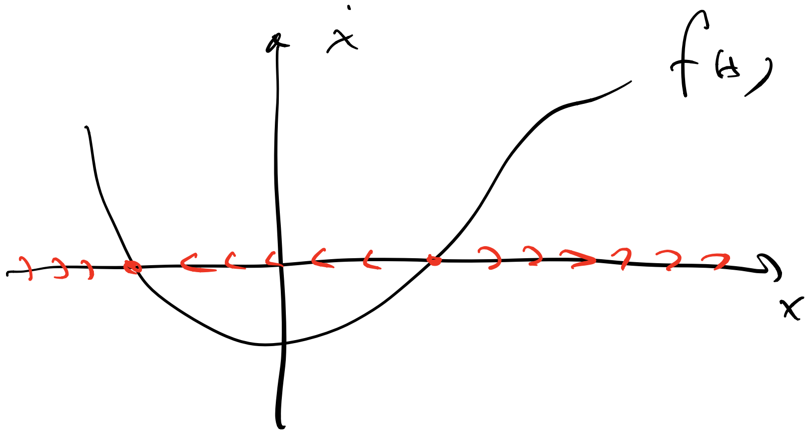
SISTEMI DINAMICI

23 marzo 2021

Sistemi dinamici 1-dim

$\dot{x} = f(x)$ su $\mathbb{R}$



x^* t.c. $f(x^*) = 0$ + carattere

Biforcazioni : $\dot{x} = f(x; \mu)$

$f(x^*; \mu^*) = 0$ $(x^*; \mu^*)$

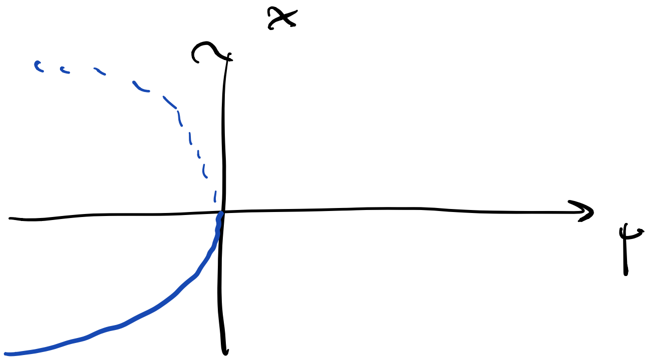
- $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*; \mu^*)} \neq 0$ $\to$ punto fisso iperbolico

$\to$ $x(\mu)$ $f(x(\mu), \mu) = 0$

variando da $f(x^*; \mu^*)$

• $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*, r^*)} = 0$ punto fisso non iperbolico

Biforcazione Tangente



Tangente è $\mu = 0$

$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_{x=0} = 0$

giace da un lato di $\mu = 0$

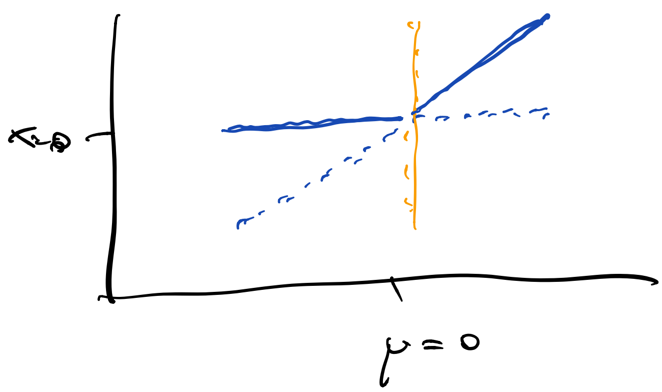
$\left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_{x=0} \neq 0$

(Tipo $x^2 \rightarrow \left. 2x = 0 \right|_{x=0}$, $2 > 0$)

punto critico non iperbolico + $\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{(0,0)} \neq 0$

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \neq 0$

Biforcazione Transcritica



1. due curve di punti fissi passanti per (0,0)
2. da entrambi i lati
3. stabilità cambia

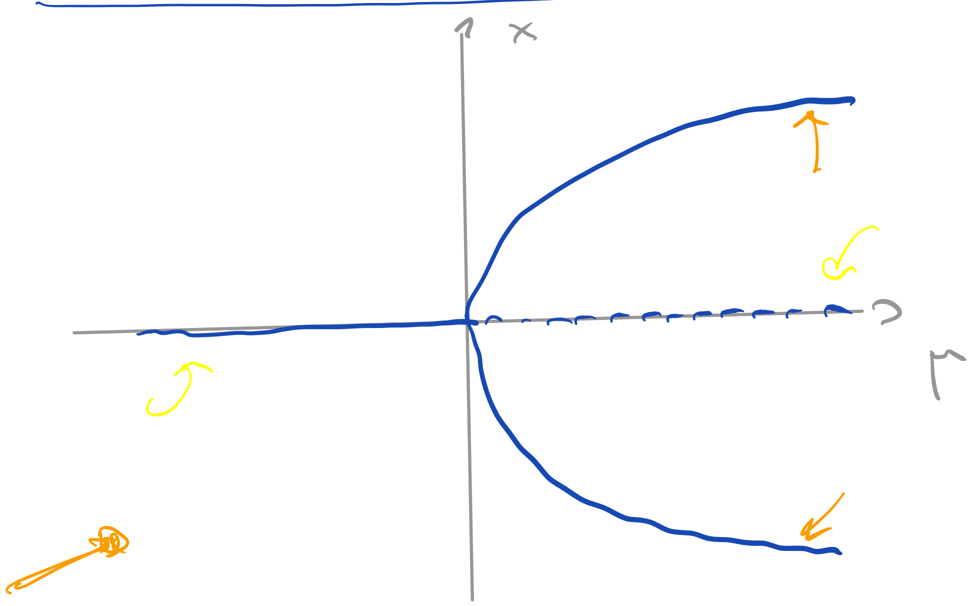
Punti critici non-iperbolici +

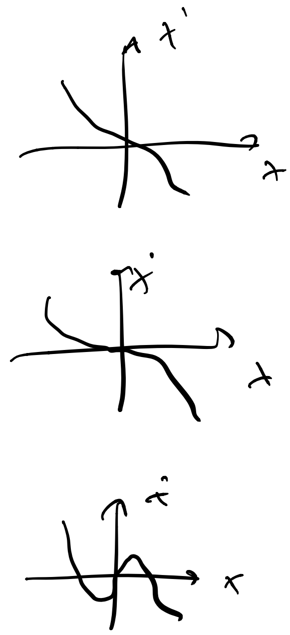
$$\frac{\partial f}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} \neq 0$$

la struttura dell'orbita vicino a $(0,0)$, è data dalla forma normale

$$\dot{x} = \mu x \pm x^2 \simeq f(x;\mu)$$

Biforcazione a forchetta





1. due curve di punti fissi che passano per $(\hat{\mu},\hat{x}) = (0,0)$, cioè $\begin{cases} x = 0 \\ \mu = x^2 \end{cases}$

2. $x = 0$ esiste su ambo i lati di $\mu = 0$
   $\mu = x^2$ " da un lato solo

3. punti fissi su $x = 0$ cambiano di

stabile, su $\mu = x^2$ no.

Come al solito: $\dot{x} = f(x;\mu)$ con

$f(0,0) = 0$ $\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$ punto fisso iperbolico

Vogliamo due curve di punti fissi che si intersecano $\longrightarrow$ deve essere

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = 0$$

(altrimenti, il teo della funzione implicita avrei un'unica curva)

Siccome vogliamo la curva $x = 0$, possiamo assumere

$$\dot{x} = f(x;\mu) = x\, F(x;\mu)$$

$$F(x,\mu) = \begin{cases} \dfrac{f(x;\mu)}{x} & x \neq 0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\mu)} & x = 0 \end{cases}$$

Se vogliamo una seconda curva per $(0,0)$, $\quad F(0,0) = 0$, ma $\left.\frac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0 \Rightarrow$$ per il Teorema funzione implicita $\exists$ una sola curva per $(0,0)$

$\hookrightarrow$ $\mu(x)$ tale che $F(x, \mu(x)) = 0$

Come nel caso della biforcazione tangente, vogliamo che $\mu(x)$ obbedisca

$$\left.\frac{d\mu(x)}{dx}\right|_0 = 0 \quad , \quad \left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_0 \neq 0$$

stesse condizioni della biforcazione tangente, ma per F (non per f)

$$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 = \frac{-\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} = 0 = \frac{-\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)}}$$

visto nel caso della biforcazione transcritica

$$\left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_0 = \frac{-\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} \neq 0 = \frac{-\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)}}$$

visto per biforcazione tangente, ora per F

Per riassumere, le condizioni sono

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \end{cases}$$

punto fisso non iperbolico

con

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0 \qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{(0,0)} \neq 0$$

La struttura è qualitativamente la stessa che per la forma normale

$$\dot{x} = \underbrace{\mu x \mp x^3}$$

Seconda parte

Abbiamo visto $\dot{x} = f(x;\mu)$ in alcuni casi

$$\dot{x} = f(x;\mu_1,\dots,\mu_n)$$

Biforcazione imperfetta

Studiamo $\dot{x} = h + rx - x^3$

Notiamo

$h=0 \longrightarrow$ biforcazione - forchetta

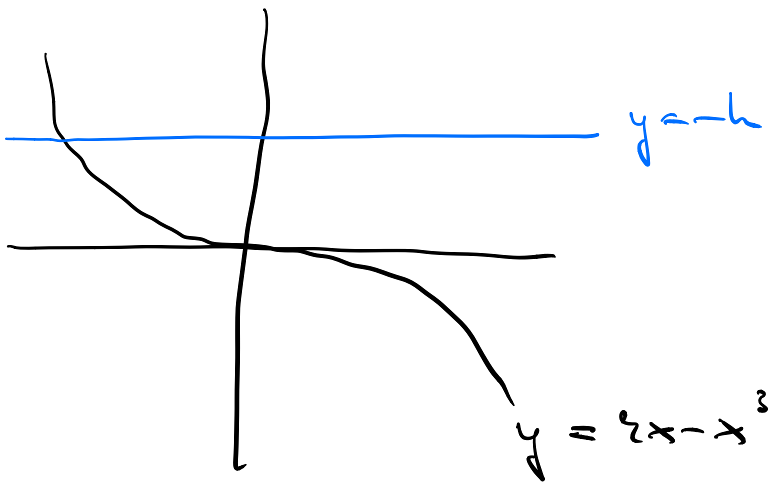
$(x \leftrightarrow -x)$

$h \neq 0 \longrightarrow$ questa simmetria è "rotta"

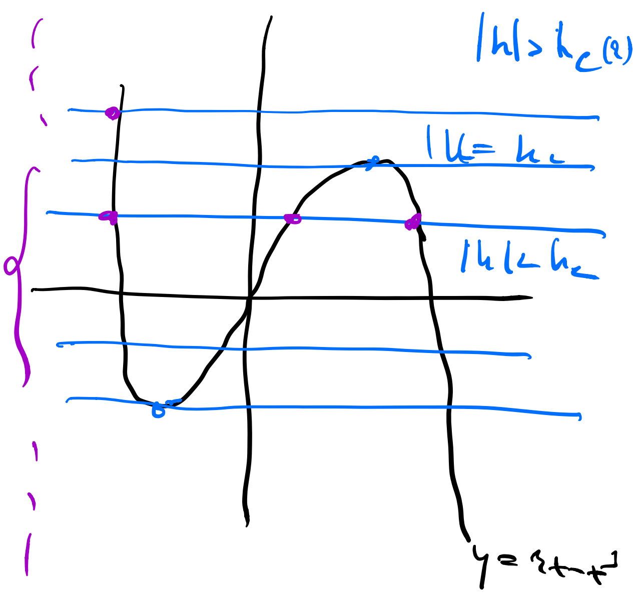
Più complicato $\longrightarrow$ due parametri

Punti fissi $\quad \dot{x} = h + rx - x^3$

Approccio grafico $\longrightarrow$



$r \leq 0$



$r > 0$

Vogliamo questo h_c

max della cubica : $\dfrac{d}{dx}(rx - x^3) =$

$= r - 3x^2 = 0$

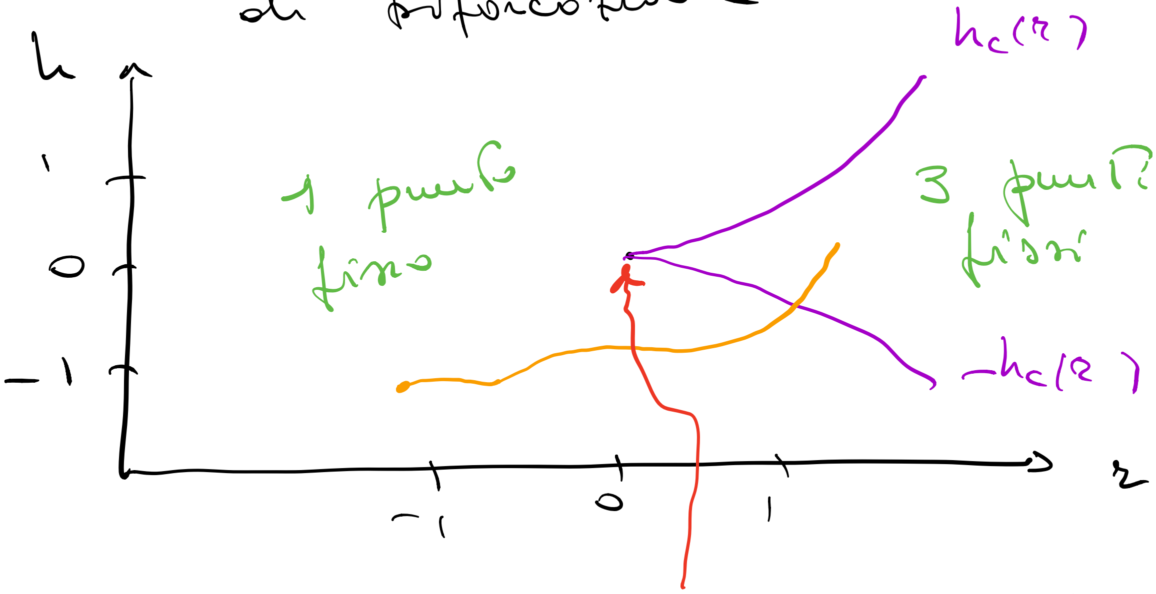
$x_{max} = \sqrt{\dfrac{r}{3}}$

Al max $\quad r\,x_{max} - (x_{max})^3 = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}}$

$$h_c(r) = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}}$$

- 3 punti critici per $|h| < h_c(r)$
- 1 punto critico per $|h| > h_c(r)$

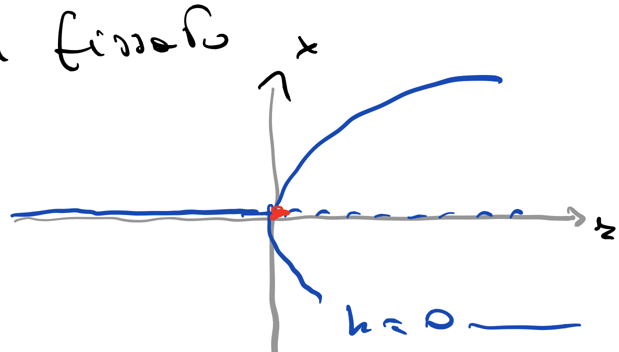
Curva di biforcazione nel piano (h, r)

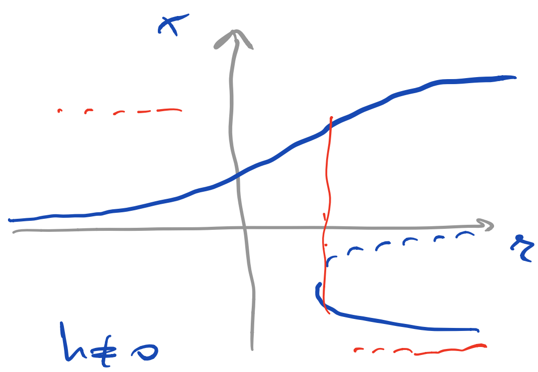


le due curve $\pm h_c(r)$ si incontrano tangenzialmente $(0,0)$ dove c'è una cuspide

Guardiamo la situazione a h, r fissati:

h fissato



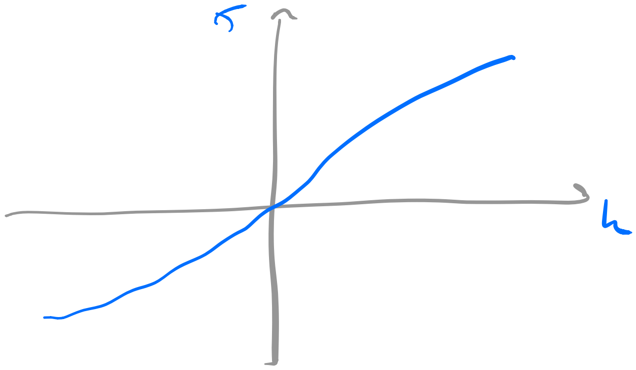


$\dot{x} = h + xr - x^3$

$h = 0$

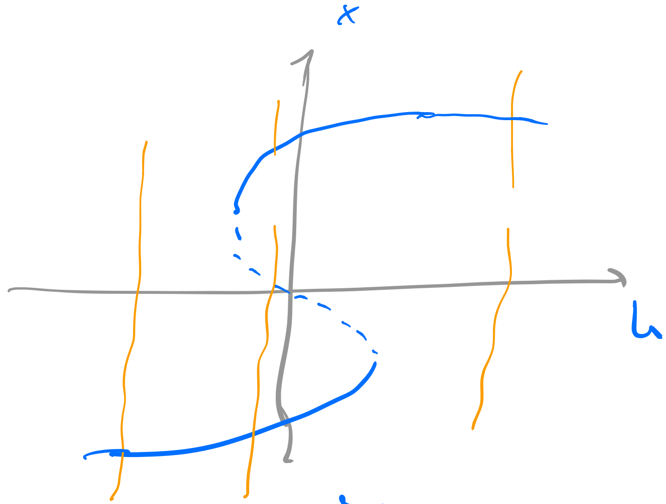
$h + xr - x^3$

r fissato



$r \le 0$

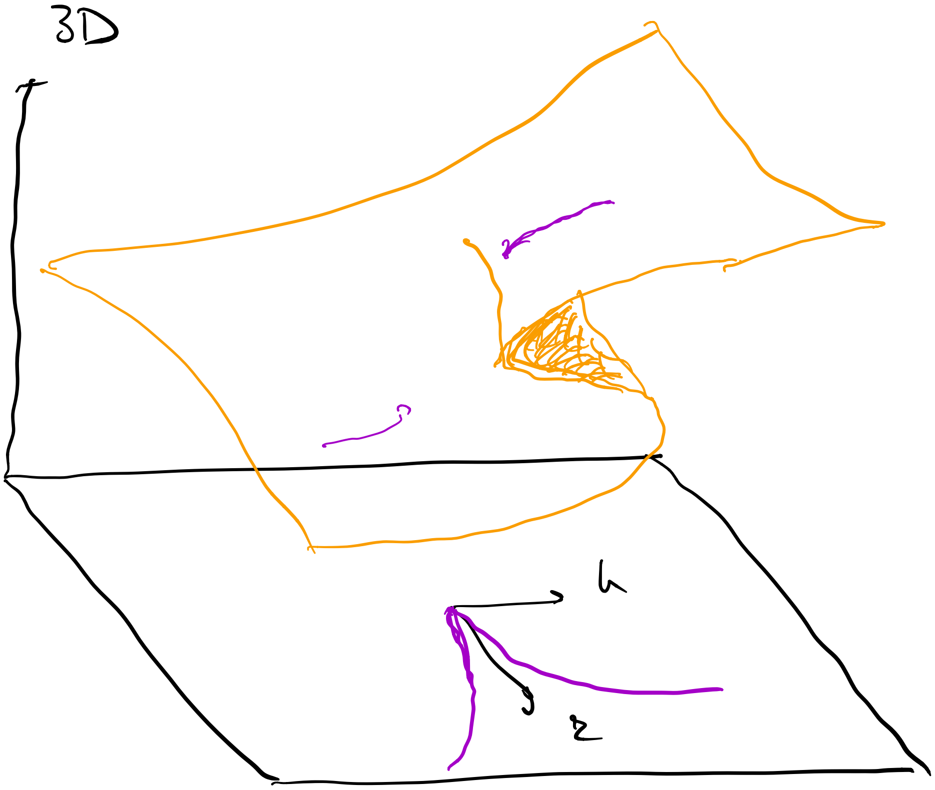
un punto fisso stabile $\forall\, h$



$r > 0$

3 punti fissi quando $|h| < h_c(r)$, altrimenti un punto fisso solo

In 3D



"catastrofe di tipo cuspide"

[STROGATZ "Nonlinear dynamics & Chaos" Sect. 3.6]

Flussi sul cerchio

$\dot{x} = f(x)$ $\longrightarrow$ $\dot{\theta} = f(\theta)$

x a valori in $\mathbb{R}$

θ a valori in S^1

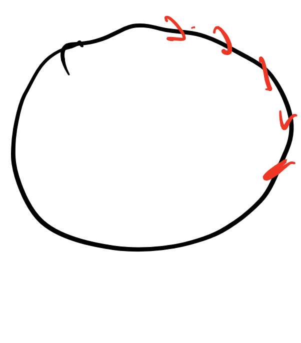
In questo caso f (regolare) è periodica

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$$

campo vettoriale associa un vettore ad ogni punto di $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \Big|_{t=0}$$

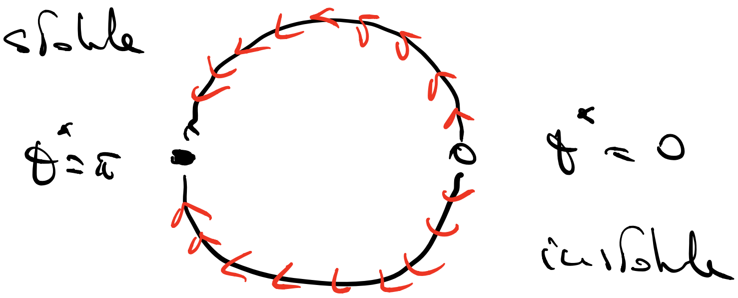
campo vettoriale associa un vettore ad ogni punto di S^1



Esempio $\dot{\theta} = \sin\theta$

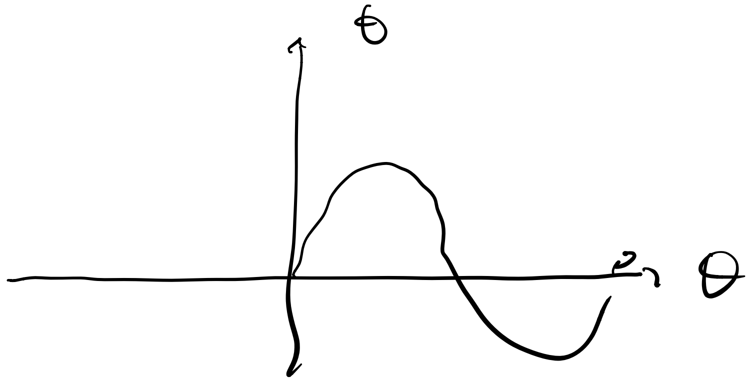
Punti fissi

$\theta^* = 0$, $\theta^* = \pi$



semicerchio superiore $\sin\theta > 0$

" inferiore $\sin\theta < 0$

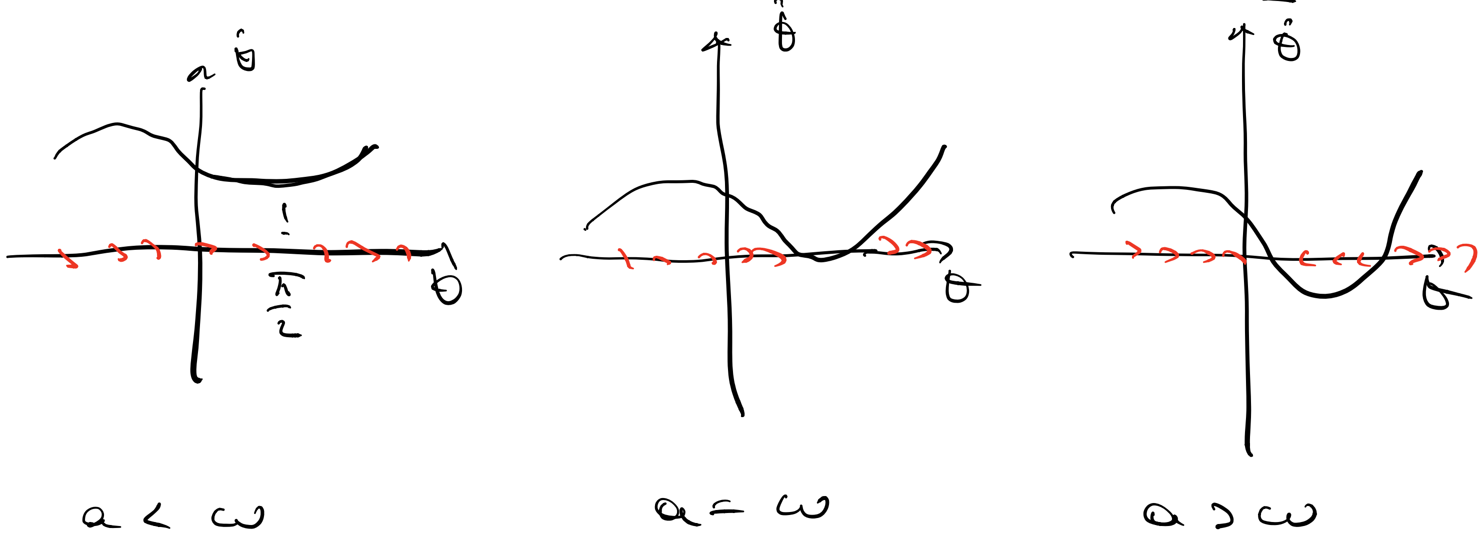


<u>Esempio</u> : $\dot\theta = \omega$ costante

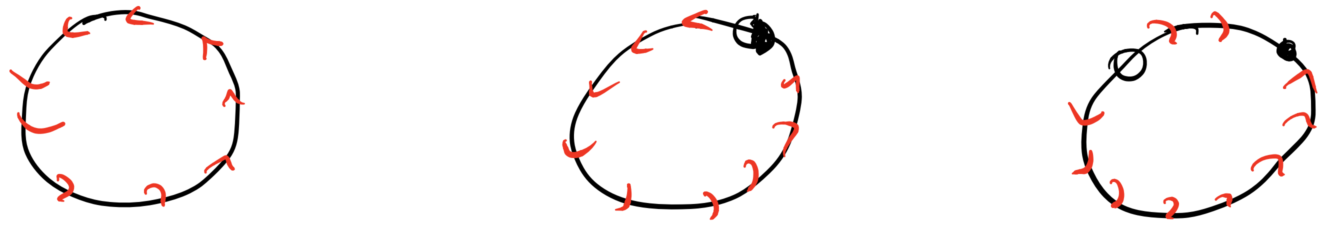
$\rightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0$

soluzione periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

<u>Esempio</u> : $\dot\theta = \omega - a \sin\theta$ $\omega > 0$, $a \geq 0$



(usando $\sin\theta \in [-1, 1]$)



Per $a < \omega$ ci sono oscillazioni, di periodo

$$T = \int d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin\theta} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}$$

Cambiando la topologia dello spazio delle fasi: $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$, possiamo trovare oscillazioni