- Lavoro

→ Se $\vec{F}$ è costante (in modulo, direzione e verso)
$\vec{s}$ è rettilineo

allora semplicemente $\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\alpha$ — positivo $\alpha < \pi/2$; negativo $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; nullo $\alpha = \pi/2$

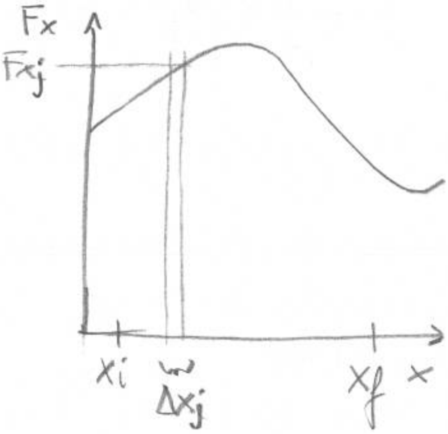
si misura in $N \cdot m$ → Joule

dina · cm → erg

($1\ J = 10^7\ erg$)

→ Se invece $\vec{F}$ non è costante: consideriamo caso unidimensionale

F_x forza
e F_x varia con x
x posizione



su un Δx_j sufficientemente piccolo, F_x è praticamente costante $= F_{x_j}$

$$\Delta\mathcal{L}_j = F_{x_j} \Delta x_j$$
= area del rettangolino

Per trovare il lavoro da x_i a x_f sommo tutti i contributi $\Delta\mathcal{L}_j$

$$\mathcal{L} = \sum_j \Delta\mathcal{L}_j = \sum_j F_{x_j} \Delta x_j$$

e per $\Delta x_j \to 0$ si ha

$$\mathcal{L} = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

→ Nel caso più generale (in 2D o in 3D) si ha

$$\mathcal{L} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

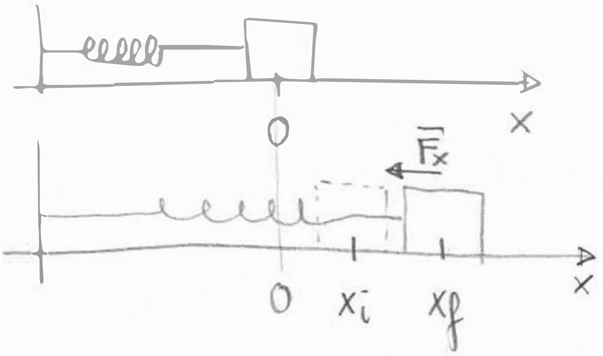
prodotto scalare!

lungo un certo percorso che va da $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ (integrale di linea)

Se invece di una singola $\vec{F}$ ho la risultante $\Sigma\vec{F}$

$$\mathcal{L} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \Sigma\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Esempio:



$$F_x = -kx$$

$$\mathcal{L} = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$= -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

(nel caso in figura $x_f > x_i$, quindi $\mathcal{L}$ è negativo).

- Energia: capacità di compiere lavoro
  si assiste a trasformazioni di energia di un tipo in un altro
  è una quantità che si conserva in un sistema isolato

Energia cinetica $\quad K = \frac{1}{2}mv^2 \quad$ di un corpo con massa m e velocità v

Vale teorema lavoro-energia:

$$\boxed{\mathcal{L} = \Delta K} = K_f - K_i$$

variazione di en. cinetica del corpo

lavoro della risultante su un corpo di massa m

Dimostrazione in 1D (con F variabile)

$$\Sigma F = ma$$

$$\mathcal{L} = \int_{x_i}^{x_f} \Sigma F \cdot dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}\,dx = \int_i^f m\,dv\frac{dx}{dt}$$

$$= \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_i^f = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K$$

- Forze conservative

Il lavoro per un percorso da A a B dipende solo da A e B e non dal particolare percorso seguito.

Ne segue che il lavoro per un percorso chiuso è nullo

La $\vec{F}$ di attrito non è conservativa (si dice dissipativa)

Definisco $U(\bar{r})$ tale che (SOLO X FORZE CONSERVATIVE)

$$\mathcal{L}_{AB} = U(\bar{r}_A) - U(\bar{r}_B)$$

$U(\bar{r}) \rightarrow$ energia potenziale

$$= U_A - U_B = -\Delta U$$

Sono conservative:

- le forze costanti come $\bar{p} = m\bar{g}$
- le forze elastiche $\bar{F} = -k\bar{x}$
- le forze radiali la cui intensità varia come $\frac{1}{r^2}$, come ad es:

$$\vec{F_g} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r}$$

Esempio con $\bar{p} = m\bar{g}$, $U = mgh$

$$\mathcal{L} = U_A - U_B = mgh_A - mgh_B$$

• Teorema energia cinetica se compiono lavoro solo $\vec{F}$ conservative

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L} &= \Delta K = K_B - K_A \\ \mathcal{L} &= -\Delta U = U_A - U_B \end{aligned}\right\} \quad \Delta K + \Delta U = 0$$

oppure

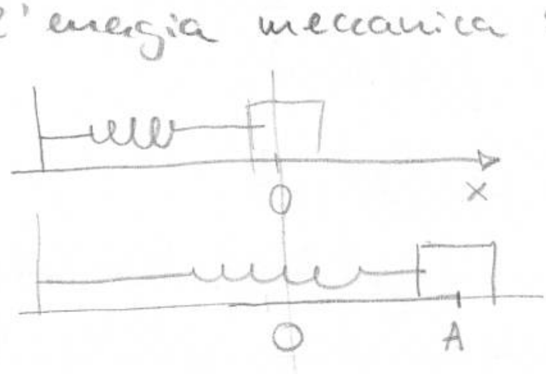
$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

se chiamo $E_{mecc} = K + U \Rightarrow \Delta(K+U) = 0$

$$E_{mecc\,A} = E_{mecc\,B}$$

$\Rightarrow$ l'energia meccanica si conserva

Esempio:
(sempre quello)



Portiamo il corpo in $x = A$ e lasciamo il sistema libero di evolvere. Ricordiamo:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

Inoltre abbiamo visto che $\mathcal{L} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = U_A - U_B$

e che $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ con $U = \frac{1}{2}kx^2$

$$E_{mecc} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(A^2\omega^2\sin^2(\omega t)\right) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{m}\left(A^2\frac{k}{\cancel{m}}\sin^2(\omega t)\right) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{si conserva!}$$

per $x = \pm A \Rightarrow v = 0$

$x = 0 \Rightarrow v = v_{max}$ e $\cancel{\frac{1}{2}}mv_{max}^2 = \cancel{\frac{1}{2}}kA^2$

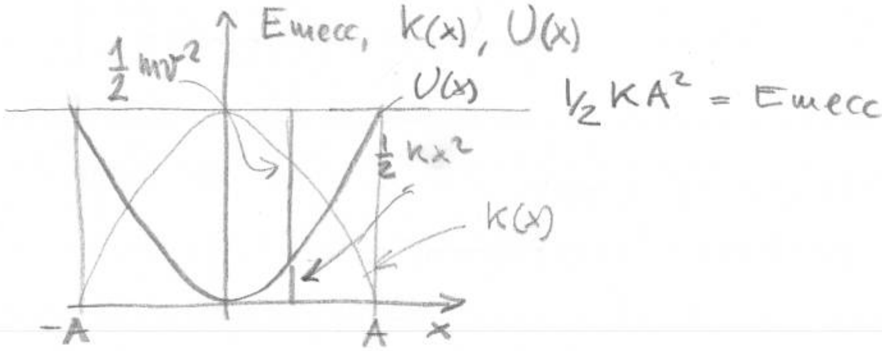
$$v_{max} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,A = \pm\omega A$$

In generale $\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2}$

$$= \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

In forma grafica:



• In presenza di forze non-conservative (dissipative), si ha:

$$\mathcal{L} = \Delta K \qquad \text{(di validità generale)}$$

$$\mathcal{L}_C + \mathcal{L}_D$$

lavoro delle forze non conservative

lavoro delle forze conservative. Questo si può scrivere in funzione di una energia potenziale $\mathcal{L}_C = -\Delta U$

Quindi:

$$\mathcal{L}_C + \mathcal{L}_D = \Delta K$$

$$-\Delta U + \mathcal{L}_D = \Delta K$$

$$\mathcal{L}_D = \Delta K + \Delta U = \Delta(K+U) = \Delta E_{mecc}$$

Poiché il lavoro delle forze dissipative (es. attrito) è negativo, anche ΔE_{mecc} è negativo $\Rightarrow$ si perde energia meccanica. Se il sistema è isolato, la perdita di E_{mecc} è compensata da un analogo aumento dell'energia interna del sistema.

$$-\Delta E_{mecc} = \Delta E_{int}$$

e quindi

$$\Delta K + \Delta U - \Delta E_{mecc} = 0$$

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$$

L'energia totale del sistema $(K + U + E_{int})$ si conserva, l'energia meccanica $(K+U)$ no.

• Campo di forze - (caso particolare di campo vettoriale)

Campo vettoriale: definito in ogni punto (di una certa regione) dello spazio e per ogni istante (di un certo intervallo) di tempo $\Rightarrow$ mi permette di definire la forza (o le forze) a cui è soggetto un corpo in quel punto dello spazio e in quell'istante di tempo.

Esempio: campo elettrico $\vec{E}(\vec{r},t)$

magnetico $\vec{B}(\vec{r},t)$

una particella di carica q che si muove in questa regione di spazio é soggetta alla forza (di Lorentz)

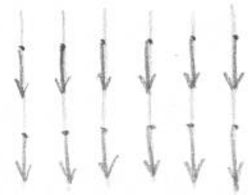
$$\bar{F} = q(\bar{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Un campo vettoriale può essere rappresentato

- disegnando i vettori per un certo insieme di punti dello spazio
- disegnando le linee di campo, tangenti ai vettori in ogni punto, e tanto più dense quanto più intenso é il campo.

Riprenderemo questi concetti nell'elettromagnetismo (→).
Per ora consideriamo altri esempi già noti

- Forza peso. $\vec{p} = m\vec{g}$
  può essere definita moltiplicando m con $\vec{g}$, campo vettoriale costante



- Forza di attrazione gravitazionale (ad es. terrestre)

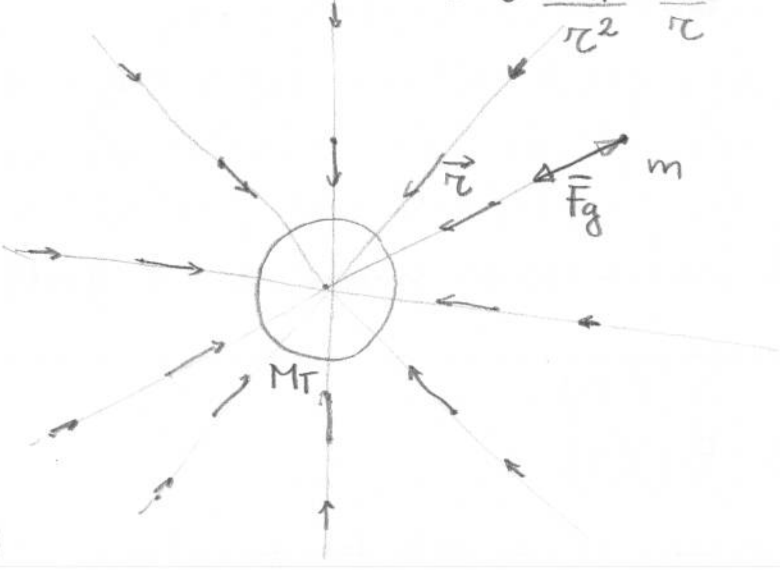
$$\vec{F}_g = -G\frac{M_T m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

vettore che parte dal centro della Terra ed arriva al corpo di massa m

M_T = massa della Terra

può essere definita moltiplicando m con il campo radiale:

$$-G\frac{M_T}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



Energia potenziale e campi di forze

Per le forze conservative si può definire l'energia potenziale U e $\mathcal{L} = -\Delta U$

Se $\begin{cases} \vec{F} \text{ è costante} \\ \Delta\vec{x} \text{ parallelo a } \vec{F} \end{cases}$ $\quad \mathcal{L} = F \cdot \Delta x = -\Delta U$

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Passando al limite $\Delta x \to 0$ trovo, anche per F non costante

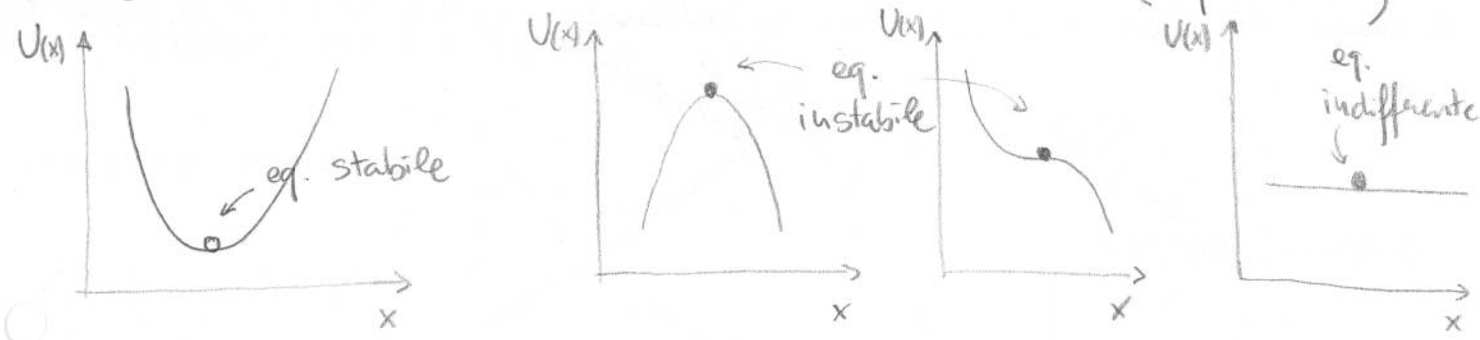
$$F = -\frac{dU}{dx}$$

In generale, si ha $\quad \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U \equiv -\bar{\nabla} U$

Quindi, per le forze conservative, il campo di forze (vettoriale) si ottiene calcolando il grad di un campo scalare U. Es: $U = mgz$, $\bar{F} = -mg\hat{k}$

Se U è costante (superficie equipotenziale) $\Rightarrow \bar{F} = 0$ (equilibrio) ** → v.p. 33

In 1D:



Potenza

$P_m = \dfrac{\mathcal{L}}{\Delta t}$ (media)

$W = \dfrac{J}{s}$

$P = \dfrac{d\mathcal{L}}{dt}$ (istantanea) $\quad P = \dfrac{d\mathcal{L}}{dt} = \bar{F} \cdot \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \bar{F} \cdot \bar{v}$

Rendimento

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{E} \cdot 100$$

$\mathcal{L}$ ← lavoro compiuto da una certa macchina

E ← energia necessaria al funzionamento della macchina

* Se ad esempio prendo il piano di un tavolo ho $z = cost$ e $U = mgz\Big|_{z=cost.}$

$$\bar{F} = -\bar{\nabla} U = 0$$

** Per la forza gravitazionale $\bar{F}_g = -\frac{G M_T m}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}$, si ha:

$$U = -G\frac{M_T m}{r}$$

Infatti $\bar{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} + \ldots$ altri termini nulli (perché U dipende solo da r)

$$\bar{F}_g = -\bar{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-G\frac{M_T m}{r}\right)\hat{r} = -G\frac{M_T m}{r^2}\hat{r}$$

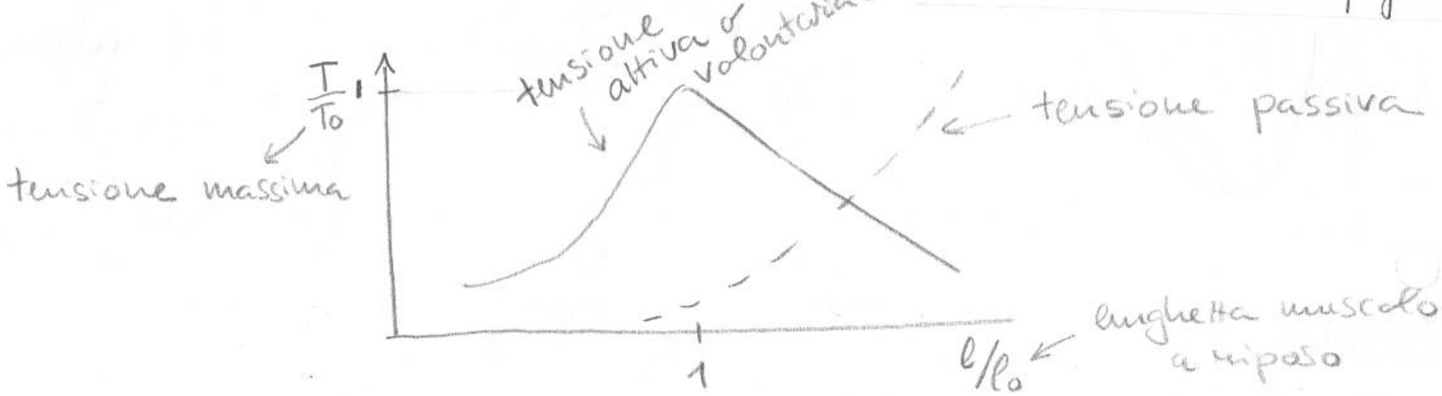
→ Lavoro in senso fisico e lavoro fisiologico

- In alcuni casi il lavoro in senso fisico rispecchia quello fisiologico
  Es: spingere una cassa su piano orizzontale con attrito
- In altri no:
  Es: trasportare una valigia in orizzontale (sollevandola)
  tenere sollevata una valigia (da fermi)
  arrampicarsi su una fune

→ Contrazione muscolare isometrica

NB: gli argomenti seguenti (fino a pag. 34, par. 5.8 del libro) NON sono stati trattati e NON sono inclusi nel programma

Il muscolo non si accorcia né si allunga



→ Contrazione muscolare isotonica

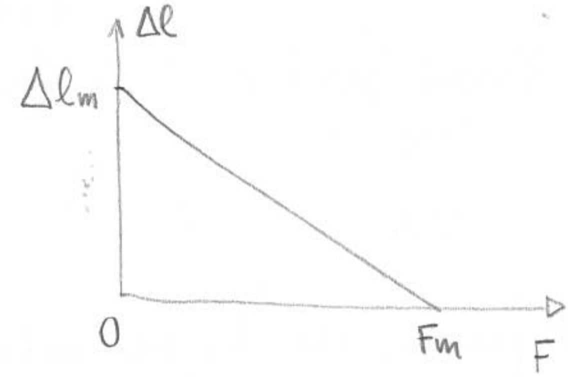
Il muscolo si accorcia agendo contro una forza esterna ⇒ c'è lavoro in senso fisico

Accorciamento $\Delta l = \Delta l_m \frac{F_m - F}{F_m}$

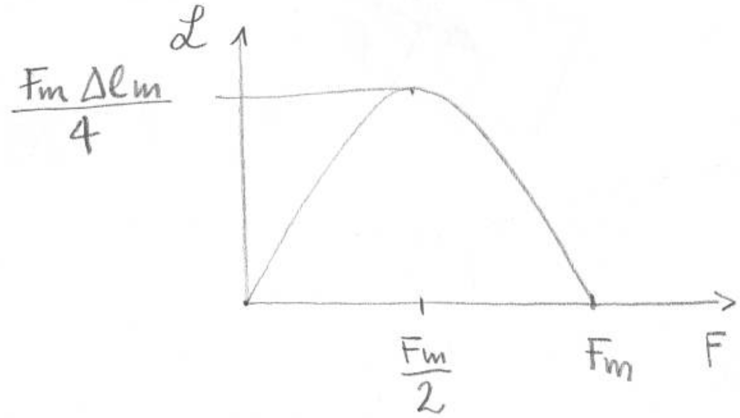
Δl_m → accorciamento massimo (per $F = 0$)

F → azione del carico esterno sul muscolo (dato il carico esterno, si deve valutare l'effetto della leva dell'articolazione in esame)
Per semplicità diremo F "carico esterno"

F_m → valore massimo del carico esterno F (corrisponde alla max tensione isometrica T_0)



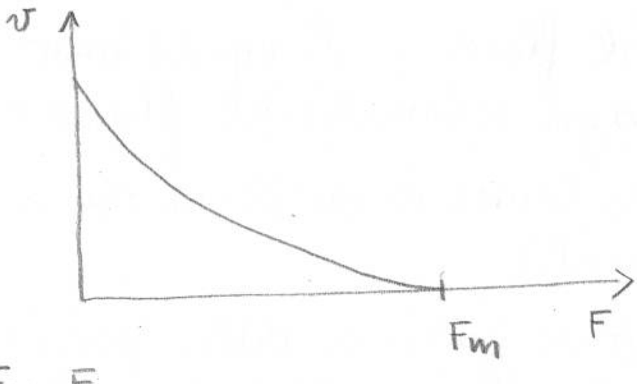
Lavoro: $\mathcal{L} = F \cdot \Delta l = F \, \Delta l_m \dfrac{(F_m - F)}{F_m} = F \Delta l_m - F^2 \dfrac{\Delta l_m}{F_m}$ ← parabola con vertice in $+\dfrac{\Delta l_m}{2 \frac{\Delta l_m}{F_m}} = \dfrac{F_m}{2}$



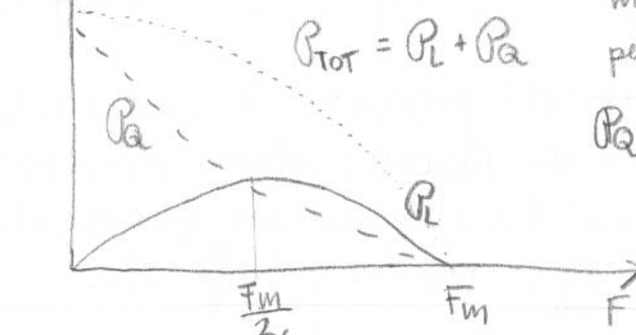
Per calcolare la potenza $P = F \cdot v$ si assume per la velocità di accorciamento v la legge di Hill:

$$v = b \, \frac{F_m - F}{F + a}$$

con a e b costanti opportune che dipendono dal muscolo e $a \gg F_m$



Infine $P_L = F \cdot v = F b \, \dfrac{F_m - F}{F + a}$



ma c'è anche P_Q per il calore di contrazione Q

$$P_Q = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Q \cdot v}{\Delta l}$$