Esercizio

Matrici diagonalizzabili e non diagonalizzabili

Consideriamo le seguenti 2 matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hanno gli stessi autovalori, con la medesima molteplicità:

$\lambda_1 = -1$ autovalore semplice

$\lambda_{2,3} = 0$ autovalore doppio

Verifica — **Matrice A_1**

$$\det[\lambda I - A_1] = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & (\lambda+1) & -2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

sviluppo il determinante lungo questa riga

$$p_{A_1}(\lambda) = (-1)^{3+3} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & (\lambda+1) \end{vmatrix} + \dots \Rightarrow$$

$$p_{A_1}(\lambda) = (-1)^{3+3} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & (\lambda+1) \end{vmatrix} + \cancel{(-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} + \cancel{(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ (\lambda+1) & -2 \end{vmatrix}}$$

$$= \lambda \left[\lambda(\lambda+1) - 1 \cdot 0 \right]$$

$$= \lambda^2 (\lambda+1)$$

$$\boxed{p_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 \underbrace{(\lambda+1)}}$$

autovalore doppio $\lambda = 0$

autovalore semplice $\lambda = -1$

Matrice A_2: polinomio caratteristico

$$p_{A_2}(\lambda) = \det(\lambda I - A_2) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1) & -2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

anche stavolta conviene sviluppare lungo la 3^a riga

$$P_{A_2}(\lambda) = (-1)^{3+3} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & (\lambda+1) \end{vmatrix} + \cancel{(-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}\ \cancel{0} + \cancel{(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ (\lambda+1) & -2 \end{vmatrix}}\ \cancel{0}$$

$$= \lambda \cdot \left[\lambda(\lambda+1) - 0\right] + 0 + 0$$

$$\boxed{P_{A_2}(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)}$$

autovalore doppio $\lambda = 0$

autovalore singolo $\lambda = -1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_{A_1}(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_{A_2}(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$$

NB A_1 è diagonalizzabile

A_2 NON è diagonalizzabile

$\boxed{\text{Matrice } A_1}$

Matrice diagonalizzabile $\Rightarrow$ DEVE esistere T :

T invertibile , $T^{-1}AT = D = \text{diag}(\text{autovalori})$

Per A_1 allora :

$$T_1 : \quad T_1^{-1} A_1 T_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1 \end{matrix}$$

$$T_1 = \left[v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, v_3 \right]$$

dove

$v_1 : \quad A_1 v_1 = \lambda_1 v_1$

$v_2 : \quad A_1 v_2 = \lambda_2 v_2$

$v_3 : \quad A_1 v_3 = \lambda_3 v_3$

Cerco gli autovettori

v_1 : $A_1 v_1 = \lambda_1 v_1 \longleftrightarrow \boxed{(A_1 - \lambda_1 I) v_1 = 0}$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 v_1 = 0}$ con $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

1 sola relazione

2 parametri liberi!

"∞^2" soluzioni

La base del sottospazio delle soluzioni ha dimensione 2!

$$v_1^{(1)} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = a + 2c = 1 \\ c = 0 \end{cases} \qquad v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sono vettori linearmente INDIPENDENTI

$$v_1^{(11)} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = a + 2c = 0 \\ c = +1 \end{cases} \qquad v_1^{(11)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

molteplicità geometrica

NB tutte le volte in cui la base del sottospazio degli autovettori associati ad un autovalore multiplo ha dimensione pari alla molteplicità dell'autovalore

nel polinomio caratteristica

a quell'autovalore è associato un blocco "diagonale" nella forma di Jordan della matrice

molteplicità algebrica

v_3: $A_1 v_3 = \lambda_3 v_3$ $\quad \lambda_3 = -1$

$$(A_1 - \lambda_3 I) v_3 = 0$$

suppongo ancora $v_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$(A_1 + I)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

2 relazioni e 3 incognite $\rightarrow$ un parametro libero

La base del sottospazio di v_3 ha dimensione 1

$$\boxed{v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

La matrice di trasformazione è:

$$T_1 = \left[v_1^{(I)} \,\middle|\, v_1^{(II)} \,\middle|\, v_3 \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det T_1 = -1$

Verifica:

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T_1^{-1} A_1 T_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{J}$$

$$T_1 A_1 T_1^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{\text{Matrice } A_2}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_{A_2}(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$$

Ripeto: calcoli fatti per la matrice A_1 e cerco gli autovettori associati agli autovalori di A_2

Per A_2 allora:

$$T_2 : \quad T_2^{-1} A_2 T_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$T = \left[\, v_1 \;\middle|\; v_2 \;\middle|\; v_3 \,\right]$$ dove

$$\begin{aligned} v_1 &: \quad A_2 v_1 = \lambda_1 v_1 \\ v_2 &: \quad A_2 v_2 = \lambda_2 v_2 \\ v_3 &: \quad A_2 v_3 = \lambda_3 v_3 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 0$

$$A_2 v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$A_2 v_1 = 0$$

Come prima sia $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ -b + 2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

∞^1 soluzioni

La base del sottospazio degli autovettori associati a $\lambda_1 = 0$ ha dimensione 1!

NB $\lambda_1 = 0$ è autovalore doppio $\rightarrow$ molteplicità algebrica 2

$$\langle v_1 \rangle = \langle \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \rangle$$ molteplicità geometrica 1

sono diverse!

Non riesco a trovare la matrice T!

$$T = \left[v_1 \; \vdots \; v_2 \; \vdots \; v_3 \right]$$

autovettori associati a $\lambda = 0$

associato a $\lambda_3 = -1$

$\Rightarrow$ per v_3 foglia $\Rightarrow$ successivo

NB ne ho solo 1!

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\exists}\; T_2$$

A_2 non diagonalizzabile!

In effetti la forma di Jordan di A_2 è

$$J_{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -1$

$$A_2 v_3 = \lambda_3 v_3$$

$$(A_2 - \lambda_3 I) v_3 = 0$$

$$(A_2 + I) v_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \text{ qualsiasi} \\ b=-a \\ c=0 \end{cases}$$

"∞^1" soluzioni

la base del sottospazio di v_3 ha dimensione 1

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Della matrice T_2 che dovrebbe portare A_2 in forma diagonale ho trovato 2 colonne, MA non la 3ª $\Longrightarrow \nexists\, T_2$

$$T_2 = \left[v_1 \;\vdots\; ? \;\vdots\; v_3 \right]$$

Matrici equivalenti e matrici simili

matrici simili: 2 matrici quadrate (A, B) del medesimo ordine n si dicono simili quando esiste una matrice invertibile T tale che

$$A = T^{-1} B T$$

proprietà delle matrici simili ⟷ 2 matrici simili hanno gli stessi autovalori (con la medesima molteplicità)

Inoltre hanno stesso rango, determinante e traccia matrici equivalenti (eq. SD) ("sinistra destra") :

data una matrice A $m \times n$ tutte le matrici definite dalla relazione

$$B = PAQ$$

con P, Q matrici quadrate invertibili, si dicono matrici equivalenti ad A

proprietà delle matrici equivalenti $\longleftrightarrow$ tutte le matrici equivalenti ad una matrice A hanno il medesimo rango

Con un n° finito di operazioni elementari su righe e colonne posso trasformare una matrice A in una equivalente

2 matrici equivalenti

NON

sono matrici simili

$\boxed{\text{Esempio}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1ª riga x −2 e sommo alla 2ª

1ª riga x −1 e sommo alla 3ª

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

3ª riga ← 2ª + 3ª riga

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

ha rango 2! Anche la matrice di partenza allora ha rango 2!

autovalori $\boxed{\begin{aligned} &\lambda_1 = 1 \text{ doppio} \\ &\lambda_2 = 0 \end{aligned}}$

NB autovalori della matrice di partenza:

$$\boxed{\lambda_1 = 0 \qquad \begin{aligned} \lambda_2 &= 2+j \\ \lambda_3 &= 2-j \end{aligned}}$$

!!

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(A) = 2 > 0 \longrightarrow$$ sistema instabile!

Criterio di Routh-Hurwitz – casi particolari

$$s^6+2s^5+5s^4+12s^3+7s^2+4s+3=0$$

p	6	+1	+5	+7	+3
	5	+2	+12	+4	
v	4	−1	+5	+3	
v	3	+22	+10		
p	2	+60/11	+3		
v	1	−21/10			
v	0	+3			

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}+1 & +5\\ +2 & +12\end{vmatrix}$$

4 variazioni di segno

$\Downarrow$

4 radici a parte reale > 0 !

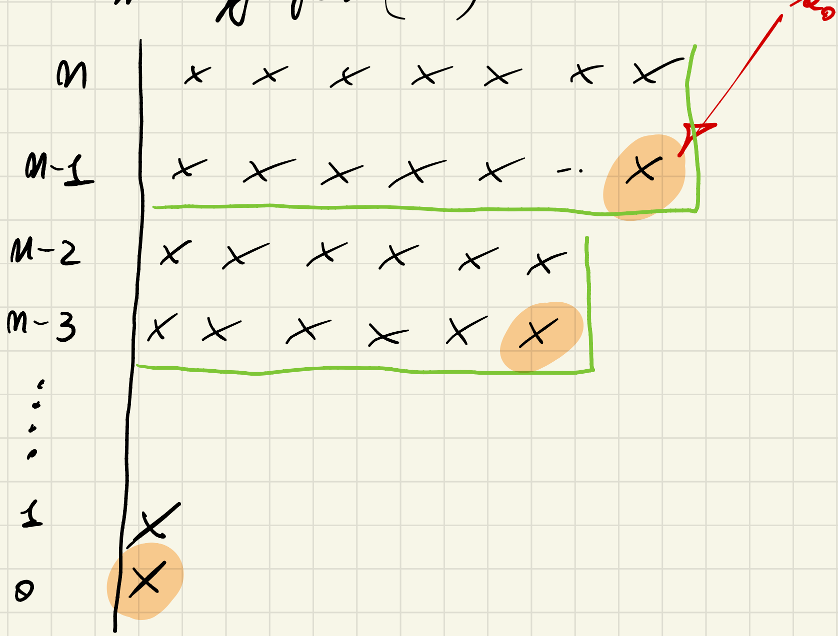
Generalizziamo

$$P(s)=\underbrace{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0}_{n+1\ \text{coeff.}}$$

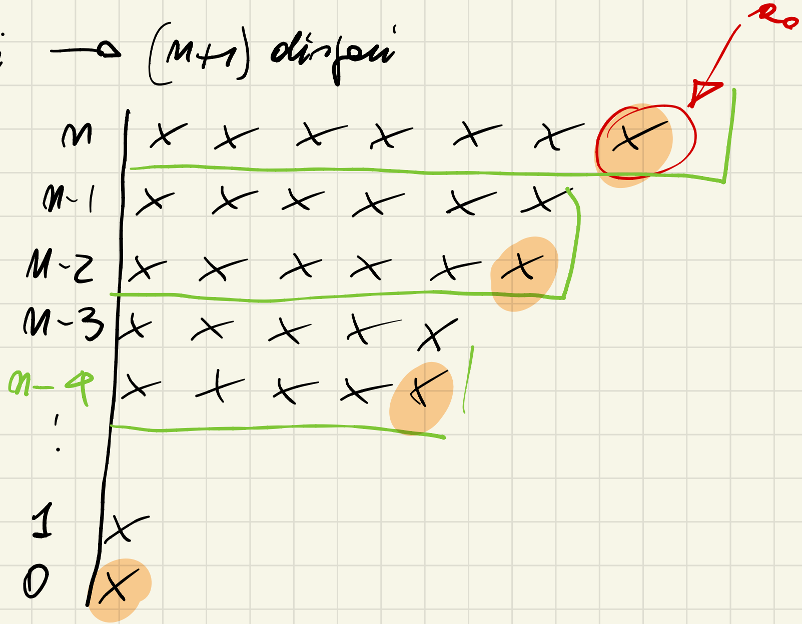
n dispari $\rightarrow$ (n+1) pari

n pari $\rightarrow$ (n+1) dispari

n dispari $\to$ # coeff pari $(n+1)$



n pari $\to$ $(n+1)$ dispari



Proprietà della tabella di Routh-Hurwitz

n° reale positivo

- tutti gli elementi di una riga della tabella di R-H possono esser moltiplicati per uno stesso numero positivo senza che il n° di variazioni e/o permanenze di segno tra gli elementi della 1ª colonna dello schema di R-H cambi

- posso evitare di dividere nel calcolo di ciascun coefficiente della tabella, ma devo tener conto del segno del divisore

$$p(s) = 4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1$$

4	+4	+5	+1
3	+3	+2	
2	+7	+3	
1	+5		
0	+15		

(+3) → /

?

$$-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} +4 & +5 \\ +3 & +2 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} +4 & +1 \\ +3 & 0 \end{vmatrix}$$

?

?

Non ci sono variazioni di segno → tutte le radici hanno Re( )<0

$$P(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$

p	4	$+2$	$+3$	$+10$
v	3	$+1$	$+5$	
v	2	-7	$+10$	
p	1	$+45$		
	0	$+10$		

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{(-7)}\begin{vmatrix} +1 & +5 \\ -7 & 10 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{45}\begin{vmatrix} -7 & +10 \\ +45 & 0 \end{vmatrix}$$

2 variazioni di segno

↓

2 radici a parte reale >0

$$p(s) = s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 7s^2 + 4s + 3$$

p	6	$+1$	$+5$	$+7$	$+3$
v	5	$+2$	$+12$	$+4$	
v	4	-2	$+10$	$+6$	
p	3	$+44$	$+20$		
v	2	$+480$	$+264$		
v	1	-2016			
	0	532224			

Non divido
ma propago
il segno

4 v 2 p

4 radici con $Re>0$

Casi critici

(a) elemento nullo in 1ª colonna

(b) tutta una riga nulla

caso (a)

sostituire il valore nullo in 1ª colonna con un elemento simbolico ε [$\in \mathbb{R}$ piccolo a piacere] DOTATO DI SEGNO.
Si prosegue con il calcolo degli elementi successivi e si tiene conto del segno espresso ed ε

Esempio $\longrightarrow$ $p(s) = s^3 + 3s - 2$

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & +1 & +3 \\
2 & 0 & -2 \\
1 & & \\
0 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc|cc}
P & 3 & +1 & +3 \\
P & 2 & +\varepsilon & -2 \\
V & 1 & 3\varepsilon+2 & \\
 & 0 & -2 &
\end{array}
$$

$$
-\frac{1}{(+\varepsilon)}\begin{vmatrix} +1 & +3 \\ +\varepsilon & -2 \end{vmatrix}
\qquad\qquad
-\frac{1}{(3\varepsilon+2)}\begin{vmatrix} +\varepsilon & -2 \\ 3\varepsilon+2 & 0 \end{vmatrix}
$$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow 3\varepsilon+2 > 0$

1 V 1 radice $\mathrm{Re} > 0$

2 P 2 radici $\mathrm{Re} < 0$

3	1	3
2	0	-2
1		
0		

v	3	+1	+3
p	2	$-\varepsilon$	-2
p	1	$3\varepsilon-2$	
	0	-2	

$-\varepsilon<0$

$3\varepsilon-2$?

$$-\frac{1}{(-\varepsilon)}\begin{vmatrix} +1 & +3 \\ -\varepsilon & -2 \end{vmatrix}$$

1 v

2 p

1 radice $\Re e>0$

2 radici $\Re e<0$

$$p(s)=3s^2+2s$$
$$= s(3s+2)$$

2	3	0
1	+2	
0	0	

caso (b) riga tutta nulla ← può verificarsi SOLTANTO in una riga di indice dispari!

n	x	x	x	x	
n-1	x	x	x		
⋮	.	-	-	-	-
2m	a	b	c	- - - -	
2m-1	0	0	0	0 - -	0

$a\neq 0$

$$P(s) \longrightarrow P_{aux}(s) = a s^{2m} + b s^{2m-2} + c s^{2m-4} + \dots$$

monomi con potenze pari da $2m \longrightarrow 0$

Si può dimostrare che $P_{aux}(s)$ è un fattore di $P(s)$

$$\underbrace{P(s)}_{\text{grado } n} = \underbrace{P_{aux}(s)}_{\text{grado } 2m} \cdot \underbrace{q(s)}_{\text{grado } (n-2m)}$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$

radici $P(s) = \bigcup \begin{cases} \text{radici } P_{aux}(s) \\ \text{radici } q(s) \end{cases}$

$P_{aux}(s) \longleftarrow$ fattorizzato

$\downarrow$

le radici di $P_{aux}(s)$ sono SEMPRE simmetriche rispetto a $\emptyset$

$q(s) \longrightarrow$ fattorizzato

$q(s) \longrightarrow$ R.H.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$P_1(s) = \frac{d\,P_{aux}(s)}{ds} = 2m \cdot a\, s^{2m-1} + \dots$$

$P_1(s)$ ha SOLO potenze dispari

$\downarrow$

inserisco i coeff. di $P_1(s)$ nella riga $(2m-1)$ al posto degli elementi $\varnothing$ e continuo con R.H.

Vantaggio: non ho determinato il polinomio $q(s)$

NB è comunque necessario fattorizzare $P_{aux}(s)$!

$$P(s) = s^6 + 3s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 12s^2 + 12s + 8$$

$$\begin{array}{c|cccc}
6 & +1 & +6 & +12 & +8 \\
5 & +3 & +12 & +12 & \\
4 & 2 & 8 & 8 & \\
3 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
\longrightarrow P_{aux}(s) = 2s^4 + 8s^2 + 8$$

$$P(s) = 2\left[s^4 + 4s^2 + 4\right] \cdot q(s)$$

$$P_{aux} \longrightarrow \quad s^4 + 4s^2 + 4 = (s^2+2)^2 = 0$$

$$s_{12\,34} = \pm j\sqrt{2}$$ a parte reale nulle

$$q(s) = (s+1)(s+2)$$

	6	1	6	12	8
P	5	3	12	4	
P	4	2	8	8	
P	3	+8	+16		
P	2	2	4		
P	1	~~0~~ 4			
P	0	+4			

$$\boxed{P_{aux}(s) = 2s^4 + 8s^2 + 8}$$

$$P_1(s) = 8s^3 + 16s$$

$$\tilde{P}_{aux}(s) = 2s^2 + 4$$

$$\tilde{P}_1(s) = 4s$$

Tutte permanenze $\rightarrow$ $\nexists$ radici $Re > 0$