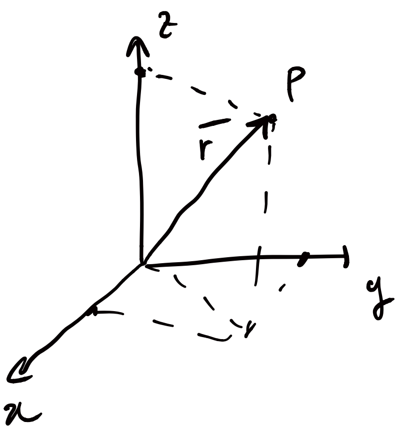
FORMALISMO LAGRANGIANO

Permette di scrivere le eq. del moto in un sistema di coordinate adatto al problema in esame.

Consideriamo un pto materiale (di massa m).
Nota la forza $\bar{F}$ che agisce su esso, l'eq. di Newton ci fornisce un'eq. diff. per il moto $\bar{r}(t)$ $\quad \bar{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\; t \mapsto \bar{r}(t)$



$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

↑
coordinate

Il moto è descritto da una funz. $\bar{r}(t)$ a valori in $\mathbb{R}^3$ cioè da tre funz. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ t.c.

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Un set di coordinate di $\mathbb{R}^3$ è un insieme di tre numeri che individuano UNIVOCAMENTE un pto di $\mathbb{R}^3$

Ci sono infiniti set di coord. Per es. in $\mathbb{R}^3$ ci sono anche le coord. POLARI $\quad \bar{r} \sim \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$

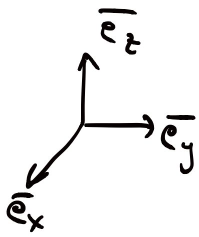
$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, \bar{v}, t) \qquad \text{(in sist. di rif. inerziale)}$$

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

vettori : sono uguali se sono uguali le loro componenti rispetto a una base

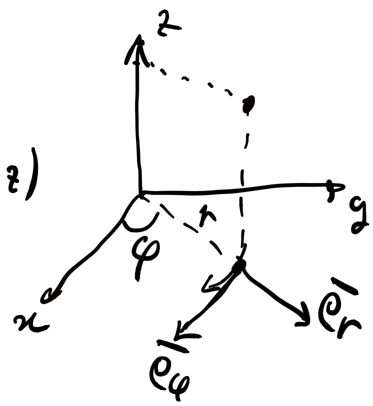
Sist. di rif. cartesiano :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$



Sist. di rif. con coord. cilindriche (r, φ, z)

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$



Cambio di coordinate

$\{x, y, z\}$ $\qquad\qquad$ $\{q_1, q_2, q_3\}$

Per passare da un set di coord. all'altro ho bisogno di tre funzioni

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

"trasf. di coordinate"

Es. $(q_1, q_2, q_3) = (r, \varphi, z)$ coord. cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Deve essere INVERTIBILE, cioè la matrice jacobiana della mappa è una matrice invertib. (cioè det $\neq 0$)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

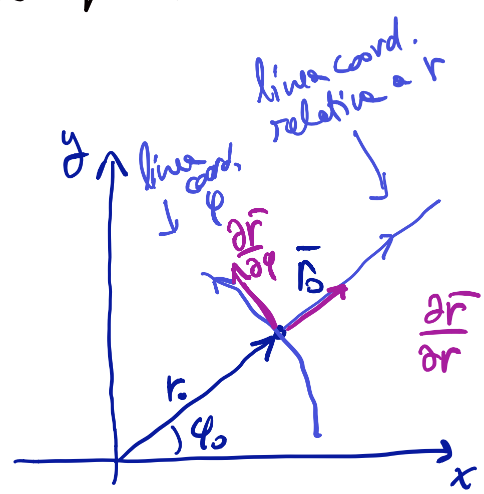
$$\underbrace{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}}_{\text{vettori tangenti alle linee coordinate}}$$

devono essere LINEARM. INDEP.

cioè devono formare una BASE per $\mathbb{R}^3$

ES.) $\mathbb{R}^2$ (x,y) (r,φ)

Trasf. coord.: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$



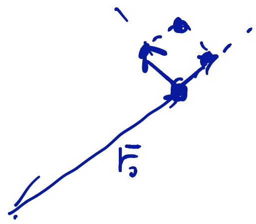
(r,φ) è un buon sist. di coord. se dati r e φ gli individua un pto e se ogni pto del piano è individuato da una coppia (r,φ)

In particolare, se parto da un pto $\bar{r}_0$ (individuato da (r_0,φ_0)), variando r e φ in un intorno di r_0,φ_0 devo essere in grado di toccare tutti i pti dell'intorno di $\bar{r}_0$

linee coord. r: $\begin{pmatrix} x(r,\varphi_0) \\ y(r,\varphi_0) \end{pmatrix}$ ← parametro della curva

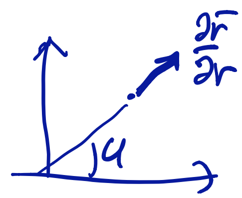
tenendo fisso φ_0 e variando r

linee coord. φ: $\begin{pmatrix} x(r_0,\varphi) \\ y(r_0,\varphi) \end{pmatrix}$ (circonferenza di raggio r_0)

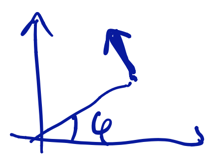


← i vett. tg alle linee coord. devono essere lin. indip.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$



$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$



Punto vincolato a stare su una superficie Q in $\mathbb{R}^3$

"spazio delle CONFIGURAZIONI"

Come descriviamo la superficie Q in $\mathbb{R}^3$?

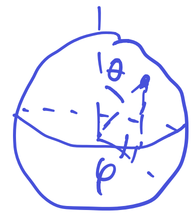
1) Luogo di pti che soddisfano

$f(x,y,z) = 0$ con f regolare e t.c. $\bar{\nabla} f \neq 0$ $\forall$ pto di Q

2) In forma parametrica

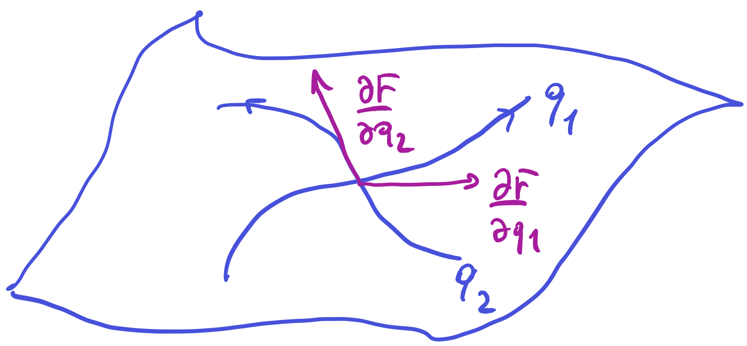
$$\begin{cases} x = x(q_1,q_2) \\ y = y(q_1,q_2) \\ z = z(q_1,q_2) \end{cases} \qquad \bar{r} = \bar{r}(q_1,q_2)$$

ES.) SFERA in $\mathbb{R}^3$ di raggio R



1) $x^2+y^2+z^2-R^2=0$

2) $\begin{cases} x = R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ y = R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}$ $(q_1, q_2) \equiv (\theta, \varphi)$



$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}$ sono due vett. indipend. tg alla superficie (altrimenti la parametrizzazione non sarebbe buona).

Tutti i vettori tangenti alla superficie in un pto $(q_1^{(0)}, q_2^{(0)})$ sono esprimibili come combinaz. lineare di $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}$.

L'insieme di tutti i vett. tg nel pto P è chiamato SPAZIO TANGENTE T_pQ

$\delta \bar{r} \in T_pQ$ "spostamento virtuale"

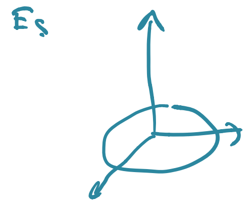
$\hookrightarrow$ $\delta\bar{r} = \sum_{h=1}^{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} \delta q_h$ $\delta q_h \in \mathbb{R}$

coeff. del vett. $\delta \bar{r}$ rispetto alla base coordinata

Le coordinate q_1 e q_2 sono dette COORD. LIBERE

Punto materiale vincolato su una curva di Q :

1) $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$



$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2-R^2=0 \end{cases}$

2) $\bar{r} = F(q)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $q \equiv \varphi$

Formalmente la descrizione parametrica è analoga per tutti i tre casi visti (pto in $\mathbb{R}^3$ in coord. $q_1,\dots,q_3$; pt su superf., pto su linea)

$$\bar{r} = F(\underbrace{q_1,\dots,}_{\text{coord. libere}} q_m) \qquad \underset{\text{NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'}}{n} = 1, 2, 3$$

Dinamica

Vincolo è fisicamente realizzato da una FORZA (REAZIONE VINCOLARE) che in generale NON è nota a priori.

In presenza di un vincolo, l'eq. di Newton può essere scritta

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{\Phi}$$

forza esterna attiva

reaz. vincolare (un'ulteriore incognita del problema)

Def. VINCOLI IDEALI se la superficie o la curva sono "lisce", cioè se la reazione vincolare in P è sempre $\perp$ alla supf. o alla curva in P:

$$\bar{\Phi} \cdot \delta \bar{r} = 0 \qquad \forall\, \delta \bar{r} \in T_P Q$$
$$\Updownarrow \qquad (*)$$
$$\bar{\Phi} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n$$

$(*) \Rightarrow \bar{\Phi}$ compie lavoro nullo $\forall$ spostamento virtuale

$(*) \Rightarrow$ permette di ottenere n eq. diff. pure (in cui non appaiono le reaz. vincolari), proiettando le eq. di Newton (vett.) sulla supf. (in realtà su $T_P Q$)

$$m\bar{a} - \bar{F} = \bar{\Phi} \xrightarrow[\text{di } T_P Q]{\text{proiettiamo sui vett. di base}} \underbrace{\left(m\bar{a} - \bar{F}\right) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} = 0}_{n \text{ equazioni}} \quad h = 1, \dots, n \qquad (\star)$$

Il moto su Q è descritto dalle funzioni $q_h(t)$

$$t \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t)) \quad \leftarrow n \text{ funzioni } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Se conosciamo le $q_h(t)$ possiamo descrivere il moto in $\mathbb{R}^3$

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(q_1(t), \dots, q_n(t))$$

$(\star)$ sono n equazioni nelle n incognite $q_h(t)$ $h = 1, \dots, n$

Generalizzazione: VINCOLO MOBILE

$$\bar{r}(q_1, \dots, q_m, t)$$
$$\uparrow$$

($m=3$: moti relativi)

SISTEMI VINCOLATI DI N PTI MATERIALI

N pti materiali sono individuati da $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N$

$\rightarrow$ 3N coord. cartesiane

Notazione: $\bar{w} = (w_1, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2, z_2}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_N, y_N, z_N}_{\bar{r}_N})$

$w_j \quad j = 1, \dots, 3N$

$\bar{w} \in \mathbb{R}^{3N} \rightarrow$ un pto di $\mathbb{R}^{3N}$ mi da una configurazione di N pti

Def. Si dice che un sist. di N pti $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$ è soggetto a r VINCOLI OLONOMI $(0 < r < 3N)$, se l'insieme delle configurazioni accessibili soddisfa r equazioni della forma

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, r \qquad (\neq)$$

dove $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ sono funct. regolari e indip., cioè

$$\mathrm{rk}\left(\frac{\partial f^{(s)}}{\partial w_j}\right) = r \qquad \forall \text{ config. accessibile, cioè che soddisfa } (\neq)$$

"rango"

$$\updownarrow$$

$\bar{\nabla} f^{(1)}, \dots, \bar{\nabla} f^{(r)}$ sono lin. indip.

$\rightarrow$ $\forall$ tempo t, resta definita una varietà $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$ di dim. $m = 3N - r$

Q è chiamato SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

n è detto NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ

Possiamo introdurre (almeno localm.) una parametrizzazione di Q, cioè esprimere le w_i in funzione di n parametri q_h detti COORDINATE LIBERE

(Teorema della funz. implicite ci assicura che possiamo esplicitare r variabili in funz. delle rimanenti $3N-r$ $\rightarrow$ es. di una parametrizzazione)

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_n ; t) \qquad j = 1, \dots, 3N$$

t.c.

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial w_j}{\partial q_h}\right)_{\substack{j=1,\dots,3N \\ h=1,\dots,n}} = n \iff \frac{\partial \overline{w}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \overline{w}}{\partial q_n} \text{ sono lin. indip.}$$

vett. tg alle linee coordinate relative a $q_1, \dots, q_n$

(Ci sono infinite parametrizzaz. possibili; data una parám. con $q_1, \dots, q_n$, possiamo fare una trasformaz. di coord. e passare a $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$)