

SISTEMA MECCANICO a N PNTI MATERIALI VINCOLATI (riassunto)

oggetto a π vincoli e descritto da n coordinate libere q_1, \dots, q_m ($n = 3N - \pi$)
 \bar{q}

- Ogni valore che \bar{q} può assumere individua un pto nello spazio delle configurazioni $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$
- Ogni pto di Q corrisponde a una POSSIBILE confg. del sistema.
- Al variare del tempo t , il sistema (gen. cas.) assume varie configurazioni

Descriviamo questo "moto" in Q con funz. del temp

$$\bar{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_m(t)) \quad \text{a ogni } t \text{ corrisponde (per.) un diverso pto in } Q$$

↳ l'immagine di pta funzione in Q è una CURVA, chiamata TRAIETTORIA (o ORBITA)

Il vett. tg alla traiettoria al temp t_0 è det da

$$\frac{d\bar{q}(t)}{dt} = (\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_m(t)) \quad (\text{funz. di } t_0)$$

Diverse traiettorie possibili che passano al pto P nel temp t_0 danno diversi vettori tangenti $\in T_P Q$

- L'insieme dei vett. tg forma uno spazio vettoriale ($T_P Q$), le cui coordinate (= componenti dei vett.) sono denotate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$

- Lo stato del sistema è determinato da 2m numeri:

$$(q_1, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \rightsquigarrow \text{ SPAZIO DEGLI STATI}$$

posizione in Q di P

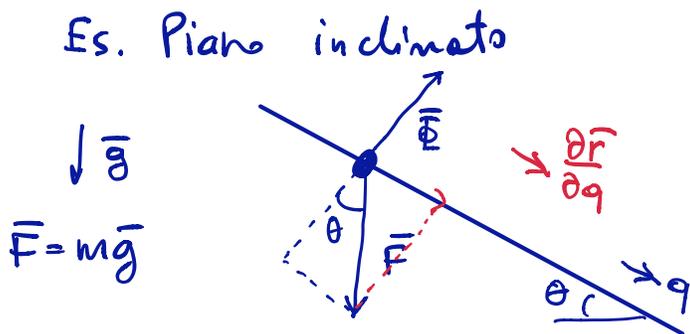
vett. tg a Q in P



~ "FIBRATO TANGENTE TQ "

↳ Ci interessa trovare delle equazioni differenziali con incognite $q_n(t)$, che determinino il moto del sistema in Q .

EQUAZIONI DI LA GRANGE



\vec{F} forza attiva
 $\vec{\Phi}$ reaz. vincolatore

Proiettiamo l'eq. di Newton sulla direzione \vec{t}_q alla linea coordinate q :

$$[\vec{F} + \vec{\Phi} - m\vec{a}] \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = 0$$

$$mg \sin \theta - m\ddot{q} = 0$$

Ora faremo lo stesso per un generico sistema di N pi. vincolati:

Sistema olonoma a n gradi di lib., N pi. materiali.

in $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ con masse m_1, \dots, m_N

sofferto alle forze attive \vec{F}_i e reaz. vinc. $\vec{\Phi}_i$ ideali

Ep. Newton:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i \quad i=1, \dots, N$$

↙ ignote

↳ eq. diff. per le funz. $\vec{r}_i(t)$

Vincoli ideali: $\sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \quad \forall h=1, \dots, m$

↑

$\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t)$

Proiettiamo le eq. di Newton sulle direzione tg a Q .

$$\sum_{i=1}^N (m_i \bar{a}_i - \bar{F}_i - \bar{\Phi}_i) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0$$

m equazioni
nelle m incognite
 $q_h(t)$

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t) \quad \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}, t) \quad \bar{v}_i(t) = \frac{d\bar{r}_i(t)}{dt}$$

$$\bar{r}_i(t) = \bar{r}_i(\bar{q}(t), t) \quad \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}(t), t)$$

$$- \bar{a}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt} \Rightarrow m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

$$= m_i \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) - m_i \bar{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

$$- \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_h}(\bar{q}(t), t) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_h}(\bar{q}(t), t) \dot{q}_k(t) + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_h}(\bar{q}(t), t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k}_{\bar{v}_i} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_h} \bar{v}_i(\bar{q}(t), \dot{q}(t), t)$$

$$- m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) - m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_h}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i(\bar{q}, t)}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i(\bar{q}, t)}{\partial t} \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_h} \left[(x, y) \quad \begin{array}{l} f(x, y) = x \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \end{array} \right]$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } l=h \\ 0 & \text{se } l \neq h \end{cases} = \delta_{lh}$$

$$= \sum_{l=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \delta_{lh} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

$$- m \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \right) - m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_h}$$

$$= m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial \dot{q}_h}$$

$$- \sum_{i=1}^N m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial \dot{q}_h} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i^2 \right)$$

\parallel \parallel
 $T(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$ T

[T é uma funç. $: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$]

$$- \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = - Q_h \quad (\text{forte generalidade})$$

Prop. Dato il sistema come sopra. Allora le funzioni $q_h(t)$ soddisfano le EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial q_h} = Q_h(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$$

Corollario Se le forze attive sono forze derivanti da un' en. potenziale $V(\bar{q}, t)$ allora le eq. di Lagrange diventano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial q_h} = 0$$

dove $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - V(\bar{q}, t)$

↑
LAGRANGIANA

$$L: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dim. $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$

Inoltre $Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h$

ES Osc. armonica $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = T - V$

Eq. Lagr. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$ $\frac{\partial L}{\partial q} = -m \omega^2 q$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q} = \frac{d}{dt} (m \dot{q}(t)) + m \omega^2 q(t) = m \ddot{q}(t) + m \omega^2 q(t)$$

Formalismo Lagrangiano può essere applicato anche a problemi che esulano la meccanica; in questi casi, generalm. L non ha la forma $T-V$.
 Se invece L è della forma $T-V$ il sistema è detto SIST. LAGRANGIANO NATURALE.

Eq. di LAGRANGE sono EQ. DIFF. del 2° ord nelle incognite $q_1(t), \dots, q_n(t)$.

$$T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^m a_{hk}(\bar{q}, t) \dot{q}_h \dot{q}_k}_{T_2} + \underbrace{\sum_{h=1}^m b_h(\bar{q}, t) \dot{q}_h}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} c(\bar{q}, t)}_{T_0}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_e} (\dot{q}_h \dot{q}_k) + \sum_h b_h \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \dot{q}_e} = \delta_{he}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_h \sum_k a_{hk} (\delta_{he} \dot{q}_k + \dot{q}_h \delta_{ke}) + \sum_h b_h \delta_{he}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m a_{ek} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^m a_{he} \dot{q}_h + b_e$$

↑ a_{ek} \leftarrow cambio nome all'indice
↑ a_{he} \leftarrow $= a_{eh}$ perché la matrice cinetica è SIMMETRICA

$$= \sum_{h=1}^m a_{eh}(\bar{q}, t) \dot{q}_h + b_e(\bar{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{h=1}^m a_{eh}(\bar{q}(t), t) \dot{q}_h(t) + b_e(\bar{q}(t), t) \right]$$

$$= \sum_{h,m} \frac{\partial a_{eh}}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_h + \boxed{\sum_h a_{eh} \ddot{q}_h} + \sum_k \frac{\partial b_e}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_h \frac{\partial a_{eh}}{\partial t} \dot{q}_h + \frac{\partial b_e}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_e} = \frac{1}{2} \sum_{h,k} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_e} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial b_k}{\partial q_e} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial q_e}$$

Eq. di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial T}{\partial q_e} = Q_e$ può essere scritta

$$\sum_h a_{eh} \ddot{q}_h + g_e(\bar{q}, \dot{q}, t) = Q_e$$

$$\sum_{h=1}^m a_{eh} \ddot{q}_h = Q_e - g_e$$

$$A \ddot{q} = \bar{Q} - \bar{g}$$

$$(\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t))$$

matrice
cinetica
è INVERTIBILE

$$\ddot{q} = A^{-1}(\bar{Q} - \bar{g}) = \bar{f}(\bar{q}, \dot{q}, t) \quad (*)$$

↳ Eq. diff. del 2° ord. in forma NORMALE

Prop. Dato un sist. dinamico di N pti materiali e m gradi di libertà, con essequato dato iniziale $(\bar{r}_i^{(0)}, \bar{v}_i^{(0)})$ compatibile con il vincolo, allora le eq. di Lagrange (*) determinano UNIVOCAMENTE le $\bar{r}_i(t)$ $i=1, \dots, N$ e ci permettono di trovare le rest. vincolari $\bar{\Phi}_i$.

Dim. $\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t)$ $\bar{v}_i = \bar{v}_i(\bar{q}, \dot{q}, t)$

Dati $\bar{r}_i^{(0)}$ e $\bar{v}_i^{(0)}$ compatibile col vincolo \rightarrow

$$\rightarrow \dot{q}_h^{(0)}, \ddot{q}_h^{(0)}$$

Teor. d'es. unic.

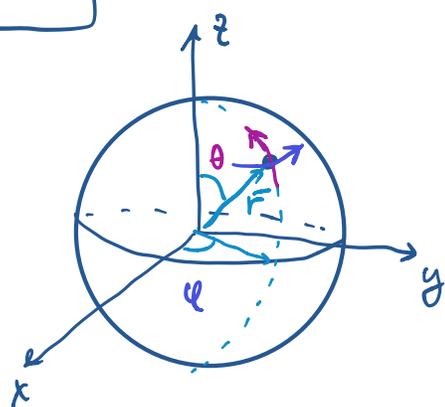
Eq. (*) eq. 2° ord. in $q_h(t) \rightarrow \bar{q}(t)$ sono determinate univocamente da $\bar{q}^{(0)}, \dot{\bar{q}}^{(0)}$

$$\Rightarrow \underline{\bar{r}_i(t) = \bar{r}_i(\bar{q}(t), t)} \Rightarrow \bar{a}_i = \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} \Rightarrow \bar{\Phi}_i = m \bar{a}_i - \bar{F}_i //$$

ES.

PENDOLO SFERICO

(pto materiale vincolato a una sfera ^(R) soggetto alla forza di gravità)



$$x = R \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = R \sin\theta \sin\varphi \quad \leftarrow \bar{r}(\varphi, \theta)$$

$$z = R \cos\theta$$

$$\downarrow \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}$$

En. cinetica

$$\dot{x} = -R \sin\varphi \sin\theta \dot{\varphi} + R \cos\varphi \cos\theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = R \cos\varphi \sin\theta \dot{\varphi} + R \sin\varphi \cos\theta \dot{\theta} \quad \leftarrow \bar{v}(\dot{\varphi}, \dot{\theta})$$

$$\dot{z} = -R \sin\theta \dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\underbrace{(R^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta \dot{\varphi}^2)}_{\text{orange}} + \underbrace{R^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta \dot{\theta}^2}_{\text{orange}} - 2 \cancel{R^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos\theta \sin\theta \dot{\varphi} \dot{\theta}}^{\cos\theta} \right. \\ \left. + \underbrace{(R^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta \dot{\varphi}^2)}_{\text{orange}} + \underbrace{R^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta \dot{\theta}^2}_{\text{orange}} + 2 \cancel{R^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos\theta \sin\theta \dot{\varphi} \dot{\theta}} \right. \\ \left. + R^2 \sin^2\theta \dot{\theta}^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(R^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 + \underbrace{R^2 \cos^2\theta \dot{\theta}^2}_{\text{orange}} + \underbrace{R^2 \sin^2\theta \dot{\theta}^2}_{\text{orange}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(R^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \right) \quad \leftarrow a = \begin{pmatrix} mR^2 \sin^2\theta & 0 \\ 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

$$V = mgz = mgr \cos\theta$$

$$L = \frac{mR^2}{2} (\sin^2\theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - mgr \cos\theta$$

$$\leftarrow L(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$$

$n=2$ gradi di lib.
(ci aspettiamo 2 eq. d. lag.)

Eq. di Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2 \sin \theta \overset{\theta(t)}{\cos \theta} \dot{\varphi} + mR^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mgR \sin \theta$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 2mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi} + mR^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - mgR \sin \theta$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} = \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \sin \theta$$