MECCANICA RAZIONALE

Ing Civile & Ambientale
Navale

23 marzo 2021

Equazioni Cardinali della Statica.

$\underline{F}_p = \underline{0} \quad \forall\, P \in S$ per un corpo all'equilibrio

(Tenendo conto del principio di azione e reazione)

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} = \underline{0} = \sum_{P \in S} \underline{F}_p^{(e)} \\ \underline{M}^{(e)}(O) = \sum_{P \in S} (\underline{x}_p - \underline{x}_o) \wedge \underline{F}_p^{(e)} = 0 \end{cases}$$

E.C.S. $\longrightarrow$ condizione necessaria per l'equilibrio

Corpo rigido : sono anche sufficienti

$\Rightarrow$ equivalenti al PLV

$$LV = \sum_{B \in S}' \underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B = 0$$

$$= \sum_i' Q_i \, \delta q_i = - dV$$

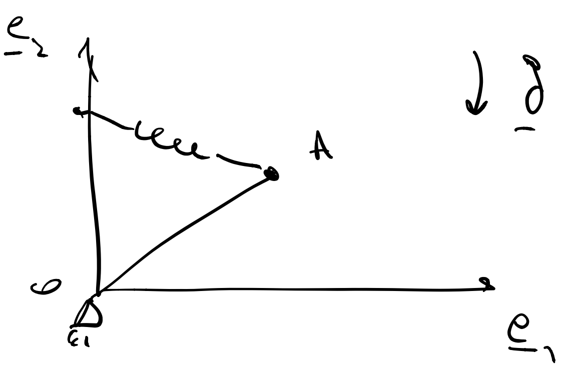
forze conservative

$$LV_{\substack{\text{corpo} \\ \text{rigido}}} = \underline{R}^{(e)} \cdot \delta \underline{x}_0 + \underline{M}^e(0) \cdot \underline{\chi}$$

(x_0, y_0, z_0) (φ, θ, ψ)

Corpo rigido : PLV = E.C.S.

E.C.S. $\rightarrow$ utili per determinare le reazioni vincolari all'equilibrio



Per l'equilibrio

PLV $\rightsquigarrow$

$$V = mg\, y_A + \frac{c}{2} \| \underline{x}_A - \underline{x}_Q \|^2$$

$= \ldots\ldots$

$$\frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad , \quad \frac{d^2V}{d\varphi^2} > 0 \; , \; < 0$$

ECS $\quad \underline{M}(0) \rightarrow$ stesse configurazioni di equilibrio

$\underline{R}^{(e)} = \underline{0} \quad \longrightarrow \quad H_o, V_o$ all'equilibrio

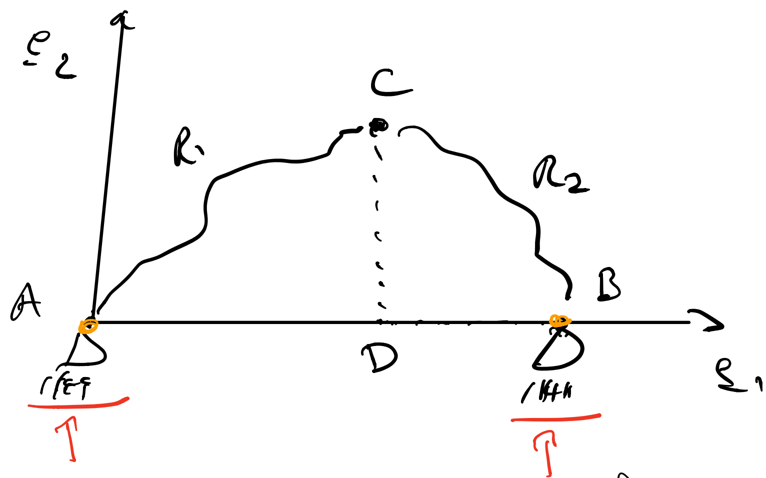
E.C.S. $\rightarrow$ sistemi articolati.

Applicazioni alla statica dei sistemi articolati

Se abbiamo un sistema deformabile (più rigidi vincolati) le E.C.S. non sono in grado di garantire l'eq. quando applicate a tutto il sistema. Lo diventano se le applichiamo ad ogni componente separatamente, a patto di considerare anche le azioni interne di una componente sull'altra.

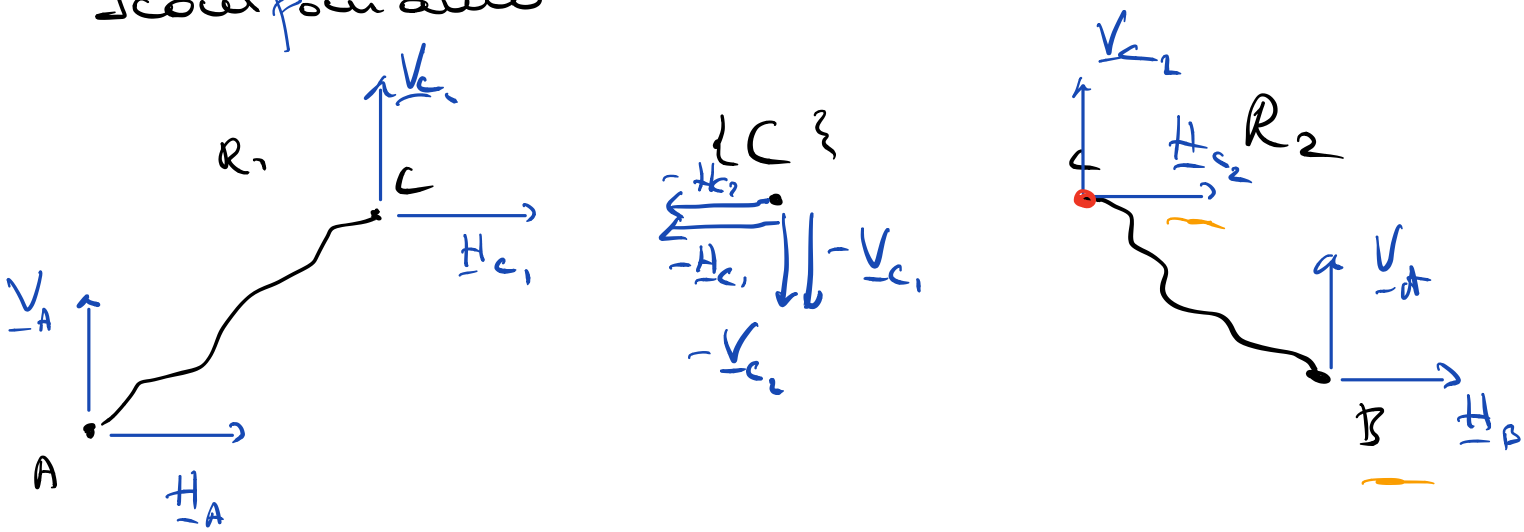
Esempio: arco a tre cerniere

$$R_1 \cup \{C\} \cup R_2$$



Supponiamo note le forze agenti sul sistema

Scomponiamo il sistema



R_1 :
- reazione cerniera esterna in A
  $\underline{H}_A$, $\underline{V}_A$
- forze attive $\underline{F}^{a,1}$
- reazione cerniera C su R_1
  $\underline{H}_{C_1}$, $\underline{V}_{C_1}$

R_2 :
- reazione cerniera esterna in B
  $\underline{H}_B$, $\underline{V}_B$
- forze attive $\underline{F}^{a,2}$

• reazione carrello C e R_2

$\underline{H}_{C2}$, $\underline{V}_{C2}$

$\{C\}$: • forza attiva $\underline{F}_C$

• forza che R_1 esercita su C

$\underline{H}_{C1}$, $\underline{V}_{C1}$

• forza che R_2 esercita su C

$\underline{H}_{C2}$, $\underline{V}_{C2}$

la totale 8 incognite di reazione

$$\mathcal{F}^{r} = (H_A, V_A, H_B, V_B, H_{C1}, V_{C1}, H_{C2}, V_{C2})$$

1. ECS per tutto il sistema

$R_1 \cup R_2 \cup \{C\}$

$$\underline{R}^{(e)} = \underline{0} \implies \begin{cases} H_A + H_B + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_1 = 0 \\ V_A + V_B + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_2 = 0 \end{cases}$$

↑ risultante forze attive esterne

$$\underline{M}^{(e)}(A) = \underline{0} \implies \overline{AB}\, V_B + \underline{M}^{e,a}(A) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

↑ momento risultante forze esterne attive

$\overline{AB} \neq 0 \longrightarrow$ Troviamo V_B

2. ECS per R_2

$$\underline{M}^e(C) = \underline{0} \Rightarrow \sum_p (\underline{x}_p - \underline{x}_o) \wedge \underline{F}_p$$

$B \quad \downarrow C$

$$\overline{CD}\, H_B + \overline{DB}\, V_B + \underline{M}^{a,2}(C) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

$\overline{CD} \neq 0$
$\overline{DB} \neq 0$

momento rispetto a C delle forze attive che agiscono su R_2

$$\underline{R}^{a,2} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} H_B + H_{C2} + \underline{F}^{a,2} \cdot \underline{e}_1 = 0 \\ V_B + V_{C2} + \underline{F}^{a,2} \cdot \underline{e}_2 = 0 \end{cases}$$

- ECS al nodo $\{C\}$

$$-H_{C1} - H_{C2} + \underline{F}_C \cdot \underline{e}_1 = 0$$

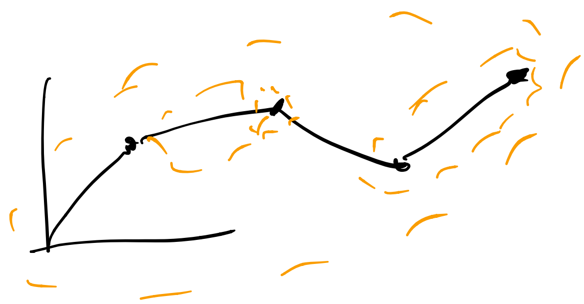
$$-V_{C1} - V_{C2} + \underline{F}_C \cdot \underline{e}_2 = 0$$

forze esterne attive

Notiamo $\longrightarrow$ i risultati devono essere compatibili con ECS applicate a R_1

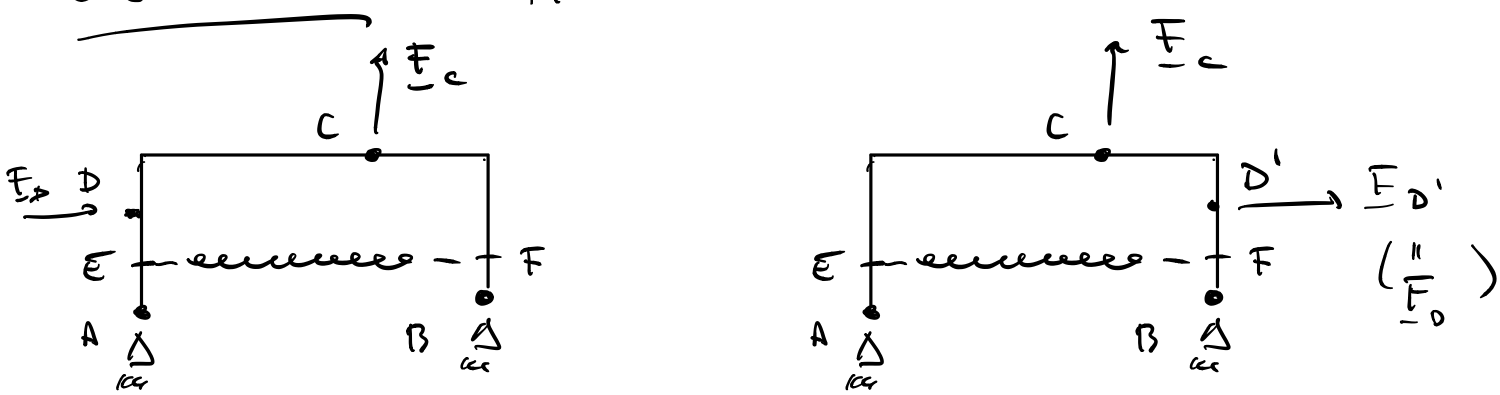
$$A \cdot \underset{\text{incognite}}{F^{r}} = \underset{\text{note}}{F^{a}}$$

invertibile, $\det A \neq 0$



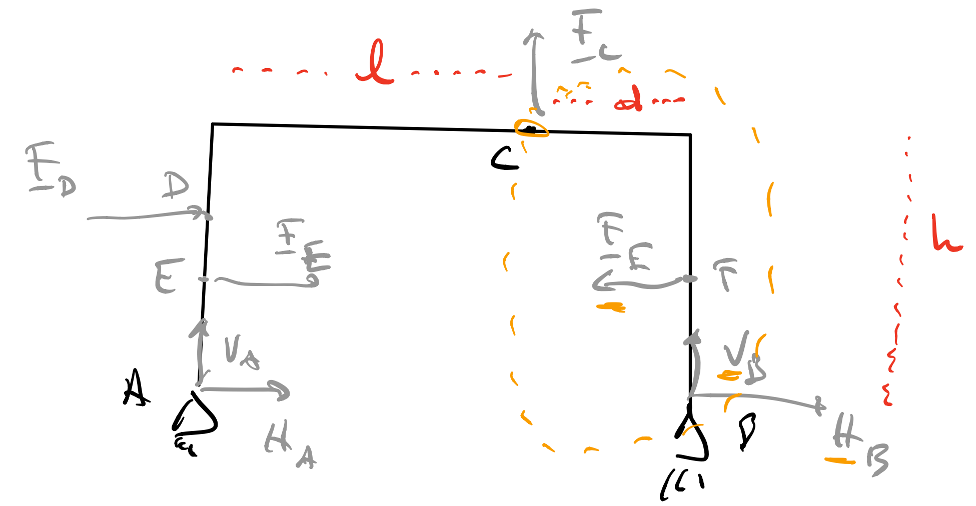
Seconda parte

Esercizio   Piano orizzontale



Calcoliamo le reazioni vincolari in A & B

F_D, $F_{D'}$ sono forze applicate in punti diversi. $R_1 \to AC$, $\{C\}$, $R_2 \to CB$



$$\underline{F}_D = F_D \, \underline{e}_1$$

$$\underline{F}_C = F_C \, \underline{e}_2$$

$$\underline{F}_E = -c(\underline{x}_E - \underline{x}_F)$$

<u>ECS</u> applicate a tutto il sistema

$$\underline{R}^e = \underline{0} \Rightarrow \quad H_A + H_B + F_D = 0 \quad \underline{e}_1$$

$$V_A + V_B + F_C = 0 \quad \underline{e}_2$$

$$\underline{M}^e(A) = \underline{0} \Rightarrow \quad \overline{AB}\, V_B - F_D \overline{AD} + F_C l = 0$$

allora $V_B = \dfrac{1}{\overline{AB}} \left(F_D \overline{AD} - F_C l \right)$

$$V_A = -V_B - F_C =$$

$$= -F_D \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} + F_C \left(\frac{l}{\overline{AB}} - 1 \right)$$

Sottosistema CB

scegliamo C come polo

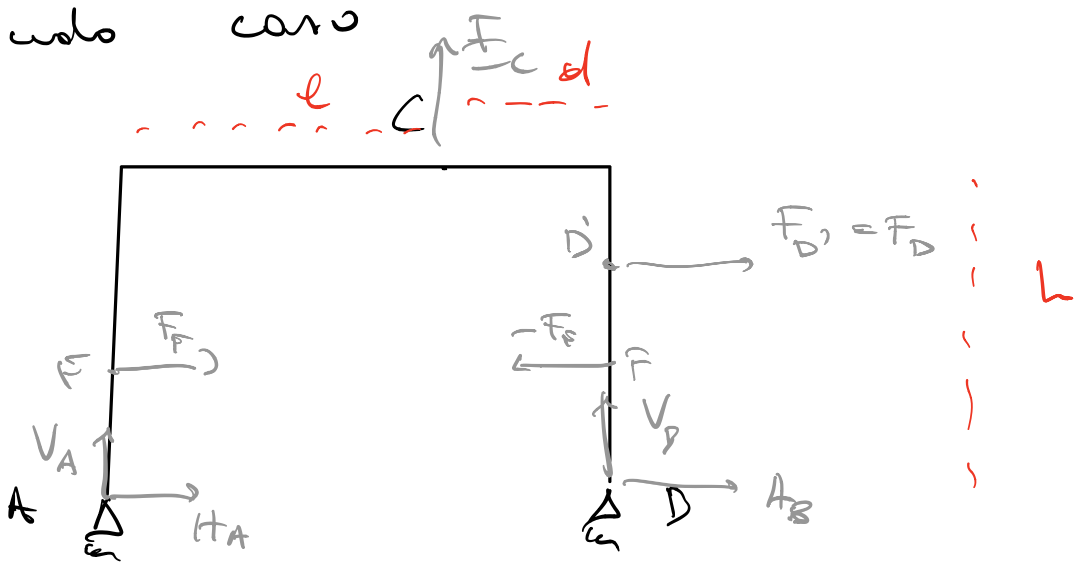
$$\underline{M}^e_{CB}(C) = \underline{0}$$

$$h H_B + d V_B + (-c\,AB)(h - \overline{BF}) = 0$$

$$\rightarrow H_B = -\frac{d}{h} V_B + c\,\overline{AB}\left(1 - \frac{\overline{BF}}{h}\right)$$

$$H_A = -H_B - F_D$$

Secondo caso



• ECS a tutto il sistema

$$\underline{R}^c = \underline{0} \Rightarrow \quad H_A + H_B + F_D = 0$$

$$V_A + V_B + F_C = 0$$

$$\underline{M}^c(A) = \underline{0} \Rightarrow \quad \ldots \text{ come prima}$$

• ECS per il solo sottosistema BC

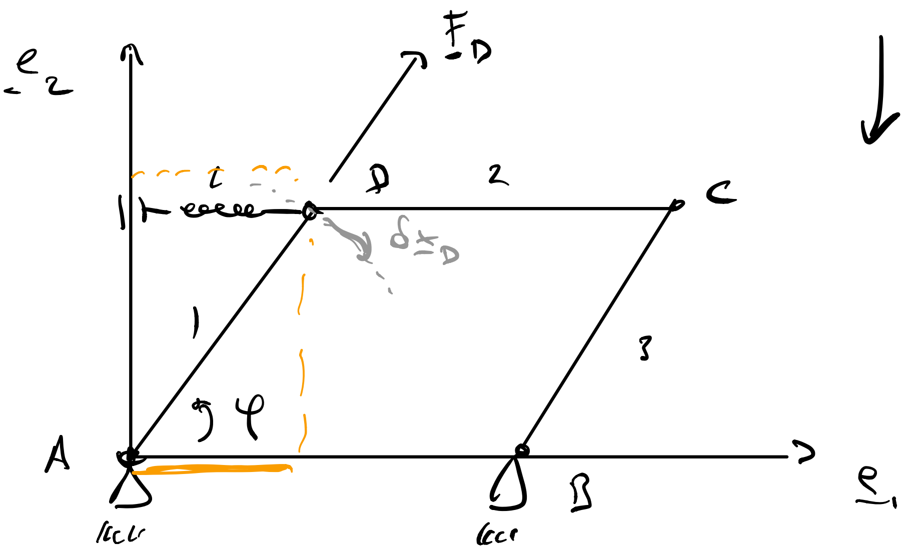
$$\underline{M}^c_{BC}(C) = \underline{0}:$$

$$h H_B + d V_B - c \overline{AB} \left(h - \overline{BF} \right) +$$
$$+ F_D \left(h - \overline{D'B} \right) = 0$$

$$H_B = - \frac{d}{h} V_B + c \overline{AB} \left(1 - \frac{\overline{BF}}{h} \right) - F_D \left(1 - \frac{\overline{D'B}}{h} \right)$$

$$H_A = - H_B - F_D$$

<u>Esempio</u>



$\downarrow \underline{g}$ piano verticale

- eq. e la stabilità
- calcolare reazioni in A e B

Forze attive

- forza peso ($\longrightarrow$ conservativa)

$$V_{peso} = m_1 g y_{G_1} + m_2 g y_{G_2} + m_3 g y_{G_3}$$
$$= g (m_1 + m_3) \frac{l}{2} \sin\varphi + m_2 g l \sin\varphi$$
$$= g l \sin\varphi \left(\frac{m_1 + m_3}{2} + m_2 \right)$$

- forza elastica in D ($\to$ conservativa)

$$V_{elastica} = \frac{c}{2} x_D^2 = \frac{c}{2} \ell^2 \cos^2\varphi$$

- forza follower in D (non conservativa)

$$\underline{F}_D \cdot \delta \underline{x}_D = 0$$

$\hookrightarrow$ non contribuisce al L.V.

Quindi $LV = - dV_{TOT}$

$$V_{TOT} = g\ell \sin\varphi \left(\frac{m_1+m_3}{2} + m_2 \right) + \frac{c}{2} \ell^2 \cos^2\varphi$$

$$V'_{TOT}(\varphi) = g\ell \left(\frac{m_1+m_3}{2} + m_2 \right) \cos\varphi - c\ell^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$= c\ell^2 \left(\mu - \sin\varphi \right) \cos\varphi$$

$$\mu = g \left(\frac{m_1+m_3}{2} + m_2 \right) \frac{1}{c\ell}$$

- Se $\mu > 1$ solo due configurazioni di equilibrio $\varphi = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

(prendiamo $\varphi \in [-\pi, \pi]$)

- Se $\mu < 1$ quattro configurazioni

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

φ_1 t.c. $\sin\varphi_1 = \mu$ $\quad 0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$

φ_2 t.c. $\sin\varphi_2 = \mu$ $\quad \frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \pi$

Derivata seconda

$$V''(\varphi) = c\,\ell^2\left(-\mu\sin\varphi + \sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)$$

$$= c\ell^2\left(-\mu\sin\varphi + 2\sin^2\varphi - 1\right)$$

- $\mu > 1$ $\quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$ stabile

  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ instabile

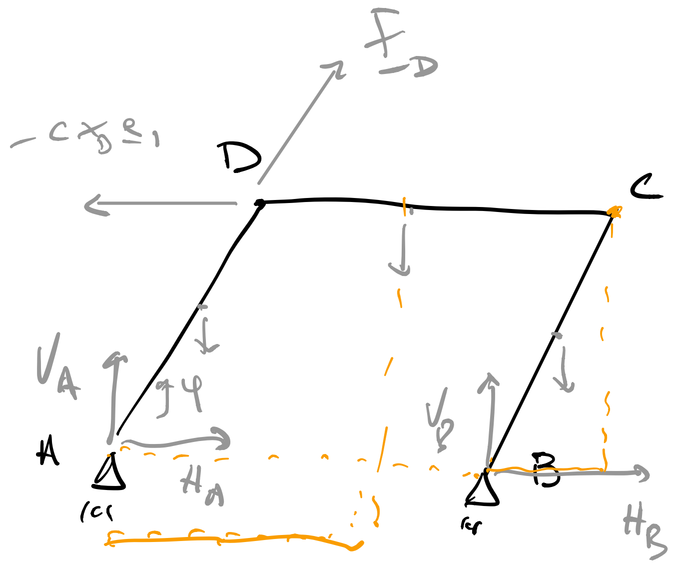
- $\mu < 1$ $\quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, \ \varphi = \frac{\pi}{2}$ entrambi stabili

  $\varphi = \varphi_1, \ \varphi = \varphi_2$ instabili

  $(\sin\varphi_{1,2} = \mu)$

→ equilibrio di stabilità

Terza parte



$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} = \ell$

$\underline{F}_D = F \text{ vers}(\underline{x}_D - \underline{x}_A)$

$= F(\cos\varphi\, \underline{e}_1 + \sin\varphi\, \underline{e}_2)$

Determinare reazioni in A e B, all'equilibrio

$\underline{R}^e = \underline{0} \Rightarrow$

$\underline{e}_1 : \quad H_A + H_B - c\, x_D + F\cos\varphi$

$= H_A + H_B - c\,\ell\cos\varphi + F\cos\varphi = 0$

$\underline{e}_2 : \quad V_A + V_B + F\sin\varphi - (m_1 + m_2 + m_3)\, g = 0$

$\underline{M}^e_{(A)} = \underline{0} \qquad \left(\sum_p (\underline{x}_p - \underline{x}_A) \wedge \underline{F}_p\right)$

$\ell V_B - m_1 g \frac{\ell}{2}\cos\varphi - m_2 g \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \frac{\ell}{2}\right)$

$- m_3 g \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \ell\right) + c\left(\ell\cos\varphi\right)\ell\sin\varphi$

$$\longrightarrow \quad V_B = \dots$$

$$(\underline{x}_D - \underline{x}_A) \wedge \underline{F}_D$$
$$\underbrace{(\underline{x}_D - \underline{x}_A)} \wedge (F\ \mathrm{vers}\ \underbrace{(\underline{x}_D - \underline{x}_A)})$$

Scelta possibile: prendiamo il sottosistema costituito dalla sola asta BC $\rightarrow \underline{M}^e_{BC}(C)$

$$BC \rightarrow \underline{M}^e_{BC}(C) = 0$$

$$(\underline{x}_B - \underline{x}_C) \wedge (H_B\, \underline{e}_1 + V_B\, \underline{e}_2) =$$

$$= [\ell\, \underline{e}_1 - (\ell + \ell \cos\varphi)\underline{e}_1 - \ell \sin\varphi\, \underline{e}_2]$$

$$\wedge (H_B\, \underline{e}_1 + V_B\, \underline{e}_2)$$

$$= [-\ell \cos\varphi\, \underline{e}_1 - \ell \sin\varphi\, \underline{e}_2] \wedge (H_B\, \underline{e}_1 + V_B\, \underline{e}_2)$$

$$= -\ell \cos\varphi\, V_B\, \underline{e}_3 + \ell \sin\varphi\, H_B\, \underline{e}_3$$

$$\underline{M}^e_{BC}(C) = \underline{0} \quad :$$

$$\ell \sin\varphi\, H_B - \ell \cos\varphi\, V_B + m_3 g \frac{\ell}{2} \cos\varphi = 0$$

Mettiamo tutto insieme:

$$\begin{cases} V_B = g\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) + c\ell\cos\varphi\,(\mu - \sin\varphi) \\ V_A = (m_1 + m_2 + m_3)g - F\sin\varphi - V_B \\ H_B = \left(V_B - \frac{m_3 g}{2}\right)\cot\varphi \\ H_A = -H_B + (c\ell - F)\cos\varphi \end{cases}$$

Calcoliamole per i valori di equilibrio

- $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$V_B = g\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right)$$

$$V_A = (m_1 + m_2 + m_3)g - F - V_B$$

$$H_A = H_B = 0$$

- $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$V_B = g\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right)$$

$$V_A = (m_1 + m_2 + m_3)g + F - V_B$$

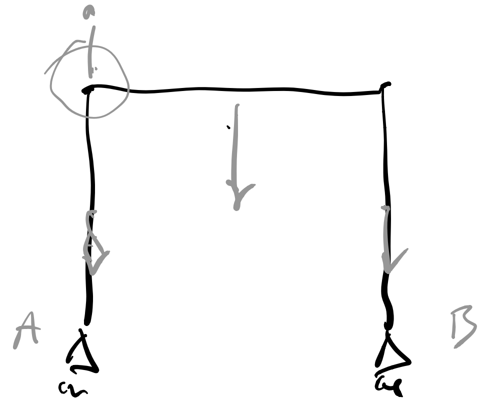
$$H_A = H_B = 0$$

- $\varphi = \varphi_1 \quad \cdots \quad \varphi = \varphi_2$

$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \mu$

$\cos\varphi_{1,2} = \pm\sqrt{1-\mu^2}$

Ad esempio se $\varphi = \frac{\pi}{2}$



$\rightarrow H_A = H_B = 0$

<u>ECS</u> : $\begin{cases} \underline{R}^e = \underline{0} \\ \underline{M}^e(O) = \underline{0} \end{cases}$

Sistema materiale : determinarne

l'equilibrio, stabilità, reazioni nei vincoli all'equilibrio

<u>PLV</u> (ECS)   <u>PLV</u>   E.C.S.

$\rightarrow$ all'interno del corpo rigido