MECCANICA RAZIONALE

Ing Civile & Ambientale
Navale

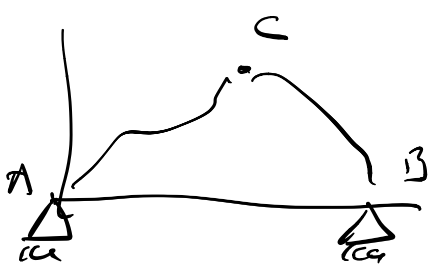
24 marzo 2021

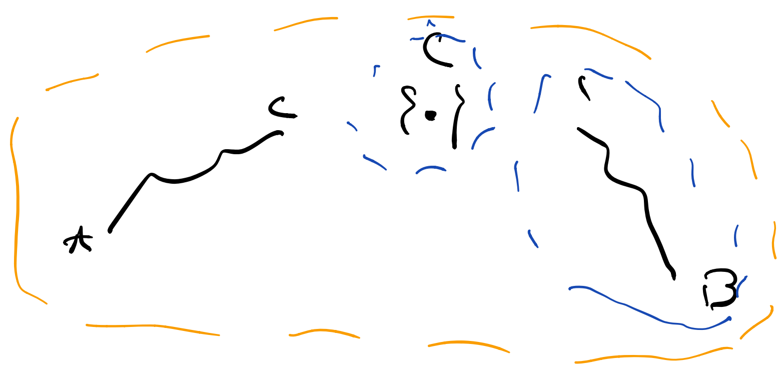
E.C.S. $\longrightarrow \begin{cases} \underline{R}^e = \underline{0} & \text{risultante forze esterne} \\ \underline{M}^e(O) = \underline{0} & \text{momento risultante forze esterne} \end{cases}$

Corpo rigido : ECS $\longleftrightarrow$ P.L.V.

Corpo articolato : equazioni necessarie per l'equilibrio

↳ ECS per tutto il sistema e per tutti i suoi sottosistemi





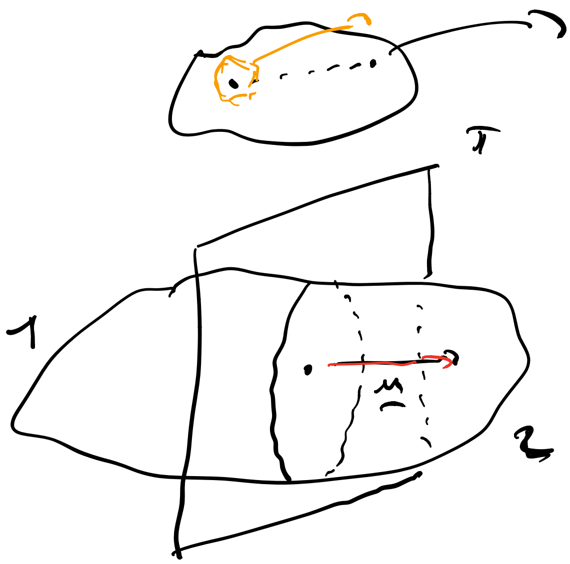
$\longrightarrow$ reazioni vincolari

Ad esempio → un modo per risolvere la statica = determinare l'equilibrio e la stabilità usando P.L.V. (assumendo forze conservative), calcolare le reazioni vincolari all'equilibrio usando le E.C.S.

Sforzi (Azioni) Interni ad un rigido

ECS → equilibrio di un rigido

Vogliamo capire come sono fatte le forze interne al rigido → quelle forze che lo mantengono rigido.



Sezioniamo $\mathcal{R}$ con un piano π

Fissiamo $O \in \pi$ e $\underline{n}$ (orientato da 1 a 2)

Consideriamo la parte 1: è in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne applicate ai punti di 1, e delle forze interne di 2 che agiscono attraverso la sezione

Quindi dalle E.C.S. su 1

- $\underline{R}_1^{(e)} + \underline{R}^{(i)} = \underline{0}$

risultante forze esterne su 1 — risultante delle forze interne di 2 su 1

- $\underline{M}_1^{(e)}(O) + \underline{M}^{(i)}(O) = \underline{0}$

$$\underline{R}^{(i)} = N\underline{n} + \underline{T} \quad , \quad \text{dove}$$

$N = \underline{R}^{(i)} \cdot \underline{n}$ sforzo normale scalare

$N > 0$ trazione

$N < 0$ compressione

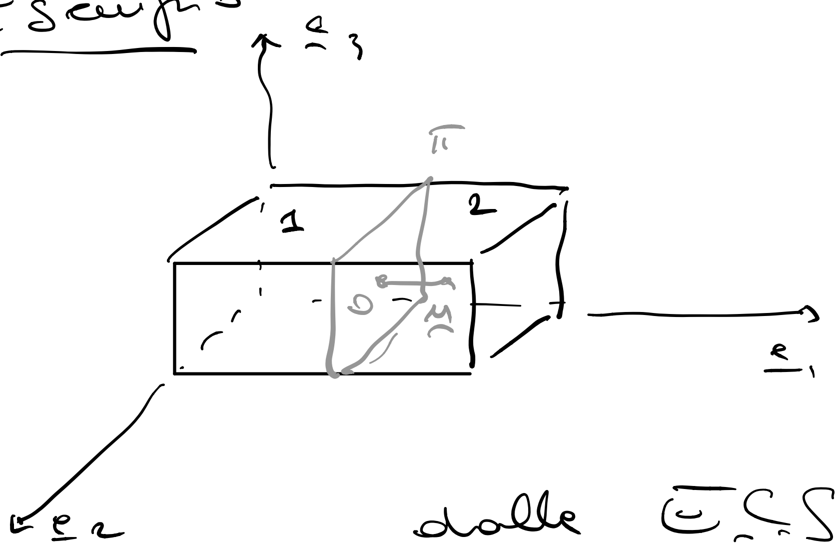
$\underline{T} = \underline{R}^{(i)} - N\underline{n}$ sforzo di Taglio vettore

$$\underline{M}^{(i)}(O) = M_T\,\underline{n} + \underline{M}_f(O) \quad , \text{ dove}$$

$$M_T(O) = \underline{M}^{(i)}(O)\cdot\underline{n}$$ momento torcente (scalare)

$$\underline{M}_f(O) = \underline{M}^{(i)}(O) - M_T\,\underline{n}$$ momento flettente (vettore)

Esempio



Supponiamo

$$\begin{cases} \underline{R}_1 = f\underline{e}_1 + 2f\underline{e}_2 \\ \underline{M}_1(O) = \mu\,\underline{e}_1 + 2\mu\,\underline{e}_3 \end{cases}$$

dalle E.C.S.

$$\underline{R}_1 + N\underset{\underline{e}_1}{\underset{\downarrow}{\underline{n}}} + \underline{T} = \underline{0}$$

uguagliando termini lungo $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$

$$\longrightarrow \begin{cases} N = -f \\ \underline{T} = -2f\,\underline{e}_2 \end{cases}$$

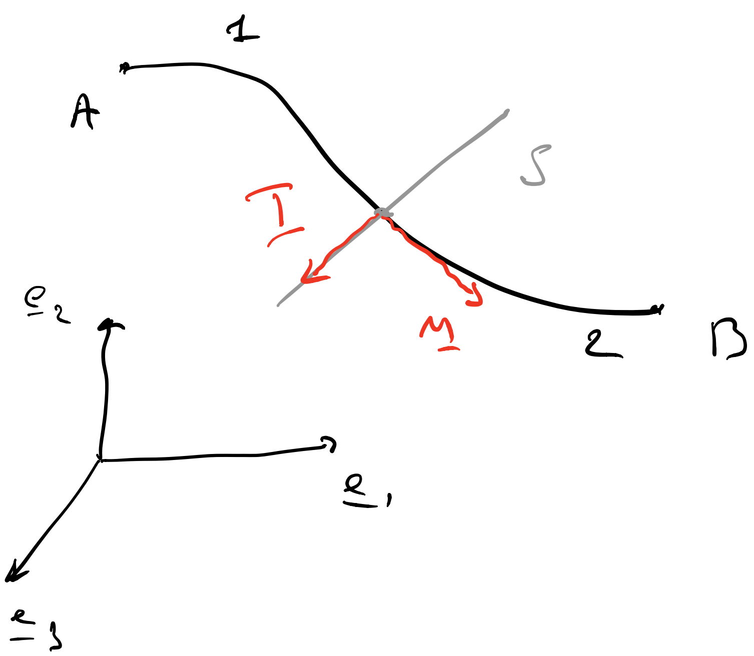
$$\underline{M}_1(O) + M_T\,\underline{n} + \underline{M}_f = \underline{0} \longleftarrow$$

$$\longrightarrow \quad M_T = -\mu$$

$$\underline{M}_f = -4\mu\, \underline{e}_3$$

Archi rigidi piani

Arco piano 1-dim, la sezione è ortogonale alla curva e si riduce ad un punto



rigido piano
Tutte le forze esterne stanno sul piano

$$\underline{x} = \underline{x}(s) \qquad s \in [0, L]$$

$$\underline{x}_A = \underline{x}(0)$$

$$\underline{x}_B = \underline{x}(L)$$

Convenzionalmente:

parte 1 AS : precede S

parte 2 SB : segue S

Dalla geometria: $\underline{m} = \dfrac{d}{ds}\underline{x}(s)$

Siccome siamo sul piano $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

- $\underline{R}^{(i)} \in$ piano $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

  $\underline{n}$ tangente all'arco

  $\underline{T}$ diretto come la normale geometrica

- $\underline{M}^{(i)}(s)$ ortogonale al piano della curva

Quindi necessariamente $M_T = 0$

Rimane solo $\underline{M}_f(S)$ che

è diretto lungo $\underline{e}_3$

Le equazioni di bilancio

$$\begin{cases} \underline{R}_1^{(e)} + N(s)\,\underline{n}(s) + \underline{T}(s) = \underline{0} \\ \underline{M}^{e,\pi}_{(S)} + \underline{M}_f(S) = \underline{0} \end{cases}$$

per ogni sezione $\longrightarrow$ $N(s)$, $\underline{T}(s)$, $M_f(s)$

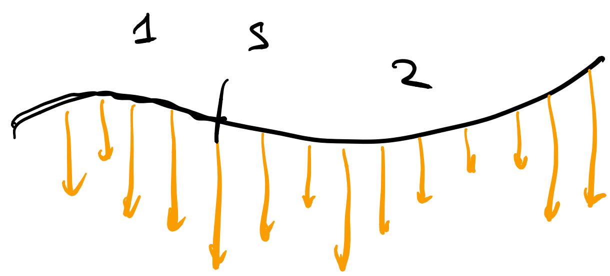
Occorre sapere come sono distribuite le forze esterne:

- forze concentrate: applicate in un punto preciso

• forze distribuite : applicate su tutto il rigido

↳ forza specifica $\underline{f}(s)$

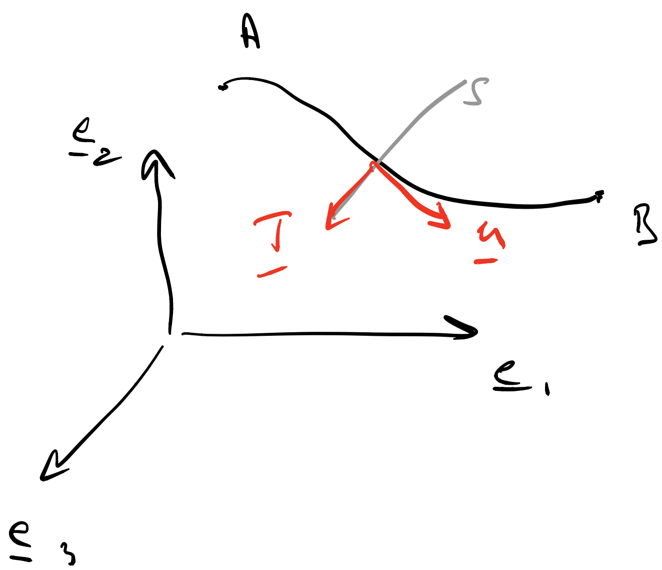
(ad esempio $\underline{f}(s) = \rho(s)\,\underline{g}$)



$$m(s) = \int_0^s \rho(x)\,dx$$

forza specifica di lunghezza $\underline{f}(s)$

Seconda parte



Arco piano

↓

$(N(s), \underline{T}(s), M_f(s))$

$$\begin{cases} \underline{R}_1^{(e)} + N\underline{u} + \underline{T} = \underline{0} \\ \underline{M}^{e,1}(s) + \underline{M}_f(s) = \underline{0} \end{cases}$$

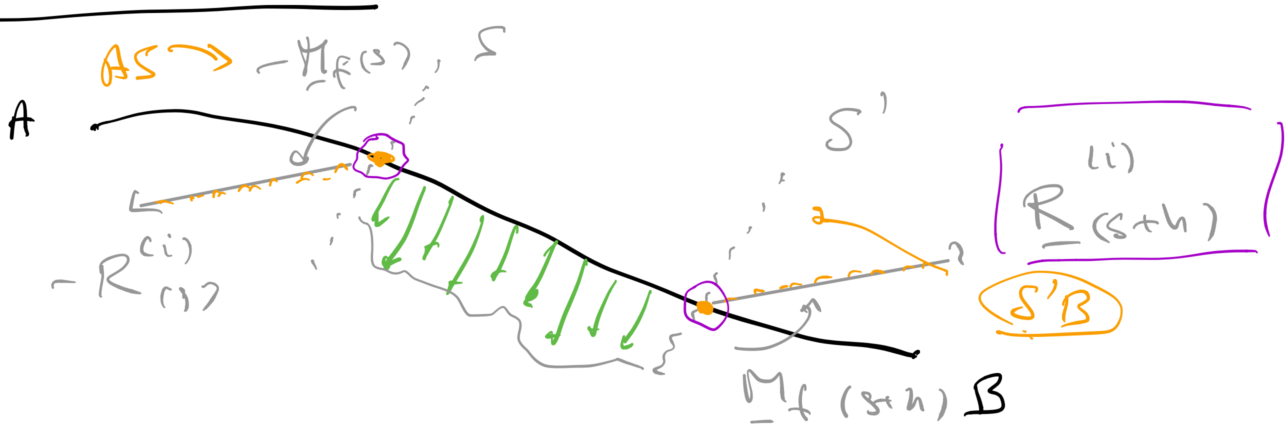
<u>Teorema</u> (Relazioni differenziali per gli sforzi interni)

Supponiamo
- una forza concentrata in un intorno della sezione
- forza specifica sia regolare
- arco sia regolare

Allora gli sforzi interni sono regolari e

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\left(N(s)\,\underline{u}(s) + \underline{T}(s)\right) = -\underline{f}(s) \\ \frac{d}{ds}\,\underline{M}_f(s) = \underline{T}(s) \wedge \underline{u}(s) \end{cases}$$

Dimostrazione   Consideriamo:



consideriamo l'arco tra S e S', determinato dai parametri s e s+h. (con h > 0)

$\underline{R}^{(i)} = N\underline{u} + \underline{T}$
$\underline{M}_f$
: sono definiti in ogni sezione come gli sforzi che

la parte successiva alla sezione esercita sulla parte precedente.

Forze che agiscono su SS':

- forze esterne, di forza specifica

  $\underline{f}(\xi)$, $\xi \in [s, s+h]$

  Risultante: $\underline{R}^{SS'}(s) = \int_s^{s+h} \underline{f}(\xi)\, d\xi$

  Momento risultante

  $$\underline{M}^{SS'}(s) = \int_s^{s+h} (\underline{x}(\xi) - \underline{x}(s)) \wedge \underline{f}(\xi)\, d\xi$$

  polo

- sforzi interni di $S'B$ su SS' (tramite la sezione S') $s+h$

  risultante: $\underline{R}^{(1)}(s+h)$

  momento: $\underline{M}_f(s+h)$

- sforzi interni di AS su SS' (tramite la sezione S) s

risultante : $-\underline{R}^{(i)}(s)$

momento : $-\underline{M}_f(s)$

[infatti: sono opposti a quelli che la parte successiva ad S esercita e quello precedente ad S]

Quindi : equilibrio SS' $\longrightarrow$ dalle equazioni di bilancio

$$\underline{R}^{ss'} + \underline{R}^{(i)}(s+h) - \underline{R}^{(i)}(s) = \underline{0}$$

$$\underline{M}^{ss'} + \underline{M}_f(s+h) - \underline{M}_f(s) + (\underline{x}(s+h) - \underline{x}(s)) \wedge \underline{R}^{(i)}(s+h) = \underline{0}$$

[$(\underline{x}_P - \underline{x}_0) \wedge \underline{F}_P$]

Adesso dividiamo per h, e poi $h \to 0$

- $$\frac{\underline{R}^{(i')}(s+h) - \underline{R}^{(i)}(s)}{h} = -\frac{1}{h}\,\underline{R}^{ss'}$$

- $$\frac{\underline{M}_f(s+h) - \underline{M}_f(s)}{h} = -\frac{1}{h}\,\underline{M}^{ss'}(s) + {}$$
$$+\ \underline{R}^{(i')}(s+h) \wedge \frac{\underline{x}(s+h) - \underline{x}(s)}{h}$$

Forza specifica è regolare: deve essere limitata, $\|\underline{f}\| < F$ costante F

- $$\underline{R}^{ss'} = \int_s^{s+h} \underline{f}(\xi)\,d\xi \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

- $$\frac{\underline{R}^{ss'}}{h} = \frac{1}{h}\int_s^{s+h} \underline{f}(\xi)\,d\xi \xrightarrow[h\to 0]{} \underline{f}(s)$$

[ad esempio se prendiamo g t.c. $\frac{d}{ds}g = f$, $\frac{1}{h}\int f = \frac{g(s) - g(s+h)}{h}$
$\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{dg}{ds} = f$]

$$\to \quad \frac{\underline{R}^{(i)}(s+h) - \underline{R}^{(i)}(s)}{h} = -\frac{1}{h}\underline{R}^{ss'}$$

$$\downarrow h \to 0 \qquad\qquad \downarrow h \to 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(N\underline{u} + \underline{T}\right) = -\underline{f}(s)$$

$$\cdot \quad \left\| \frac{\underline{M}^{ss'}(s)}{h} \right\| = \frac{1}{h}\left\| \int_s^{s+h} \left(\underline{x}(\xi) - \underline{x}(s)\right) \wedge f(\xi)\, d\xi \right\|$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \underbrace{\left\| \underline{x}(\xi) - \underline{x}(s) \right\|}_{\leq h} \underbrace{\left\| \underline{f} \right\|}_{\leq F} d\xi$$

$$\leq \frac{1}{h}\, h\, h\, F = h F \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Allora

$$\frac{\underline{M}_f(s+h) - \underline{M}_f(s)}{h} = -\cancel{\frac{1}{h}\underline{M}^{ss'}(s)} + \qquad h \to 0 \quad \to 0$$

$$+ \underline{R}^{(i)}(s+h) \wedge \frac{\underline{x}(s+h) - \underline{x}(s)}{h}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \quad \frac{d}{ds}\,\underline{M}_f(s) = \underline{R}(s) \wedge \underline{u}(1)$$

$$= \underline{T}(s) \wedge \underline{u}(1)$$

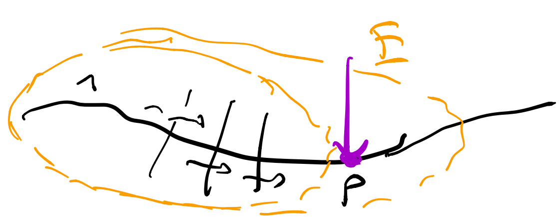
$$\underline{R} = \underline{\underline{u}}\, N + \underline{T}$$

Abbiamo osservato che non ci siano forze concentrate.

Se in S è applicata una forza concentrata $\longrightarrow$ le eq. diff non valgono

$\rightarrow$ punti di discontinuità per $N, \underline{T}$

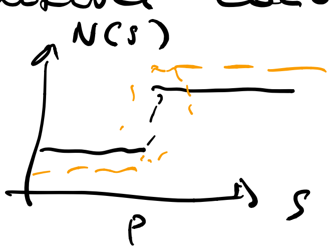
$\rightarrow$ punti angolosi di M_f (discontinuità della derivata)



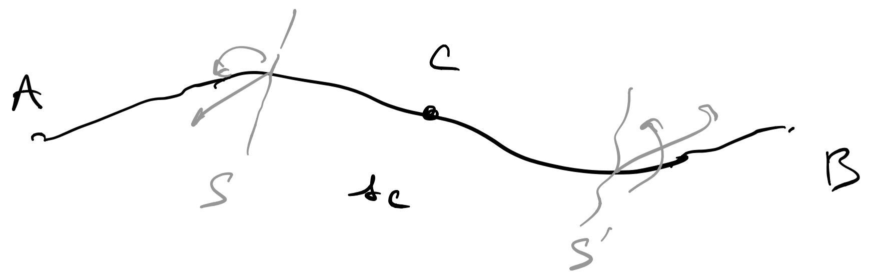
prima $\underline{R}_1 + N\underline{u} + \underline{T} = 0$

dopo $\underline{R}_1 + \underline{F} + N\underline{u} + \underline{T} = 0$

$N(s)$ funzione continua



Consideriamo una forza concentrata $\underline{F}_c$ applicata in un punto c della curva, corrispondente al valore s_c



$\underline{R}^{(i)}$, $\underline{M}_f$ sono regolari per $s \neq s_c$

dobbiamo aggiungere il contributo della forza concentrata $\underline{F}_c$.

- in $\underline{R}^{SS'}$ avremo anche $\underline{F}_c$
- $\underline{M}^{SS'}_{(s)}$ avremo anche il momento

$$\Big(\underbrace{\underline{x}(s_c)}_{\text{punto di applicazione}} - \underbrace{\underline{x}(s)}_{\text{polo}}\Big) \wedge \underline{F}_c$$

$$\underline{R}^{SS'} \xrightarrow[h \to 0]{} \underline{F}_c$$

per $s = s_c$ $\qquad \underline{F}_c + \left[\underline{R}^{(i)}\right]_{s=s_c} = \underline{0}$

$$\left[\underline{R}^{(i)}\right]_{s=s_c} = \lim_{s \to s_c^+} \underline{R}^{(i)}(s) - \lim_{s \to s_c^-} \underline{R}^{(i)}(s)$$

$\rightarrow$ N e T sono discontinue

- $\underline{M}^{(s)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ il momento flettente è continuo in $s = s_c$

Tuttavia:

$s = s_c$ $\frac{d}{ds} \underline{M}_f(s) = \underline{T}(s) \wedge \underline{y}$

è discontinuo in $s = s_c$

la derivata di M_f non è continua

Questo vuol dire che $\underline{M}_f$ non è derivabile in $s = s_c$

Diagramma degli sforzi interni

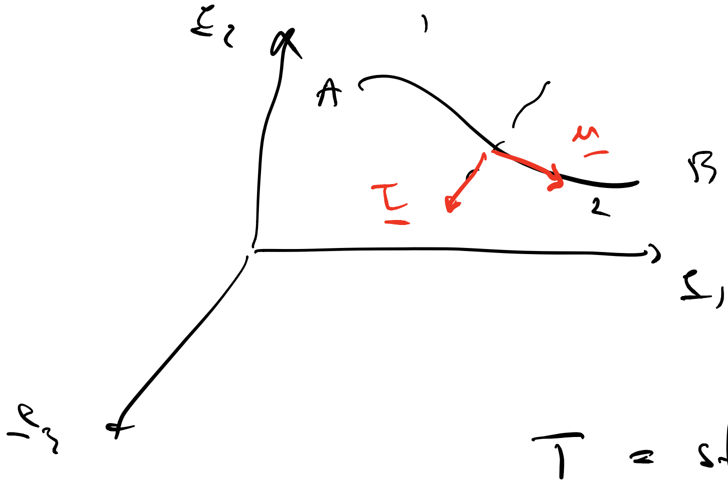
grafico degli sforzi in funzione di s

$N(s)$ scalare

mentre $\underline{T}$ e $\underline{M}_f$ vettori

$\rightarrow$ stabilire una convenzione

La convenzione che usiamo è



$$\underline{u} = \frac{d\underline{x}(s)}{ds}$$

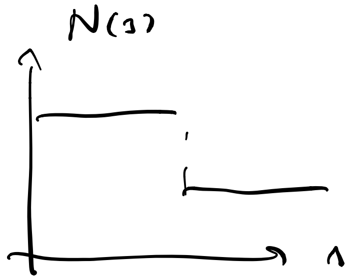
$$\underline{\tau} = \underline{u} \wedge \underline{e}_3$$

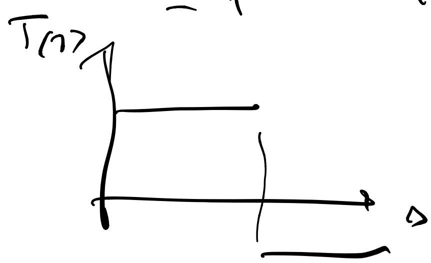
$$(\Rightarrow \underline{\tau} \wedge \underline{u} = \underline{e}_3)$$

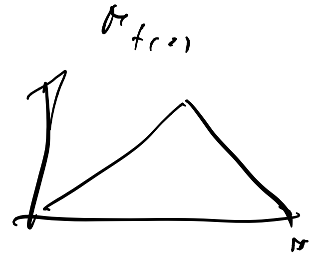
T = sforzo scalare di Taglio $\quad \underline{T} = T\,\underline{\tau}$

M_f = momento flettente scalare

$$\underline{M}_f = M_f\,\underline{e}_3$$







Terza parte

Archi scarichi

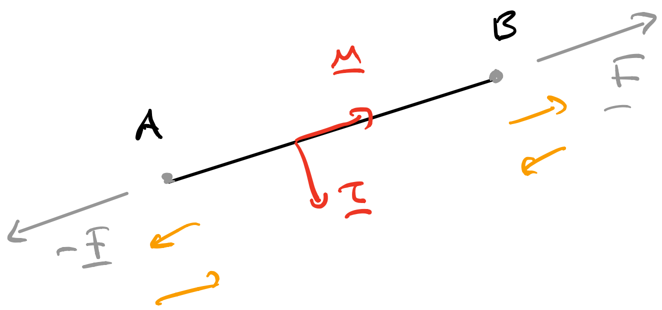
Chiamiamo arco scarico un arco rigido che è soggetto solo a due forze applicate alle estremità

Per avere equilibrio

Equilibrio della parte 1

$$-\underline{F} + N\underline{n} + T\underline{\tau} = \underline{0}$$

$$-(\underline{x}_A - \underline{x}_s) \wedge \underline{F} \cdot \underline{e}_3 + M_f = 0$$



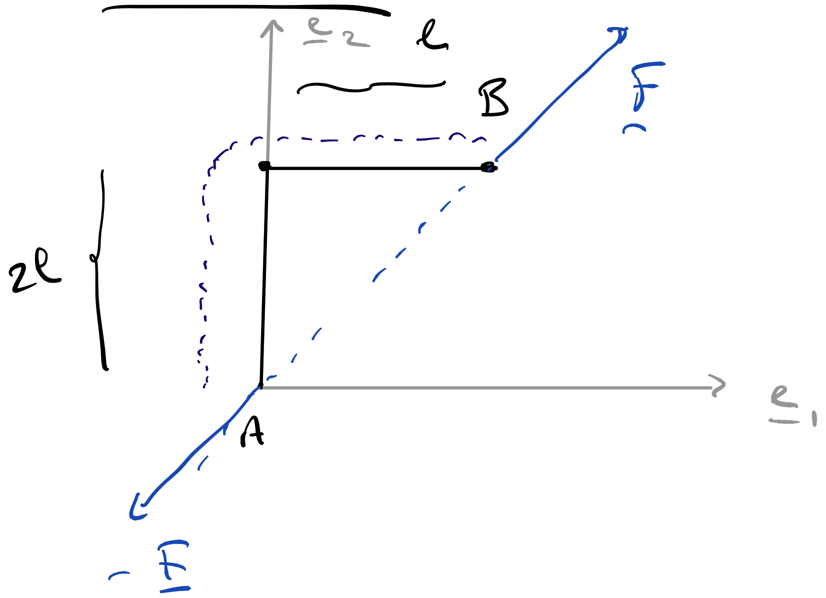
Per la asta

$T = 0$, $M_f = 0$

$N = \pm \|F\|$

trazione o compressione

Esercizio



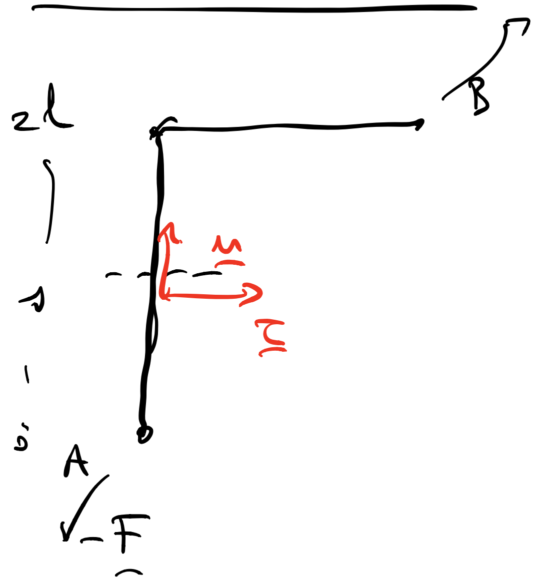
Vogliamo calcolare gli sforzi interni lungo AB, misurati a partire da A

$$\underline{F} = F \,\mathrm{vers}(\underline{x}_B - \underline{x}_A)$$

$$F > 0$$

Conviene suddividere $0 < s < 2l$, $2l < s < 3l$

Per $0<s<2\ell$



$$\underline{n} = \underline{e}_2$$

$$\underline{\tau} = \underline{e}_1 \quad (= \underline{n} \wedge \underline{e}_3)$$

Allora

$$-\underline{F} + N\underline{e}_2 + T\underline{e}_1 = \underline{0}$$

$$\underline{F} = F \,\text{vers}\,(\underline{x}_B - \underline{x}_A) = F \, \frac{\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2}{\sqrt{5}}$$

$$= F \, \frac{\underline{x}_B - \underline{x}_A}{\| \underline{x}_B - \underline{x}_A \|} \qquad \sqrt{5} = \sqrt{1+4}$$

quindi $-F \, \dfrac{\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2}{\sqrt{5}} + N\underline{e}_2 + T\underline{e}_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{2}{\sqrt{5}} F, \quad T = \frac{1}{\sqrt{5}} F$$

Per i momenti

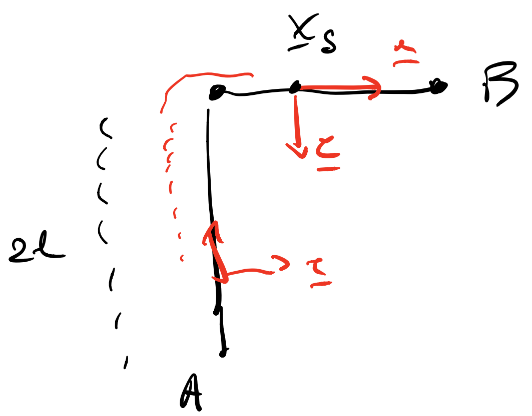
$$M_f + (\underline{x}_A - \underline{x}_s) \wedge (-\underline{F}) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

$$M_f + s\,\underline{e}_2 \wedge \frac{F}{\sqrt{5}} (\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

$$\hookrightarrow \quad M_f = \frac{F}{\sqrt{5}} s$$

Infatti: $\dfrac{d}{ds} M_f(s) = T(s) \qquad \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{F}{\sqrt{5}} s\right) = \dfrac{F}{\sqrt{5}}$

Per $2\ell < s < 3\ell$



$$\underline{n} = \underline{e}_1$$

$$\underline{t} = -\underline{e}_2 \quad (= \underline{n} \wedge \underline{e}_3)$$

Equazioni di bilancio

$$-\underline{F} + N\underline{e}_1 + T\underline{t} = 0$$
$$-T\underline{e}_2$$

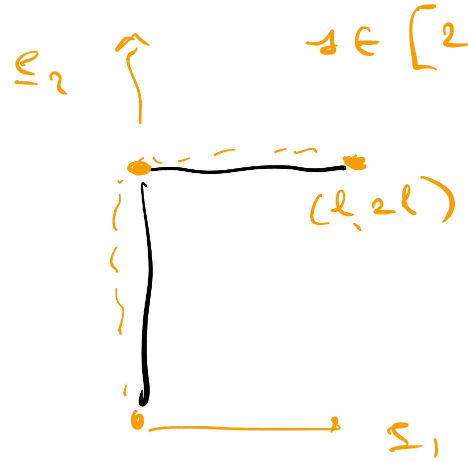
$$\underline{F} = \frac{1}{\sqrt{5}} F (\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2)$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{F}{\sqrt{5}}, \quad T = -\frac{2}{\sqrt{5}} F$$

Per i momenti: $M_f + (\underset{0}{\underline{x}_A} - \underset{\uparrow}{\underline{x}_s}) \wedge (-\underline{F}) \cdot \underline{e}_3 = 0$

$$M_f + \left[\underbrace{(s-2\ell)}\, \underline{e}_1 + 2\ell\, \underline{e}_2 \right] \wedge \frac{F}{\sqrt{5}} (\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

$s \in [2\ell, 3\ell]$



$s = 2\ell \qquad s - 2\ell = 0$

$s = 3\ell \qquad s - 2\ell = 3\ell - 2\ell = \ell$

$$M_f + \left[(s-2\ell)\, \underline{e}_1 \wedge \frac{F}{\sqrt{5}} (2\underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 \right. +$$

$$+\, 2l\, \underline{e}_2 \wedge \frac{F}{\sqrt{5}}\, \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3 \Big] =$$

$$= M_f + \frac{F}{\sqrt{5}} \left[2s - 4l - 2l \right]$$

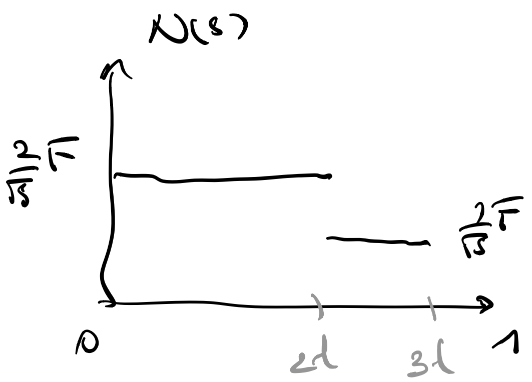
$$\Rightarrow \quad M_f = -\frac{2}{\sqrt{5}} F (s - 3l)$$

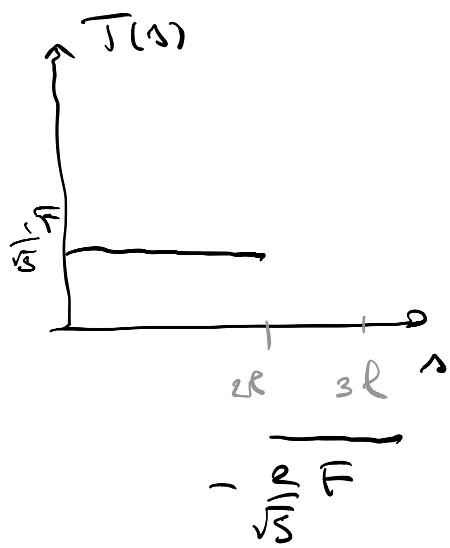
e infatti: $\dfrac{d}{ds} M_f = T \;\longrightarrow\; \dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}} F(s-3l)\right)$

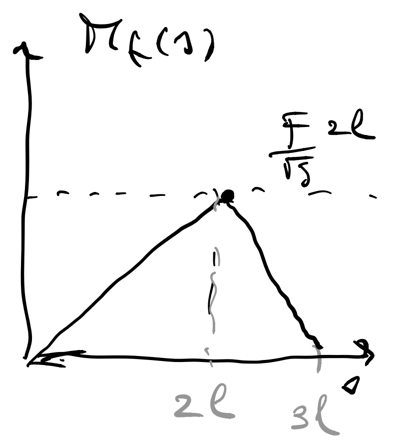
$$= -\frac{2}{\sqrt{5}} F = T$$

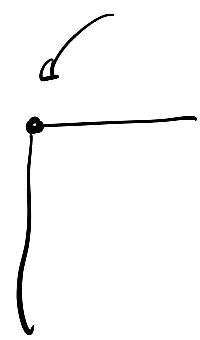
Riassumendo

$$N(s) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{5}} F & s \in (0, 2l) \\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{5}} F & s \in (2l, 3l) \end{cases} \qquad T(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}} F \\[2mm] -\dfrac{2}{\sqrt{5}} F \end{cases} \qquad M_f(s) = \begin{cases} \dfrac{F}{\sqrt{5}} s \\[2mm] \dfrac{2}{\sqrt{5}} F (3l - s) \end{cases}$$









$$\frac{d}{ds} M_{f(s)} = T_{(s)}$$