(0,t) = \overbrace{\beta_0 + \beta_1 e^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a} e^{-t/a}}^{NS} + \overbrace{\beta_3 \frac{t}{a_1} e^{-t/a_1}}^{C_4(t)}.$$

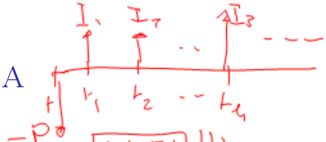
2 TERMINI CAMPANULARI
=> FORMA A "S"

A "S" O CUCCHIAIO;





Valore di un Flusso di Cassa



NOTI !!!

- ▷ Data la struttura per scadenza dei tassi ad un'epoca $t \in \mathbb{T}$, deriviamo il prezzo di un titolo che paga flussi pari a $I_h \geq 0$ in t_h, $h = 1, \ldots, n$, con $t < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Indicato con P tale prezzo, deve essere

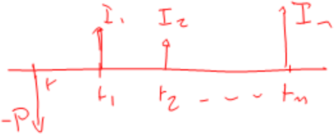
VALE ANCHE SE $I_h < 0$

$$\boxed{P = \underbrace{\sum_{h=1}^{n} I_h B(t, t_h)}_{\text{SOMMA DEI FLUSSI SCONTATI}} = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t,t_h)(t_h - t)}.}$$

STRUTTURA PER SCADENZA

- ▷ Infatti la strategia in cui acquisto in t la quantità I_h di TCN con scadenza t_h $(h = 1, \ldots, n)$ produce gli stessi flussi di cassa del titolo in questione, quindi per la legge del prezzo unico il prezzo del titolo deve essere uguale al valore della strategia.
- ▷ Il valore del flusso dipende quindi inversamente da un certo numero di punti sulla curva dei tassi (**'fattori di rischio'**).

	ACQUISTO DEL TITOLO IN t		ACQUISTO IN t, I_1 CON SCADENZA t_1, I_2 CON SCADENZA t_2 ..., I_n CON SCADENZA t_n
t	$-P$	$=$ LEGGE DEL PREZZO UNICO	$-\sum_{i=1}^{n} I_i \cdot B(t,t_i)$
t_1	$+I_1$	$=$	$+I_1$
t_2	$+I_2$	$=$	$+I_2$
t_3	$+I_3$	$=$	$+I_3$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
t_k	$+I_k$	$=$	$+I_k$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
t_n	$+I_n$	$=$	$+I_n$



Yield to Maturity

IRR

▷ L'Yield to Maturity (YTM, Redemption Yield, Rendimento a Scadenza) è **il tasso interno di rendimento** (supposto esistente) r dell'operazione in cui si paga P in t e si riceve la sequenza di flussi I_h in t_h, $h = 1, \ldots, n$:

TIR

$I_h \geq 0$

$$\boxed{P = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t,t_h)(t_h-t)} = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t_h-t)}.}$$

REGIME ESPONENZIALE
INTENSITÀ COSTANTE

▷ Si tratta quindi di un valore che sintetizza (una 'media') i tassi $r(t, t_h)$, $h = 1, \ldots, n$ e quindi verifica

$$\min_h r(t, t_h) \leq r \leq \max_h r(t, t_h).$$

▷ Per un TCN che scade in $t_n = s$, riesce $r = r(t, s)$.

DATI $t, t_1, \ldots, t_n, I_1, I_2, \ldots I_n$

SE DEFINIAMO

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{h=1}^{n} I_h \, e^{-(t_h - t) \cdot x_h}$$

ALLORA, L'YTM r È SOLUZIONE DI

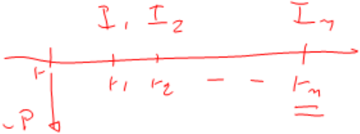
$$f(r(0,t_1), r(0,t_2), \ldots, r(0,t_n)) = f(r, r, r, \ldots, r)$$

$\Rightarrow$ r È UNA MEDIA DI $r(0,t_1), \ldots, r(0,t_n)$

$I_h \geq 0 \Rightarrow f$ È MONOTONA IN OGNUNO DEGLI ARGOMENTI

$$\Rightarrow \min_h r(0,t_h) \leq r \leq \max_h r(0,t_h)$$

. . . Yield to Maturity



▷ Ipotesi sottostante l'YTM è che

- ⋆ si detenga il titolo fino a scadenza. → SI PERCEPISCONO TUTTI I FLUSSI
- ⋆ si possa reinvestire al tasso r fino all'ultima epoca ogni cash-flow ricevuto.

Infatti, dalla definizione di YTM si deduce che

$P = \sum_h I_h e^{-r(t_h - t)} \;/\cdot\; e^{r(t_n - t)}$

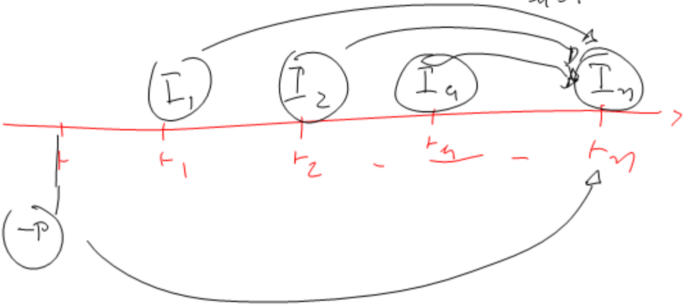
$$P e^{r(t_n - t)} = \sum_{h=1}^{n} I_h e^{r(t_n - t_h)}.$$

▷ Difetto del YTM è quindi l'assumere una struttura per scadenza "piatta" dei tassi e trascurare di conseguenza il rischio di reinvestimento.

▷ Tuttavia l'YTM è comunemente usato come misura del rendimento di un'obbligazione.

▷ Se si ragiona in termini di tassi invece che di intensità, indicato con i il tasso interno di rendimento, la relazione è $i = e^r - 1$.

$$\sum_{q=1}^{n} I_q \, e^{r(t_n - t_q)}$$ *



$$P \, e^{r(t_n - t)}$$ *

. . . Coupon Bond

ALL'EMISSIONE (OPPURE APPENA PAGATA UNA CEDOLA)

- Nel caso di un coupon bond, sia $I_h = I$ per $h = 1, \ldots, n-1$ e $I_n = I + C$, dove I è la cedola e C il nominale; inoltre sia $t_h = t + h\Delta$ per $h = 1, \ldots, n$.
- Il coupon bond **quota alla pari** (sotto, sopra) se e solo se l'YTM (tasso su base periodale) $i_\Delta = (1+i)^\Delta - 1$ coincide (è maggiore, minore) con il tasso cedolare I/C.

  $\Delta \to$

  - ⋆ Riesce infatti, ponendo $v = (1+i)^{-\Delta} = (1+i_\Delta)^{-1}$,

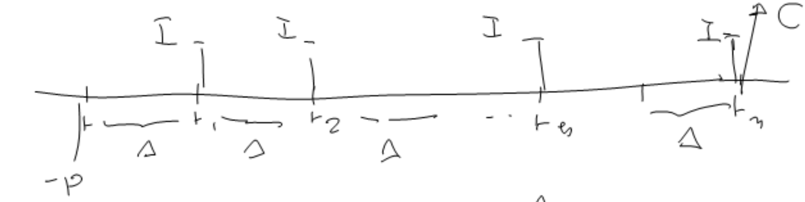
$$P = I \sum_{h=1}^{n} (1+i)^{-h\Delta} + C(1+i)^{-n\Delta}$$

$$= (1 - v^n)\left(I \frac{v}{1-v} - C\right) + C.$$

  - ⋆ Quindi $P = C$ se e solo se $I/C = (1-v)/v$ e quindi se e solo se $i_\Delta = I/C$.

  $\Delta = 1 \quad i_\Delta = i \qquad I/C$

- Ad esempio, un bond con cedole annuali pari a 3%, nominale 100 e scadenza 10 anni quota alla pari (sotto, sopra) se e solo se l'YTM è $i = 3\%$ $(>, <)$ $(r = 2.96\%)$.



$i \qquad i_\Delta \qquad 1 + i_\Delta = (1+i)^\Delta$

$$P = \sum_{h=1}^{n} I\,(1+i)^{-h\Delta} + C \cdot (1+i)^{-n\Delta}$$

$h\Delta = t_h - t \qquad\qquad n\Delta = t_n - t$

$t_h = t + h \cdot \Delta$

$$P = I \sum_{h=1}^{n} \underbrace{(1+i_\Delta)}_{v}{}^{-h} + C\,\underbrace{(1+i_\Delta)}_{v}{}^{-n}$$

$$v \equiv (1+i_\Delta)^{-1} \quad (\equiv v_\Delta)$$

$$\underline{\underline{P}} = I \sum_{k=1}^{n} v^k + C \cdot v^n$$

$$= I \left(v + v^2 + \cdots + v^n \right) + C v^n$$

$$= I v \underbrace{\left(1 + v + \cdots + v^{n-1} \right)}_{\frac{1-v^n}{1-v}} + C v^n$$

$$= I v \frac{1-v^n}{1-v} + C v^n - C + \underline{\underline{C}}$$

$$= \underline{\underline{C}} + (1-v^n)\left(I \frac{v}{1-v} - C \right)$$

$$P \gtreqless C \iff (1-v^n)\left(I \frac{v}{1-v} - C \right) \gtreqless 0$$

$$1 - v^n > 0 \quad \text{si} \quad i_\Delta > 0 \quad (i > 0)$$

$$I \frac{v}{1-v} - C \gtreqless 0$$

$$\frac{v}{1-v} \gtreqless \frac{C}{I} \iff \underbrace{\frac{1-v}{v}}_{= i_\Delta} \lesseqgtr \frac{I}{C}$$

$$\frac{1-v}{v} = \frac{1 - \frac{1}{1+i_\Delta}}{\frac{1}{1+i_\Delta}} = \frac{\frac{1+i_\Delta-1}{\cancel{1+i_\Delta}}}{\frac{1}{\cancel{1+i_\Delta}}} = i_\Delta$$

$$P \gtreqless C \iff \boxed{i_\Delta \lesseqgtr \frac{I}{C}}$$

Par Rate

DATA LA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI/PREZZI $B(t,t_h)$

- Si chiama **par rate** (par yield, tasso di parità) relativo ad una certa scadenza t_n e frequenza Δ il tasso nominale c tale che la corrispondente obbligazione con nominale $C = 100$, che paga cedole $I = c\Delta 100$ in $t_h = t + h\Delta$, quota alla pari.

FITTIZIA

- In altri termini il tasso cedolare $c\,\Delta$ è il YTM su base periodale dell'obbligazione.

TASSO NOMINALE c

TASSO CEDOLARE $c \cdot \Delta$

- Data la struttura per scadenza dei tassi, deve essere

QUOTA ALLA PARI →

$$\overset{P_u}{\cancel{100}} = \underbrace{I}_{c\cdot\Delta\cdot\cancel{100}} \sum_{i=1}^{n} B(t,t_i) + \cancel{100} B(t,t_n), \quad \rightarrow c?$$

da cui si ricava

$$\boxed{c \equiv c(t,n) = \frac{1 - B(t,t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)}}.$$

- Per $t \in \mathbb{T}$ fissato, la **struttura per scadenza dei par rate** è

$$n \to c(t,n); \;\; n \geq 1.$$

n = NUMERO DI CEDOLE

Il suo grafico è la curva dei par rates.

Par Rate

- Riesce (ponendo $t_0 = t$)
  - $$\begin{aligned} c(t,n) &= \frac{1 - B(t,t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{B(t,t_j)}{\sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} \frac{B(t,t_{j-1}) - B(t,t_j)}{\Delta B(t,t_j)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{B(t,t_j)}{\sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} L_f(t,t_{j-1},t_j). \end{aligned}$$
  - Quindi il par rate è una media pesata dei tassi a termine semplici; è allora
$$\min_i L_f(t,t_{i-1},t_i) \le c(t,n) \le \max_i L_f(t,t_{i-1},t_i).$$

$$\boxed{C(t,n)} = \frac{1 - B(t,t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} = \frac{1 - B(t,t_1) + B(t,t_1) - B(t,t_2) + B(t,t_2) - \dots - B(t,t_n)}{\Delta \sum_{1}^{n} B(t,t_h)}$$

$t_0 = t \rightarrow$

$$= \sum_{J=1}^{n} \frac{B(t,t_{J-1}) - B(t,t_J)}{\Delta \sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)} =$$

$$= \sum_{J=1}^{n} \underbrace{\frac{B(t,t_J)}{\sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)}}_{\text{PESI DI SOMMA } 1} \cdot \underbrace{\frac{B(t,t_{J-1}) - B(t,t_J)}{\Delta\, B(t,t_J)}}_{L_f(t,t_{J-1},t_J)}$$

$$\boxed{= \sum_{J=1}^{n} w_J \cdot L_f(t,t_{J-1},t_J)}$$

$$B(t,t_J) = B(t,t_{J-1}) \cdot \frac{1}{1+\underbrace{(t_J - t_{J-1})}_{\Delta} L_f(t,t_{J-1},t_J)}$$

$$\Rightarrow L_f(t,t_{J-1},t_J) = \frac{B(t,t_{J-1}) - B(t,t_J)}{\Delta\, B(t,t_J)}$$

Par Rate

▷ Dall'espressione dei par rate come media pesata, si ottiene inoltre che il par rate è une media pesata del par rate precedente e del tasso semplice e a termine corrente

$$\boxed{c(t,n+1) = \alpha c(t,n) + (1-\alpha) L_f(t,t_n,t_{n+1}),} \quad \alpha = \frac{\sum_{h=1}^{n} B(t,t_h)}{\sum_{h=1}^{n+1} B(t,t_h)},$$

▷ quindi se la struttura per scadenza dei par rates è crescente (decrescente) allora sono dominati dai (dominano i) tassi a termine corrispondenti. con n

$$C(t,n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{B(t,t_j)}{\sum_{1}^{n} B(t,t_a)} L_f(t,t_{j-1},t_j) \quad *$$

$$C(t,n+1) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{B(t,t_j)}{\sum_{1}^{n+1} B(t,t_a)} L_f(t,t_{j-1},t_j)$$

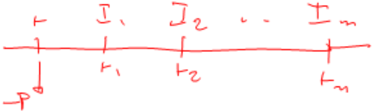
NON DIPENDE DA J

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{B(t,t_j)}{\sum_{1}^{n} B(t,t_a)} L_f(t,t_{j-1},t_j)}_{* \; = C(t,n)} \cdot \frac{\sum_{1}^{n} B(t,t_a)}{\sum_{1}^{n+1} B(t,t_a)} +$$

$$+ \frac{B(t,t_{n+1})}{\sum_{1}^{n+1} B(t,t_a)} L_f(t,t_n,t_{n+1})$$

$$= \underbrace{\frac{\sum_{a=1}^{n} B(t,t_a)}{\sum_{a=1}^{n+1} B(t,t_a)}}_{\alpha} C(t,n) + \overbrace{\frac{B(t,t_{n+1})}{\sum_{a=1}^{n+1} B(t,t_a)}}^{=1-\alpha} L_f(t,t_n,t_{n+1})$$

. . . Yield to Maturity



- ▷ È comune ragionare in termini di prezzo di un titolo come funzione (decrescente) dell'YTM:

$I_h \geq 0$

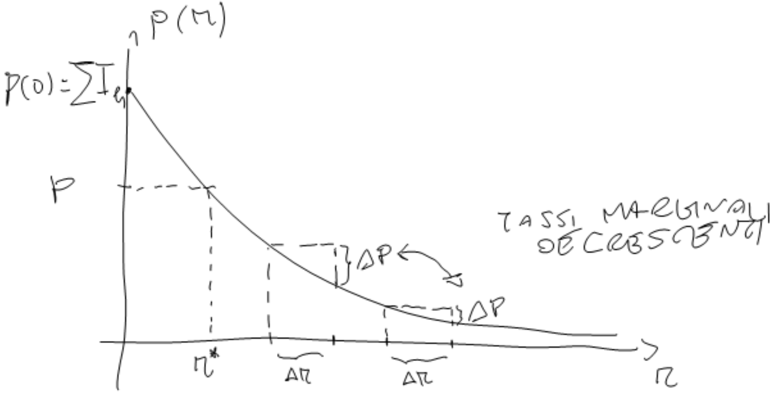
$$\boxed{P \equiv P(r) = \sum_{h=1}^{n} I_h \mathrm{e}^{-r(t_h - t)}.}$$

- ▷ Come si comporta P al variare di r?
  - ⋆

$$P'(r) = -\sum_{h=1}^{n} \underbrace{I_h}_{>0}\underbrace{(t_h - t)}_{>0}\underbrace{\mathrm{e}^{-r(t_h - t)}}_{>0} < 0$$

$$P''(r) = \sum_{h=1}^{n} \underbrace{I_h}_{>0}\underbrace{(t_h - t)^2}_{>0}\underbrace{\mathrm{e}^{-r(t_h - t)}}_{>0} > 0$$

  - ⋆ Quindi P è funzione **decrescente convessa** dell'YTM (r). Al crescere del YTM il prezzo decresce con tassi marginali decrescenti
  - ⋆ Essendo P continua e $\lim_{r \to \infty} P(r) = 0$ e $P(0) = \sum_h I_h$ si deduce che l'YTM esiste unico se $0 < P < \sum_h I_h$.



$r = YTM \Leftrightarrow P(r) = P$

. . . Yield to Maturity

▷ ⋆ La convessità implica che una variazione positiva dell'YTM comporta una variazione (negativa) del prezzo in valore assoluto minore della variazione (positiva) corrispondente ad un uguale variazione di segno negativo dell'YTM:

$$P(r) - P(r + \Delta r) < P(r - \Delta r) - P(r).$$

VAR. ASSOLUTE

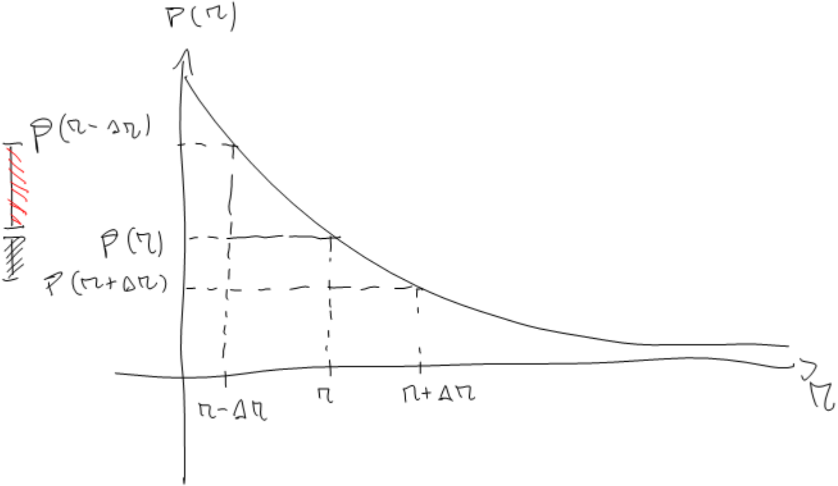
⋆ Dividendo per $P(r)$, lo stesso risultato si applica alle variazioni percentuali (variazioni/prezzo):

$$\frac{P(r) - P(r + \Delta r)}{P(r)} < \frac{P(r - \Delta r) - P(r)}{P(r)}.$$

VAR. PERCENTUALI

VAR % $(r, r+\Delta r)$

VAR % $(r-\Delta r, r)$



$$P(r) - P(r+\Delta r) < P(r-\Delta r) - P(r)$$

Duration (Macaulay, 1938)

- Per calcolare approssimativamente l'entità delle variazioni assolute e percentuali del prezzo si introducono le seguenti quantità: la DOLLAR DURATION, $\$D$ e la DURATION D, definite da

$$\boxed{\$D = -P'(r)}, \quad \boxed{D = -\frac{P'(r)}{P(r)} = -(\log P(r))'}$$

: SEMI ELASTICITÀ DI P(r)

- La prima **approssima** la variazione di P, la seconda la sua variazione percentuale, quando il YTM varia di una quantità 'piccola' Δr:

VAR.

$$\boxed{\Delta P(r)} = P(r + \Delta r) - P(r) \cong P'(r)\Delta r = \boxed{-\$D\ \Delta r},$$

VAR %

$$\boxed{\frac{\Delta P(r)}{P(r)}} = \frac{P(r + \Delta r) - P(r)}{P(r)} \cong \frac{P'(r)\Delta r}{P(r)} = \boxed{-D\ \Delta r}$$

. . . Duration

▷ La Duration può essere interpretata come media temporale:

$$\boxed{D} = -\frac{P'(r)}{P(r)}$$

PESO

$$= \frac{\sum_{h=1}^{n} I_h (t_h - t) e^{-r(t_h - t)}}{P(r)}$$

$$= \boxed{\sum_{h=1}^{n} w_h (t_h - t),}$$

$$\sum \frac{I_h e^{-r(t_h - t)}}{P(r)} = 1$$

con $w_h = I_h \mathrm{e}^{-r(t_h - t)} / P(r)$.

▷ Si tratta quindi della media delle vite a scadenza dei flussi pesate con i flussi scontati usando l'YTM.

▷ Riesce quindi

$$\boxed{t_1 - t \leq D \leq t_n - t,}$$

e l'uguaglianza vale se e solo se c'è una sola scadenza. Quindi per un TCN la duration coincide con la vita a scadenza. $D = t_n - t$

$$P(r+\Delta r) \simeq P(r) + P'(r)\cdot\Delta r + \frac{1}{2}P''(r)(\Delta r)^2$$

CONVEXITY

$$\Delta P(r) = P(r+\Delta r) - P(r) \simeq \underbrace{P'(r)\Delta r}_{-\$D\cdot\Delta r} + \frac{1}{2}\underbrace{P''(r)}_{\$CONV}\cdot(\Delta r)^2$$

- L'approssimazione 'del primo ordine' che si ottiene con la duration può essere migliorata considerando un termine di 'secondo ordine';
  - questo corrisponde ad approssimare con un polinomio di secondo grado (parabola) piuttosto che di primo grado (retta).
  - Si ha allora

$$\boxed{\Delta P(r) \cong -\$D\ \Delta r + \frac{1}{2}\$Conv\ (\Delta r)^2,}$$

VAR % :

$$\boxed{\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \cong -D\ \Delta r + \frac{1}{2}Conv\ (\Delta r)^2.}$$

  - $Conv = P''(r)/P(r)$ è la CONVEXITY e $\$Conv = P''(r)$ è la DOLLAR CONVEXITY.
- La convexity è il momento secondo (ponderato) delle vite a scadenza:

$$Conv = \sum_{h=1}^{n} w_h(t_h - t)^2.$$

MISURA DI DISPERSIONE

→ COLLEGATA ALLA VARIANZA DI $t_1 - t, \dots, t_m - t$

. . . Duration

$i = e^r - 1$

- Se ragioniamo in termini di tasso i piuttosto che di intensità r, essendo il legame $r = \log(1+i)$, possiamo introdurre la funzione

$$\boxed{\overline{P}(i) = P(\log(1+i)) = \sum_{h=1}^{n} I_h (1+i)^{-(t_h - t)}.}$$

- Riesce allora

VaR %

$$\star \quad \frac{d\overline{P}(i)}{di} = \overline{P}'(i) = \frac{P'(\log(1+i))}{1+i} = -\frac{\$D}{1+i}, \quad \frac{\overline{P}'(i)}{\overline{P}(i)} \boxed{= -\frac{D}{1+i} = -\mathrm{MD},}$$

  - ⋆ dove $\mathrm{MD} = \frac{D}{1+i}$ è la Duration modificata.
  - ⋆ Al fine di approssimare una variazione percentuale piccola Δi nel tasso, si utilizza

$$\frac{\Delta\overline{P}(i)}{\overline{P}(i)} \cong -\mathrm{MD}\ \Delta i$$

- Al secondo ordine: $\overline{P}''(i)/\overline{P}(i) = (Conv + D)/(1+i)^2$.

$$\frac{\Delta \bar{P}(i)}{\bar{P}(i)} = ? \qquad \Delta \bar{P}(i) = \bar{P}(i+\Delta i) - \bar{P}(i)$$

$$\frac{\Delta \bar{P}(i)}{\bar{P}(i)} \approx \frac{\bar{P}'(i)}{\bar{P}(i)} \cdot \Delta i = -\underbrace{\frac{D}{1+i}}_{= MD} \Delta i$$

SECONDO ORDINE

$$\bar{P}''(i) = \left(\frac{P'(\log(1+i))}{1+i} \right)' = \frac{\frac{P''(\log(1+i))}{\cancel{1+i}} \cancel{(1+i)} - P'(\log(1+i)) \cdot 1}{(1+i)^2}$$

$$= \frac{P''(\log(1+i)) - P'(\log(1+i))}{(1+i)^2}$$

$$\frac{\bar{p}''(i)}{\bar{p}(i)} = \frac{\boxed{\frac{p''(\log(1+i))}{p(\log(1+i))}} - \boxed{\frac{p'(\log(1+i))}{p(\log(1+i))}}}{(1+i)^2} = \frac{CONV + D}{(1+i)^2}$$

$$\frac{\Delta \bar{p}(i)}{\bar{p}(i)} \approx -MD \cdot \Delta i + \frac{1}{2}\frac{CONV + D}{(1+i)^2}(\Delta i)^2$$

$i_2 > \frac{I}{C} = 2.5\%$ $P = 87.23 < C$

. . . Duration

▷ Esempio: coupon bond, cedole semestrali, scadenza 5 anni, cedole 2.5%, $P = \underline{87.23}$, YTM $\underline{r{=}8\%}$ ($\underline{i{=}8.33\%}$, $\underline{i_2{=}4.08\%}$), duration e convexity $D = 4.44$, $Conv = 21.23$.

ANNI ANNI²

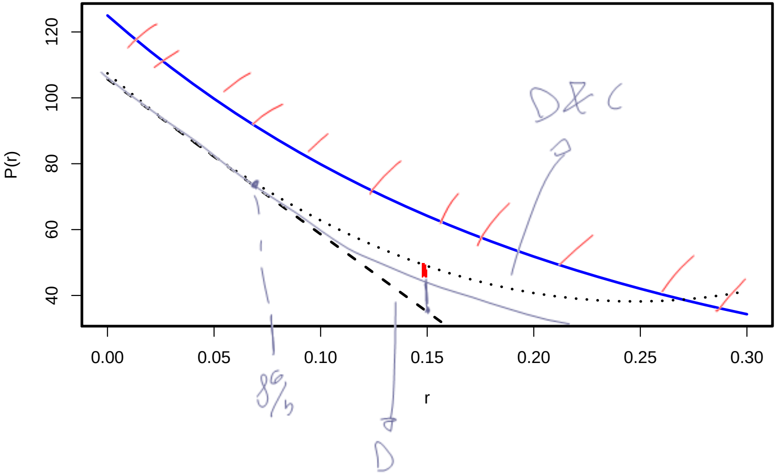
SLIDE 87-89 SLIDE 87-89

B.P. = BASIS POINTS ("BIPS")

100 B.P. = = 1%

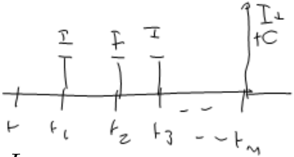
Δr (b.p.)	ΔP	$\$D$	$\$D\,\&\,\$Conv$	$\Delta P/P$ (%)	D	$D\,\&\,Conv$
−400 = −4%	17.08	15.49	16.98	19.58	17.76	19.46
−300	12.50	11.62	12.45	14.33	13.32	14.28
−200	8.13	7.75	8.12	9.32	8.88	9.31
−100	3.97	3.87	3.97	4.55	4.44	4.55
−80	3.16	3.10	3.16	3.62	3.55	3.62
−60	2.36	2.32	2.36	2.70	2.66	2.70
−40	1.56	1.55	1.56	1.79	1.78	1.79
−20	0.78	0.77	0.78	0.89	0.89	0.89
20	−0.77	−0.77	−0.77	−0.88	−0.89	−0.88
40	−1.53	−1.55	−1.53	−1.76	−1.78	−1.76
60	−2.29	−2.32	−2.29	−2.63	−2.66	−2.63
80	−3.04	−3.10	−3.04	−3.49	−3.55	−3.48
100	−3.78	−3.87	−3.78	−4.34	−4.44	−4.33
200	−7.39	−7.75	−7.38	−8.47	−8.88	−8.46
300	−10.83	−11.62	−10.79	−12.41	−13.32	−12.37
400 = +4%	−14.11	−15.49	−14.01	−16.17	−17.76	−16.07

. . . Duration



I/C, r, n

Duration di un Coupon Bond



▷ Nel caso specifico di un coupon bond, sia $I_h = I$ per $h = 1, \ldots, n-1$ e $I_n = I + C$, dove I è la cedola e C il nominale; inoltre sia $t_h = t + h$ per $h = 1, \ldots, n$ (senza perdita di generalità abbiamo preso $\Delta = 1$, cioè cedole annuali).

▷ La duration è funzione decrescente del tasso cedolare I/C: al crescere della cedola diminuisce il peso del rimborso a scadenza (sempre $=C$)

$$\frac{\partial D}{\partial (I/C)} < 0.$$

▷ La duration è funzione decrescente del tasso di rendimento

$$\frac{\partial D}{\partial r} < 0,$$

un incremento del tasso di rendimento penalizza più le scadenze più lontane

$$\boxed{\frac{\partial D}{\partial I/C} < 0} \qquad D = \sum_{h=1}^{n} (t_h - t) \cdot w_h$$

$$w_h = \frac{I_h \cdot e^{-r(t_h - t)}}{P} \qquad P = \sum_h I_h e^{-r(t_h - t)}$$

NEL CASO DI UN COUPON BOND

$$I_h = \begin{cases} I & h = 1 \text{———} n-1 \\ I + C & h = n \end{cases} \qquad \begin{aligned} t_h &= t + h \\ t_h - t &= h \end{aligned}$$

$$D = \frac{I \sum_{h=1}^{n} h \cdot v^h + C \cdot n \cdot v^n}{I \cdot \sum_{h=1}^{n} v^h + C \cdot v^n} =$$

$$D = \frac{\frac{I}{C} \sum h v^q + n \cdot v^n}{\frac{I}{C} \sum v^q + v^n}$$

QUINDI

$$\frac{\partial D}{\partial I/C} = \frac{1}{(\ldots)^2} \left\{ \sum h v^q \left(\frac{I}{C} \sum v^q + v^n \right) - \sum v^q \left(\frac{I}{C} \sum h v^q + n v^n \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{(\ldots)^2} \left\{ \cancel{\frac{I}{C} \sum v^q \sum h v^q} + v^n \sum h v^q - \cancel{\frac{I}{C} \sum v^q \sum h v^q} - n v^n \sum v^q \right\} =$$

$$= \underbrace{\frac{v^n}{(\cdot\ -)^2}}_{>0} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{v^k}_{>0} \cdot \underbrace{(k-n)}_{\substack{\leq 0 \\ <0 \text{ PER } k<n}} < 0$$

$$\boxed{\frac{\partial D}{\partial r} < 0} \qquad D = -\frac{P'(r)}{P(r)}$$

$$\frac{\partial D}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{P'(r)}{P(r)}\right) =$$

$$= -\frac{P''(r)P(r) - P'(r)^2}{P(r)^2}$$

$$= \left(\frac{P'(r)}{P(r)}\right)^2 - \frac{P''(r)}{P(r)} = \underbrace{D^2}_{(\text{MOMENTO PRIMO})^2} - \underbrace{\text{CONV}}_{\text{MOMENTO SECONDO}} \leq 0$$

(< 0 A MENO DEL CASO DI UN FLUSSO UNICO)

LA PROPRIETÀ VALE IN GENERALE QUALUNQUE SIANO I FLUSSI I_h E LE SCADENZE t_h

YTM IN TERMINI DI TASSO

... Duration di un Coupon Bond

- All'aumentare del numero di cedole, il comportamento della duration non è sempre monotono: è crescente se $i \leq \frac{I}{C}$ (bond quota alla pari o sopra la pari), mentre è prima crescente poi decrescente se $i > \frac{I}{C}$ (bond quota sotto la pari). I PESI DIPENDONO DA n
- Indicata con D_n la duration per il titolo con n cedole, e P_n il prezzo corrispondente, è

$$P_{n+1} = P_n + Iv^{n+1} - Cv^n(1-v),$$

$$D_{n+1} = \frac{D_n P_n + I(n+1)v^{n+1} - Cnv^n(1-v) + Cv^{n+1}}{P_{n+1}}$$

$$D_{n+1} - D_n = \frac{v^n}{P_{n+1}}\left[\underbrace{(n-D_n)}_{\geq 0}(\alpha-1)+\alpha\right]$$ A

con $\alpha = \left(\frac{I}{C}+1\right)v > 0$. Quindi se $\alpha \geq 1$ (caso $i \leq \frac{I}{C}$) è D_n crescente con n, se $\alpha < 1$ è $D_{n+1} > D_n$ se e solo se $n < D_n + \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

$$P_n = I \sum_{q=1}^{n} v^q + C \cdot v^n$$

$$D_n = \frac{I \sum_{q=1}^{n} q v^q + C \cdot n \cdot v^n}{P_n}$$

$$\underline{\underline{P_{n+1}}} = I \sum_{q=1}^{n+1} v^q + C \cdot v^{n+1}$$

$$= I \sum_{q=1}^{n} v^q + I v^{n+1} + C v^{n+1} + C v^n - C v^n$$

$$= \underline{\underline{P_n + I v^{n+1} + C v^n (1 - v)}} \qquad *$$

$$D_{n+1} = \frac{I \sum_{k=1}^{n+1} k v^k + C(n+1) v^{n+1}}{P_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{P_{n+1}} \Big(I \sum_{k=1}^{n} k v^k + I(n+1) v^{n+1} + C n v^n \underline{- C n v^n} \underline{+ C(n+1) v^{n+1}} \Big)$$

$$= \frac{1}{P_{n+1}} \Big(D_n \cdot P_n + I(n+1) v^{n+1} - C n v^n (1-v) + C v^{n+1} \Big)$$

URA

$$D_{n+1} - D_n =$$

$$= \frac{1}{P_{n+1}} \Big(D_n P_n + I(n+1) v^{n+1} - C n v^n (1-v) + C v^{n+1} - D_n \underbrace{P_{n+1}}_{= P_n + I v^{n+1} \ast - C v^n (1-v)} \Big)$$

$$= \frac{1}{P_{n+1}} \Big(\cancel{D_n P_n} + I(n+1) \underline{v^{n+1}} - \underline{C} n \underline{v^n} (1-v) + \underline{C v^{n+1}} - \cancel{D_n P_n} - D_n I \underline{v^{n+1}} + D_n \underline{C} v^n (1-v) \Big)$$

$$= \frac{v^n \cdot C}{p_{n+1}} \left(\frac{I}{C}(n+1)v - n(1-v) + v - D_n \frac{I}{C} v + D_n(1-v) \right)$$

$$= \frac{v^n \cdot C}{p_{n+1}} \left(D_n \Big(\underbrace{1 - v - \frac{I}{C} v}_{1-\alpha} \Big) + n \Big(\underbrace{\frac{I}{C} v + v - 1}_{\alpha - 1} \Big) + \underbrace{\Big(\frac{I}{C} v + v \Big)}_{=:\alpha} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{v^n C}{p_{n+1}}}_{>0} \left(\underbrace{(n - D_n)}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha - 1)}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha}_{>0} \right)$$

SE $\underline{\alpha < 1}$ $(\alpha - 1 < 0)$

$$D_{n+1} - D_n > 0 \iff (n - D_n)(\alpha - 1) + \alpha > 0$$

$$\iff n - D_n < \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$\iff \boxed{n < D_n + \frac{\alpha}{\alpha - 1}}$$

$$\boxed{\alpha < 1} \iff \alpha = v\left(\frac{I}{C} + 1\right) < 1$$

$$\iff \frac{I}{C} + 1 < \frac{1}{v}$$

$$\iff \frac{I}{C} + \cancel{1} < \cancel{1} + i \iff \boxed{\frac{I}{C} < i}$$

... Duration di un Coupon Bond

$v + 2v^2 + 3v^3 \longleftarrow + nv^n$

- In ogni caso D_n converge verso un valore limite; sfruttando le

$$\sum_{h=1}^{n} v^h = v\frac{1-v^n}{1-v}, \quad \sum_{h=1}^{n} hv^h = \frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^n}{1-v} - nv^n\right),$$

si ottiene

$0 \leftarrow$ $\rightarrow 0$

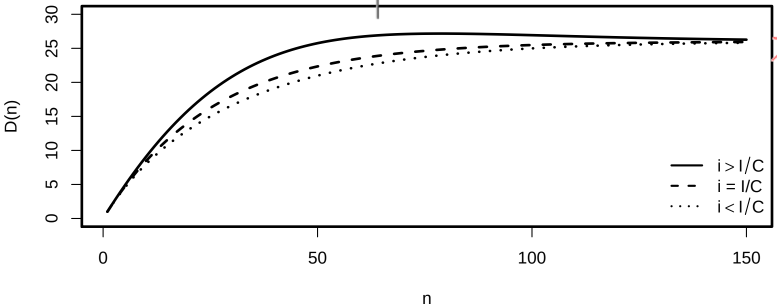
$$D_n = \frac{nv^n\left(1 - \frac{I}{C}\frac{v}{1-v}\right) + \frac{I}{C}\frac{v}{1-v}\frac{1-v^n}{1-v}}{\frac{I}{C}\frac{v}{1-v}(1 - v^n) + v^n} \rightarrow 0$$

da cui $n \to \infty$ $v^n \to 0$ (se $i > 0$), $nv^n \to 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} D_n = \frac{1+i}{i},}$$

che è la duration di una rendita perpetua.

... Duration di un Coupon Bond



$\frac{i}{1+i}$

Figura: $C = 100,\ i = 4\%,\ I = 2,\ 4,\ 6.$

$\frac{i}{1+i}$

$$D_n = \frac{\frac{I}{C}\sum k v^k + n v^n}{\frac{I}{C}\sum v^k + v^n} = \left(\begin{array}{l} \text{vedi} \\ \text{calcolo} \\ \text{di} \\ \dfrac{\partial D}{\partial I/C} \end{array} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k v^k = \frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^n}{1-v} - n v^n\right)$$

$$\sum v^k = v\,\frac{1-v^n}{1-v}$$

$$= \frac{\frac{I}{C}\,\frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^n}{1-v} - n v^n\right) + n v^n}{\frac{I}{C}\, v\,\frac{1-v^n}{1-v} + v^n} =$$

$$= \frac{\underbrace{n v^n}_{\to 0}\left(1 - \frac{I}{C}\frac{v}{1-v}\right) + \frac{I}{C}\frac{v}{1-v}\,\frac{1-\underbrace{v^n}_{\to 0}}{1-v}}{\frac{I}{C}\frac{v}{1-v}\left(1-\underbrace{v^n}_{\to 0}\right) + \underbrace{v^n}_{\to 0}}$$

$$n \to \infty \qquad v^n \to 0 \;, \quad n v^n \to 0$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{I}{C}}\,\cancel{\frac{v}{1-v}}\,\frac{1}{1-v}}{\cancel{\frac{I}{C}}\,\cancel{\frac{v}{1-v}}} = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+i}} = \boxed{\frac{1+i}{i}}$$