

SISTEMA DI N PTI MATERIALI VINCOLATI

$$\bar{w} = (w_1, \dots, w_{3N}) = \left(\underbrace{x_{11}, y_{11}, z_{11}}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_{21}, y_{21}, \dots}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_{N1}, y_{N1}, z_{N1}}_{\bar{r}_N} \right)$$

$w_j \quad j=1, \dots, 3N$

Vincoli:

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \quad s = 1, \dots, \tau$$

Gradi di libertà:

$$n = 3N - \tau$$

Forma parametrica:

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_n, t) \quad j=1, \dots, 3N \quad (*)$$

Def. Sistema di N pt. materiali costituisce un SISTEMA OLONOMO **locale** a n gradi di libertà ($n \leq 3N$), se la configurazione $\bar{w} \in \mathbb{R}^{3N}$ è espressa localmente nella forma parametrica (*), con funzioni w_j che soddisfano

$$\text{rk} \left(\frac{\partial w_j}{\partial q_h} \right) = n \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_n} \text{ sono lin. indep.}$$

e formano una base per lo spazio tangente $T_p Q$.

Un moto è descritto dalle funt. $q_h(t) \quad h=1, \dots, n$

$T_p Q = \left\{ \text{spazio delle possibili velocità che una traiettoria può avere passando per } p \right\}$



$\vec{v} \in T_p Q$ $\vec{v} = \sum_{h=1}^m \dot{q}_h \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_h}$ ← coordinate del vettore \vec{v} in $T_p Q$ (rispetto la base $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_h}$)

Andiamo a vedere pts in movimento; prendiamo pts i-esimo e definiamo "velocità virtuale"

$\vec{v}_i^* = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h$ $\vec{v} = (\vec{v}_1^*, \vec{v}_2^*, \dots, \vec{v}_N^*)$

Se voglio determinare lo STATO del sistema (vincolato) (cioè le posizioni e le velocità di ogni singolo pts)

devo dare le $2m$ coordinate

$(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$

Se ora voglio un moto $\vec{r}(t)$, questo è descritto da m funzioni $q_1(t), \dots, q_m(t)$

$\vec{r}(t) = \vec{r}(q_1(t), \dots, q_m(t))$ (vincoli fissi)

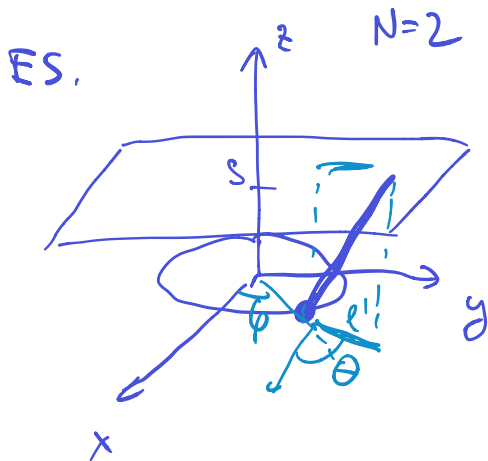
$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_h} \dot{q}_h(t)$ ← è la derivata temporale delle funz. $q_h(t)$

Se il vincolo non è fisso allora

$$\bar{w} = \bar{w}(q_1, \dots, q_m; t)$$

velocità è $\bar{v} = \frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}$

$$\bar{w}(t) = \bar{w}(q_1(t), \dots, q_m(t); t)$$



Relazioni vincolari:

$$r=4$$

$$x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0 \quad f^{(1)}$$

$$z_1 = 0 \quad f^{(2)}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \underbrace{(z_1 - z_2)^2}_{s^2} = l^2$$

$$z_2 = s \quad f^{(4)}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l'^2 = 0 \quad f^{(3)}$$

$$l'^2 = l^2 - s^2 \quad l > s$$

$$m = 3N - r = 6 - 4 = 2$$

$$\nabla f^{(1)} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f^{(3)} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ 0 \\ 2(x_2 - x_1) \\ 2(y_2 - y_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lin. indep.

Descr. parametrica

$$\begin{cases} x_1 = R \cos \varphi \\ y_1 = R \sin \varphi \\ z_1 = 0 \\ x_2 = R \cos \varphi + l' \cos \theta \\ y_2 = R \sin \varphi + l' \sin \theta \\ z_2 = s \end{cases}$$

$$\leftarrow \bar{w} = \bar{w}(\varphi, \theta)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \\ -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -l' \sin \theta \\ l' \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

← indep.

Vincoli ideali (dinamico)

Vincoli sono realizzati da FORZE (reazioni vincolari)

$$m\bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i \quad i=1, \dots, N$$

Il nostro scopo è ottenere n equazioni (indip. delle reaz. vincolari)

nelle n incognite $q_h(x)$ $h=1, \dots, n$ (funzioni)

Def. Si dice che un sist. olonoma di N pt. materiali è soggetto a VINCOLI IDEALI se l'insieme delle reaz. vincolari $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_N$ è caratterizzato dalle cond.:

$$\sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \quad \forall \delta \bar{r}_i \quad \leftarrow \text{reaz. vincolari devono compiere lavoro (virtuale) nullo}$$

Siccome $\delta \bar{r}_i = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h$, la cond. diventa

$$\sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \cdot \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_{h=1}^m \delta q_h \left(\sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) = 0 \quad \forall \delta q_h$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \quad h=1, \dots, m \quad (*)$$

$\rightarrow n$ eq. indipendenti.

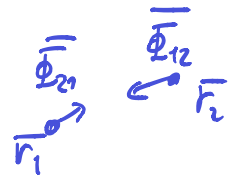
$$\left[a\alpha + b\beta = 0 \quad \forall \text{ scelte di } a \text{ e } b \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \right]$$

Esempio tipico di vincoli ideali: pti vincolati e una superficie liscia \rightarrow qui la condizione (*) è benelun. soddisfolto inda $\bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = 0 \quad \forall i$

ES.) Vincolo di rigidità: realizzato da forze interne che soddisfano la 3^a legge di Newton

$$N=2 \quad \|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|^2 = \text{cost.} \quad (*)$$

reat. vinc.: $\bar{\Phi}_{12}$, $\bar{\Phi}_{21}$ l.c. $\bar{\Phi}_{12} = -\bar{\Phi}_{21}$



Deriviamo (*) rispetto a $\frac{\partial}{\partial q_k}$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \left((\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \right) = 0$$

$$2(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_k} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_k} \right) = 0$$

Verifichiamo che il vincolo è ideale:

$$\bar{\Phi}_{21} \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_k} + \bar{\Phi}_{12} \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_k} = \bar{\Phi}_{21} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_k} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_k} \right) \propto$$

$$\propto (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_k} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_k} \right) = 0 \quad //$$

ENERGIA CINETICA

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_m) \quad \dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$$

Prendiamo un moto

$$\bar{r}_i(t) = \bar{r}_i(\bar{q}(t), t)$$

(Parametrizzazione del sistema vincolato e data dalle funzioni

$$\underline{\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t)}$$

$$\bar{v}_i(t) = \frac{d}{dt} \bar{r}_i(t) = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}(t), t) \cdot \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}(t), t)$$

le velocità possibili sono

$$\underline{\bar{v}_i} = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}, t) \cdot \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}, t) \quad (*)$$

↑
funzione di $\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t$

$$\underline{\underline{\bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}}$$

Prop. Dato un sist. olonomo di N pt. materiali e n pred. d'lib. e sia l'en. cinetica data da

$$T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\|^2 \quad T: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Allora si ha che

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad , \text{ dove}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^m a_{hk}(\bar{q}, t) \dot{q}_h \dot{q}_k$$

$$a_{hk}(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$

$$T_1 = \sum_{h=1}^m b_h(\bar{q}, t) \dot{q}_h$$

$$b_h(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} c(\bar{q}, t)$$

$$c(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

dove $a = (a_{hk})$ è una matrice SIMMETRICA
e strettam. DEFINITA POSITIVA

Dim. $T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\|^2$ $\bar{v}_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}(\bar{q}, t) \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}, t)$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{h,k=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k + 2 \sum_{h=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right]$$

$$a_{hk}(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$

- simm. $a_{hk} = a_{kh}$
- def. positive

[Matrice a è strett. def. pos. e \forall vett. $\bar{u} \neq 0$ ho che

$$(\underbrace{a\bar{u}}) \cdot \bar{u} > 0 \quad ; \quad \text{in componenti:}$$

$$\left[\sum_h \left(\sum_n a_{hn} u_n \right) u_h = \sum_{hk} a_{hk} u_h u_k > 0 \right]$$

verifichiamolo per la nostra a

$$\sum_{hk} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} u_h u_k$$

$$\bar{p}_i \equiv \sum_h \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} u_h$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \|\bar{p}_i\|^2 > 0 //$$

La matrice a è detta **MATRICE CINETICA**

• Siccome a è str. def. pos. $\leadsto \det a > 0$

$\Rightarrow a$ è INVERTIBILE

• Se \vec{r}_i è una funt. delle sole q_n (INDIP. da t) \vec{r}_i
 allora $T_1 = 0$ e $T_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T$ è una FORMA QUADRATICA OMOGENEA (def. 1a.)
 nelle \dot{q}_n .

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{n,k=1}^m a_{nk}(\vec{q}, t) \dot{q}_n \dot{q}_k$$

ES) Pto materiali in coord. cilindriche

$$F(q): \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = \zeta \end{cases} \quad q_1 \ q_2 \ q_3 \leftrightarrow r \ \varphi \ \zeta$$

$$\vec{v}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}): \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} = \dot{\zeta} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \left[(\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \right. \\ \left. + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + \dot{\zeta}^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \underline{\cos^2 \varphi} + r^2 \dot{\varphi}^2 \underline{\sin^2 \varphi} - 2 r \dot{r} \dot{\varphi} \cancel{\cos \varphi \sin \varphi} \right. \\ \left. + r^2 \underline{\sin^2 \varphi} + r^2 \dot{\varphi}^2 \underline{\cos^2 \varphi} + 2 r \dot{r} \dot{\varphi} \cancel{\sin \varphi \cos \varphi} + \dot{\zeta}^2 \right]$$

$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (r \ \varphi \ \dot{\zeta}) \begin{pmatrix} m & & \\ & m r^2 & \\ & & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\varphi} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}$$

$\leftarrow a(\vec{q}, t)$

ES) coordinate POLARI.

FORZE GENERALIZZATE

Prop. Sia \vec{F}_i la forza (attiva) sull' i -esimo pto materiale.
Allora il "lavoro virtuale" dato da $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$,
corrispondente agli spostam. virtuali $\delta \vec{r}_i = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h$,
è espresso in termini di coord. libere come

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{h=1}^m Q_h \delta q_h \quad \text{con} \quad Q_h = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h}$$

$h=1, \dots, m$

Q_1, \dots, Q_m sono dette FORZE GENERALIZZATE

In particolare, la forza \vec{F}_i puramente potenziale ~~conserv~~
in cui $\exists V = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ d.c. $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$
si ha

$$Q_h(\vec{q}, t) = - \frac{\partial \tilde{V}(\vec{q}, t)}{\partial q_h} \quad h=1, \dots, m \quad (\#)$$

dove $\tilde{V}(\vec{q}, t) \equiv V(\vec{r}_1(\vec{q}, t), \dots, \vec{r}_N(\vec{q}, t), t)$

Dim (#) : $Q_h = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} = - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} =$

$$\vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_h}$$

$$= - \frac{\partial \tilde{V}(\vec{q}, t)}{\partial q_h} //$$