SISTEMI DINAMICI

24 marzo 2021

$$\varphi^\tau : M \longrightarrow M \qquad \text{dinamica}$$
$$x \longmapsto x(\tau)$$

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f(x(\tau))$$
$$= f(x(\tau); \underset{\uparrow}{\mu})$$
parametro

biforcazioni

x, f sono su $\mathbb{R}$
$\rightarrow \mathbb{R}^N, N$

Sistemi dinamici 1-D discreti

Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
denotiamo con f^n la sua iterazione
n-esima, $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-volte}}$

Pensiamo ad f come ad un
processo che prende uno stato

iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ e lo trasforma in un nuovo stato $x_1 = f(x_0) \in \mathbb{R}$

$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$

$x_n = f^n(x_0)$. Il sistema evolve

$x_0, x_1, x_2, \dots$

Definiamo l'orbita in avanti (forward) di f come $O^+ = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Se f è invertibile: consideriamo l'orbita completa $O = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Il punto x_0 è detto seme (seed) dell'orbita

Ex $f(x) = x^2 + 1$

$x_0 = 0$, $x_1 = f(0) = 1$

$x_2 = f(x_1) = f^2(x_0) = 2$

$x_3 = f(x_2) = 2^2 + 1 = 5$

$x_4 = f(x_3) = 26$

Un punto x_0 si dice fisso se

$f(x_0) = x_0$ orbita di x_0 è $x_0, x_0, x_0, x_0 \dots$

Può succedere che un valore ritorni dopo n iterazioni $\longrightarrow$ n-ciclo

Diciamo che x_0 ha periodo minimo n se n è l'intero più piccolo per cui

$$f^n(x_0) = x_0$$

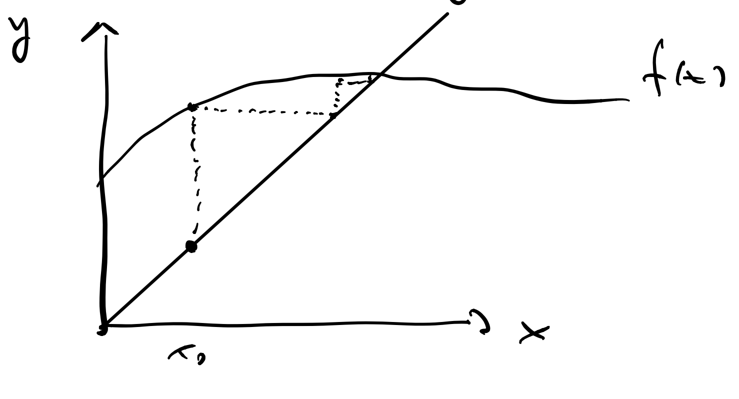
La sequenza $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ si ripete sotto f e forma l'analogo di un'orbita chiusa

<u>Esempio</u> $g_1(x) = x^3 \qquad g_1(0) = 0$

$g_2(x) = -x^3 \qquad g_2(0) = 0$

$$g_2(\pm 1) = \mp 1 \qquad g_2^2(\pm 1) = \pm 1$$

L'iterazione grafica

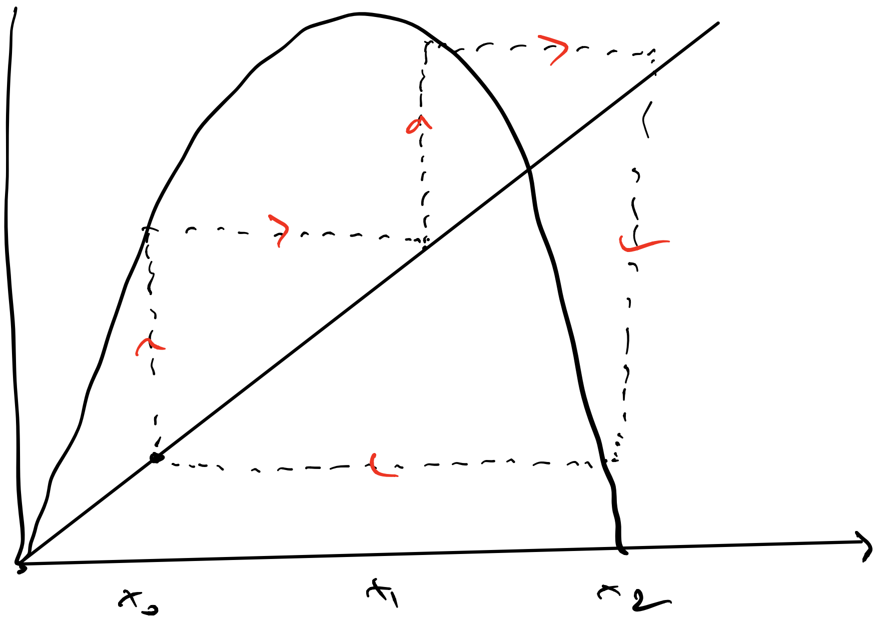


$y = f(x)$

$y = x$

Partiamo da (x_0, x_0) saliamo fino

$(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$. Disegnamo linea orizzontale fino a (x_1, x_1)



Un punto fisso è detto pozzo (sink) o attrattivo se possiamo trovare $U \ni x_0$ t.c. se $y_0 \in U$, allora $f^n(y_0) \in U$ $\forall n$ e $f^n(y_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$

Punto repulsivo: Tutte le traiettorie (tranne x_0) lasciano U dopo abbastanza iterazioni

<u>Teorema</u>: Consideriamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e assumiamo x_0 pto fisso. Allora

1. se $|f'(x_0)| < 1 \Rightarrow x_0$ attrattivo

2. se $|f'(x_0)| > 1 \Rightarrow x_0$ repulsivo

3. se $|f'(x_0)| = 1 \Rightarrow$ nessuna info sul carattere di x_0

Dim Caso 1. Allora $|f'(x_0)| = \nu < 1$

Scegliamo K t.c. $\nu < K < 1$.

f' continua, $\exists \delta$ t.c. $|f'(x)| < k$ $\forall x \in I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Allora (teo valor medio), preso $x \in I$ possiamo trovare c tra x e x_0

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}$$

Allora, siccome $c \in I$, abbiamo $|f'(c)| < k$. Quindi da segue $|f(x) - x_0| < k|x - x_0|$

Siccome $k < 1 \Rightarrow f(x) \in I$

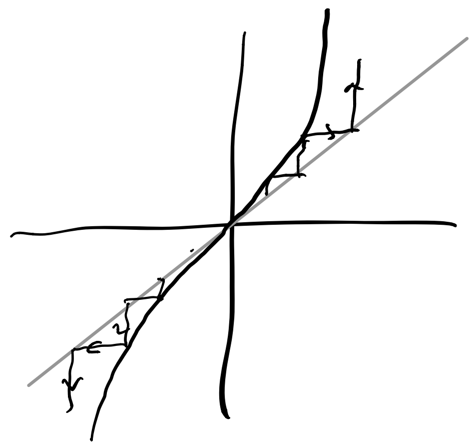
Iteriamo l'argomento, usando $f(x)$ al posto di x. Se lo iteriamo n volte troviamo

$$\left| f^n(x) - x_0 \right| < k^n \left| x - x_0 \right|$$

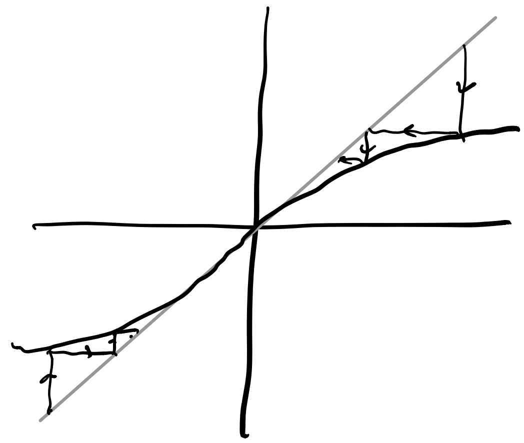
in particolare $f^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$

Per il caso 3.

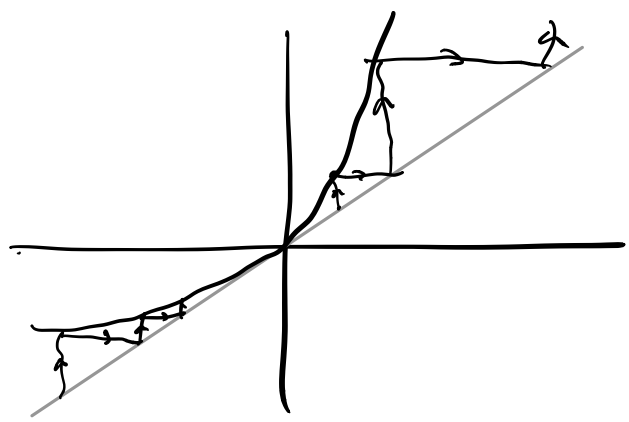
- $f(x) = x + x^3$
  ha una sorgente in zero
  $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$



- $g(x) = x - x^3$
  ha un pozzo in zero
  $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$



- $h(x) = x + x^2$
  $h(0) = 0$
  $h'(0) = 1$



$\blacksquare$

Seconda parte

Sistemi dinamici discreti

$\rightarrow$ mappe iterate

$f(x^*) = x^*$ pto fisso (attrattivi / repulsivi)

Criterio : $|f'(x^*)| \begin{matrix} > 1 \\ < 1 \end{matrix}$

Anche i modelli discreti hanno biforcazioni. Partiamo da f_λ famiglia a un parametro di funzioni

Teorema Sia f_λ famiglia a un parametro di funzioni, dipendenti in maniera differenziabile da λ. Sia x_0 un punto fisso, per un valore λ_0, $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$. Supponiamo $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$. Allora esistono due intervalli $I \ni x_0$, $J \ni \lambda_0$ e una funzione differenziabile $p : J \rightarrow I$ tale che $p(\lambda_0) = x_0$ e

$f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$. Inoltre f_λ non ha nessun altro punto fisso in I.

Dim Segue dal teorema della funzione implicita: $G(x,\lambda) := f_\lambda(x) - x$

Dalle ipotesi $G(x_0,\lambda_0) = f_{\lambda_0}(x_0) - x_0 = 0$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{(x_0,\lambda_0)} = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0$$

$\rightarrow$ teorema della funzione implicita

$\exists\, p \;|\; p(\lambda_0) = x_0 \,,\; G(p(\lambda),\lambda) = 0$

$G(x,\lambda) \neq 0$ tranne che per $x = p(\lambda)$ ∎

A parole: f_λ può avere una biforcazione che cambia il numero di punti fissi quando ho un punto fisso con derivata $= 1$.

(vedremo che c'è un altro tipo di biforcazioni per $= -1$)

Esempi

•) Prendiamo $f_c(x) = x^2 + c$ $\;c$ parametro

Punti fissi : $f_c(x) = x^2 + c = x$

$$x_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4c}}{2}$$

- no punti fissi per $c > \frac{1}{4}$
- un solo punto fisso per $c = \frac{1}{4}$
- due punti fissi per $c < \frac{1}{4}$

$$f_c'(x_+) = 1 + \sqrt{1-4c} > 1$$

•) $f_\mu(x) = \mu x + x^3$. Se $\mu = 1$

$f_1(0) = 0$, $f_1'(0) = 1$ $\to$ può

esserci una biforcazione

In generale punti fissi sono $0, \pm\sqrt{1-\mu}$

3 punti fissi per $\mu < 1$

1 punto fisso per $\mu > 1$

<u>Commento</u> Abbiamo visto che per $f' = 1$

ci può essere una biforcazione con

creazione di nuovi punti fissi.

Altro caso : quando $f' = -1$, in

questo caso ci può essere una biforcazione dove cambia il carattere di un punto fisso

<u>Esempio</u> Prendiamo $f_\lambda(x) = \lambda x$

$x=0$ è punto fisso, è attrattivo per $-1 < \lambda < 1$ $\left(|f'(x_0)| < 1 \right)$

Quando $|\lambda| > 1$, $x=0$ è repulsivo e quindi passando per $\lambda = -1$, il carattere del punto fisso passa da attrattivo a repulsivo.

Notiamo che per $\lambda = -1$, tutti i punti $\neq 0$ appartengono a 2 cicli ($f(2) = -2$, $f(-2) = 2$ ...)

<u>Modello logistico discreto</u>

Dato da

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

$$\lambda > 0$$

Per semplicità limitiamoci a variabile nell' intervallo unitario $I = [0, 1]$

La mappa è $f_\lambda(x) = \lambda x (1 - x)$

Due punti fissi in I

$x = 0 \qquad x_\lambda = \frac{(\lambda - 1)}{\lambda}$

Siccome $f' = \lambda(1 - 2x)$, allora $x = 0$

è attrattivo in I per $0 < \lambda < 1$

Repulsivo per $\lambda > 1$

Inoltre vediamo che $f_\lambda(1) = 0$

è fissato da $f^2(1) = 0$

Il secondo punto fisso è dato

da $x_\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ ed è attrattivo

per $1 < \lambda < 3$ e repulsivo per $\lambda \geq 3$

Per $\lambda = 3$ c'è una biforcazione

che cambia il carattere da attrattivo

a repulsivo

Il caso interessante è per $\lambda = 4$