



# *Sismometria e Monitoraggio Sismico*

*Giovanni Costa*

*2020/21*

## **SISMOMETRIA – Cronologia storica**

**132- Sismoscopio di CHANG HENG**

**1703 – Sismoscopio di la Hante Feuille (bacinella con mercurio)**

**1747 – Sismoscopio di Nicola Cirillo (primo strumento su base meccanica)**

**1850 -Inizio ERA STRUMENTALE propriamente detta. Robert Mallet propone una rete di osservazione estesa a tutto il pianeta**

**1856 – Sismoscopio di Palmieri (“Sismografo elettromagnetico, in realtà una serie di sismometri assemblati assieme per la misura di direzione, intensità, durata dei terremoti; misura sia movimenti orrizzontali che verticali).**

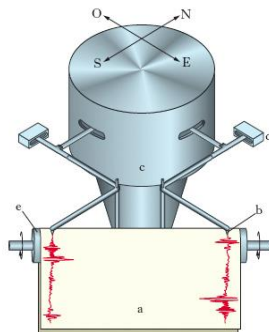
**1875 - Cecchi, primo sismografo propriamente detto. Due pendoli per le componenti orizzontali; una massa appesa a una molla a spirale per la verticale. Dotato di un dispositivo per il rilevamento di moti rotatori.**

## **SISMOMETRIA – Cronologia storica**

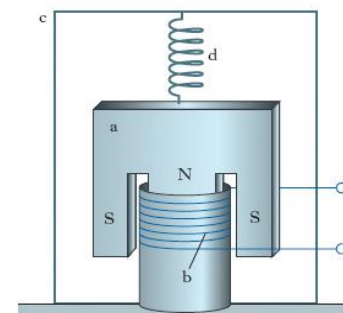
- 1889 – Potsdam I pendoli orizzontali di Pashwitz registrano il primo telesisma.**
- 1892 – John Milne (Ewing, Gray, Omori) realizza il primo sismografo ad alta definizione.**
- 1900-1910 – E. Wiechert: sismografo meccanico a carta affumicata: circa 20 ingrandimenti masse pendolari fino a 17.000 kg (Gottingen e Tacubaya.**  
**B.B. Galitzin: sismografo meccanico fotografico.**
- Il sismografo Wiechert si basa su modelli costruiti da scienziati italiani: De Rossi, Agamennone, Vicentini, tutti meccanici con carta affumicata e ingrandimenti superiori a 150.**
- 1935 - H. Benioff realizza il sismografo a “deformazione lineare” indipendente dal principio del pendolo.**
- 1925 – Sismoscopio a torsione Wood-Anderson per la misura della magnitude.**
- 1970-80 - Sensori a banda larga di concezione moderna.**

# TRASDUTTORI

**MECCANICI**



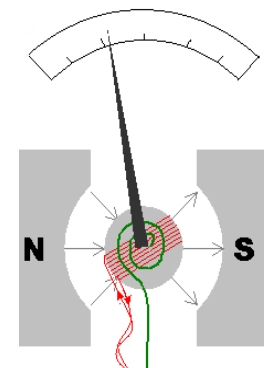
**GEOFONI**



**ELETTROMAGNETICI**

**A GALVANOMETRO**

**ELETTRONICI A BANDA LARGA**



**SISMOMETRO: uscita proporzionale allo spostamento**

**VELOCIMETRO: uscita proporzionale alle velocità**

**ACCELEROMETRO: uscita proporzionale all'accelerazione**

## **PROBLEMA FONDAMENTALE SISMOMETRIA**

**Passare dalle 6 equazioni che rappresentano il moto relative del sismografo rispetto al suolo (3 per le component traslazionali e 3 per quelle rotazionali) alle corrispondenti funzioni che descrivono il moto del terreno in modo da poter determinare le caratteristiche (parametri) del moto sismico:**

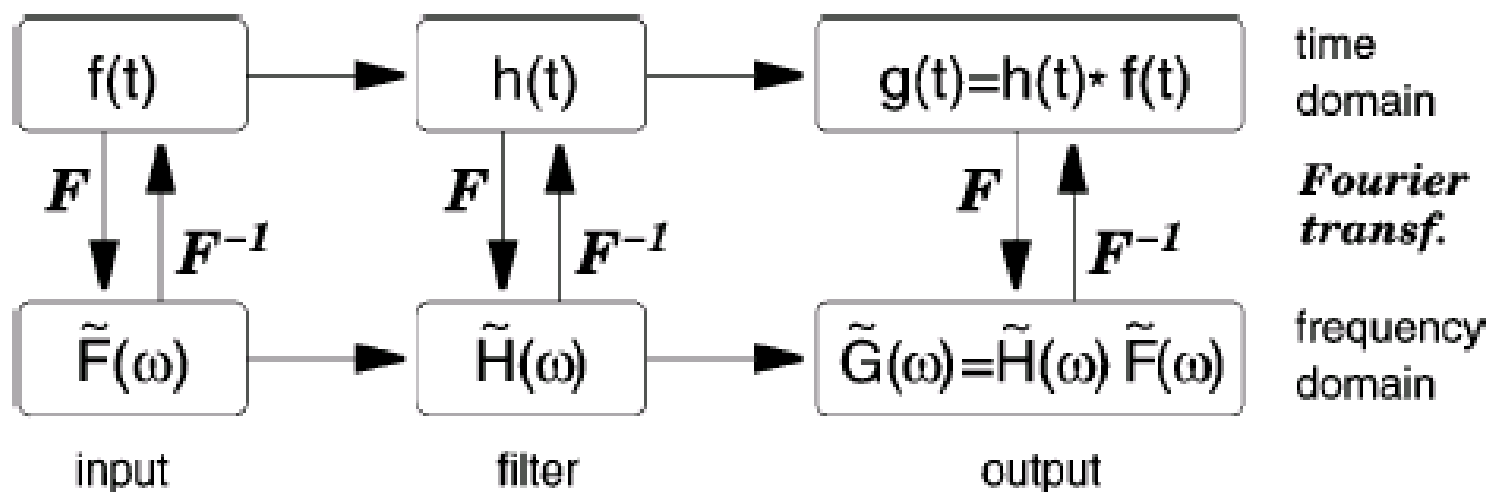
### **PERIODO, AMPIEZZA, FASE, SMORZAMENTO**

**Per ogni Sistema di onde.**

Il comportamento dinamico di un sismografo all'interno del suo comportamento lineare, come quello di qualsiasi sistema lineare invariante nel tempo (LTI), può essere descritto con lo stesso grado di completezza in quattro modi diversi:

- con un'equazione differenziale lineare;
- con la funzione di trasferimento di Laplace;
- con la risposta in frequenza complessa;
- con la risposta del sistema all'impulso;

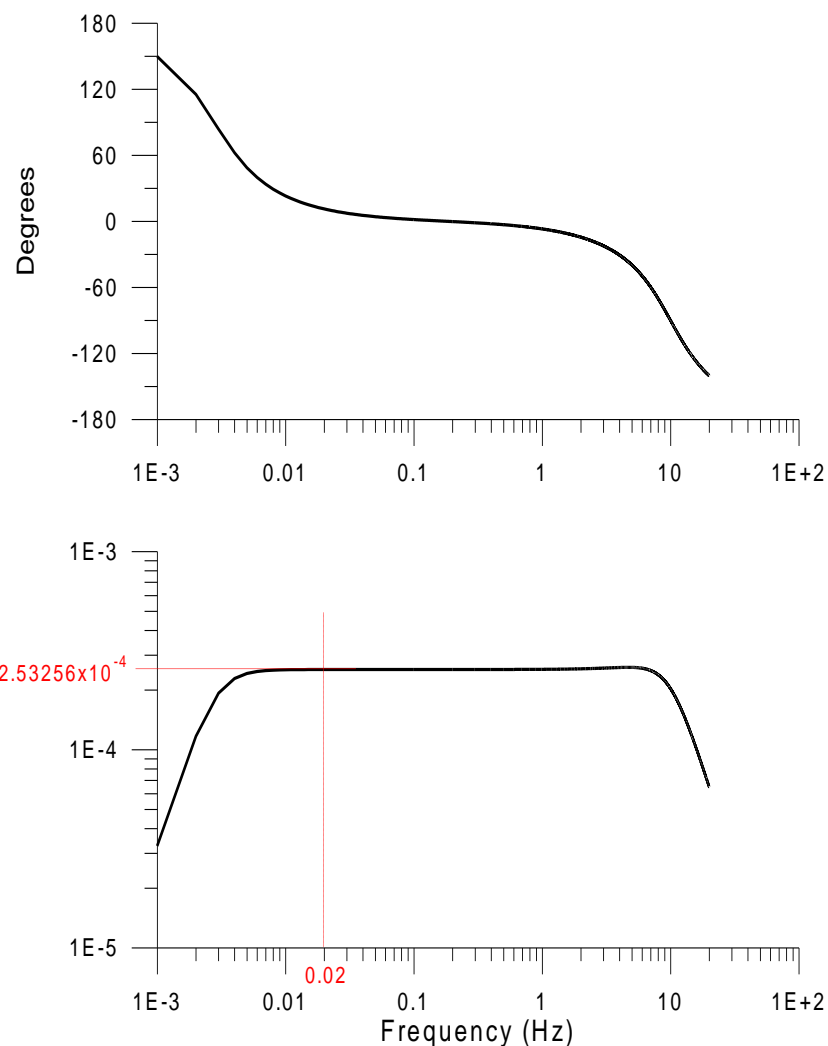
I primi due sono generalmente ottenuti da un'analisi matematica del sistema fisico (il hardware). Gli ultimi due sono direttamente correlati ad alcune procedure di calibrazione e possono quindi essere determinati da esperimenti di calibrazione in cui viene considerato il sistema come una "scatola nera". Tuttavia, da quando tutti e quattro sono matematicamente equivalenti, possiamo derivarne ciascuno da una conoscenza dei componenti fisici del sistema o da un esperimento di calibrazione. Le relazioni reciproche tra le rappresentazioni "dominio del tempo" e "dominio della frequenza". In pratica, la descrizione matematica di un sismometro è limitata a un certa larghezza di banda delle frequenze che dovrebbe includere almeno la larghezza di banda dei segnali sismici. Entro questo limite quindi una qualsiasi delle quattro rappresentazioni descrive completamente e senza ambiguità la risposta del sistema a segnali di input arbitrari.



Percorsi di elaborazione del segnale nei domini di tempo e frequenza. L'asterisco tra  $f(t)$  e  $g(t)$  indica una convoluzione.



La descrizione più comunemente usata di una risposta strumentale è la "curva di risposta in ampiezza", cioè l'amplificazione dipendente dalla frequenza del movimento al suolo. Matematicamente questo è il modulo (valore assoluto) della risposta in frequenza complessa, di solito chiamata risposta in ampiezza. Specifica la reattività armonica dello stato stazionario (amplificazione, ingrandimento, fattore di conversione) del sismografo in funzione della frequenza. Tuttavia, per la corretta interpretazione dei sismogrammi, anche la risposta di fase del sistema di registrazione deve essere noto. In linea di principio può essere calcolato dalla risposta in ampiezza, ma viene normalmente specificato separatamente o derivato insieme alla risposta in ampiezza dalla descrizione matematica del sistema dalla sua funzione di trasferimento complessa o dalla sua risposta in frequenza complessa.



## Notazione complessa

Una proprietà matematica fondamentale dei sistemi invarianti nel tempo, come i sismografi, è di non cambiare la forma d'onda delle onde sinusoidali e delle onde sinusoidali che decadono o crescono esponenzialmente

Un segnale di ingresso del tipo:

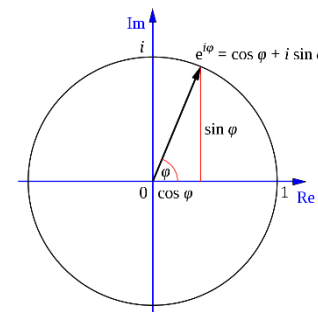
$$f(t) = e^{\sigma t} (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t)$$

Produrrà un segnale in uscita del tipo:

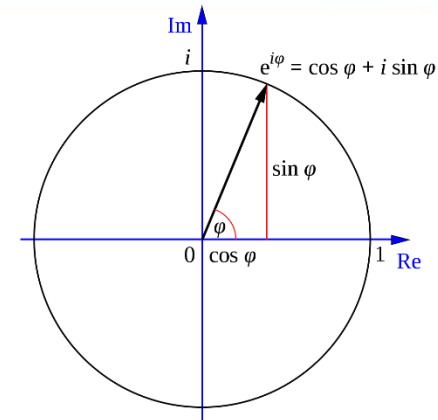
$$g(t) = e^{\sigma t} (a_2 \cdot \cos \omega t + b_2 \cdot \sin \omega t)$$

Con gli stessi  $\sigma$  e  $\omega$  ma con possibili diversi  $a$  e  $b$ .  $\omega$  è la frequenza angolare che è  $2\pi$  volte la frequenza  $f$ . Usando l'identità di Eulero:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$



$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$



ed utilizzando l'algebra complessa possiamo scrivere:

$$f(t) = \Re[c_1 \cdot e^{(\sigma+j\omega)t}] \text{ and } g(t) = \Re[c_2 \cdot e^{(\sigma+j\omega)t}]$$

dove  $\Re[\cdot]$  rappresenta la parte reale del segnale e

$$c_1 = a_1 - jb_1, \quad c_2 = a_2 - jb_2.$$

Si può vedere che la sola differenza tra il segnale di ingresso e quello di uscita è l'ampiezza complessa  $c$ , non nella forma d'onda

$$\hat{c}_2 / c_1$$

è il guadagno complesso del sistema

ed utilizzando l'algebra complessa possiamo scrivere:

$$f(t) = \Re[c_1 \cdot e^{(\sigma+j\omega)t}] \quad \text{and} \quad g(t) = \Re[c_2 \cdot e^{(\sigma+j\omega)t}]$$

dove  $\Re[.]$  rappresenta la parte reale del segnale e

$$c_1 = a_1 - jb_1, \quad c_2 = a_2 - jb_2.$$

Si può vedere che la sola differenza tra il segnale di ingresso e quello di uscita è l'ampiezza complessa  $c$ , non nella forma d'onda

$$c_2 / c_1$$

è il guadagno complesso del sistema

Nel caso il segnale reale non sia considerato come la parte reale di un segnale complesso ma la somma di 2 segnali complessi coniugati con frequenze positive e negative:

$$f(t) = c_1 \cdot e^{(\sigma+j\omega)t} + c_1^* \cdot e^{(\sigma-j\omega)t}$$

## La trasformata di Laplace

Un segnale che ha un inizio nel tempo definito puo' essere decomposto in segnali sinusoidali stazionario che decadono o crescono esponenzialmente nel tempo attraverso la trasformata di Laplace:

inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds ,$$

diretta

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$s = j\omega .$$

$\sigma$  definisce il path di integrazione

$\sigma < 0$  decadono,  $\sigma = 0$  stazionari,  $\sigma > 0$  crescono

$e^{st}$  con  $s$  complesso rappresenta una sinusoide decrescente o crescente e con  $s$  immaginaria una pura sinusoide.

Questa trasformata integrale ha numerose proprietà che la rendono utile per l'analisi dei sistemi dinamici lineari.

Il vantaggio più significativo è che l'integrale e la derivata di una funzione diventano rispettivamente una divisione e una moltiplicazione per la variabile complessa, analogamente al modo in cui i logaritmi cambiano la moltiplicazione di numeri nella loro addizione.

Essa trasforma le equazioni integrali e le equazioni differenziali in equazioni polinomiali, che sono più immediate da risolvere.

Anche la risposta (l'uscita) di un sistema dinamico lineare può essere calcolata come prodotto di convoluzione della sua risposta impulsiva unitaria con il segnale d'ingresso. Sviluppando questo calcolo nello spazio di Laplace la convoluzione diventa una moltiplicazione, che spesso rende il problema più semplice.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

La derivata prima nel tempo di  $\dot{f}(t)$  ha come trasformata di Laplace  $s \cdot F(s)$ , la derivata seconda  $\ddot{f}(t)$  ha  $s^2 \cdot F(s)$ , ecc.



Supponimo che un sistema analogico di acquisizione dati sia rappresentato dall'equazione differenziale lineare:

$$c_2 \ddot{f}(t) + c_1 \dot{f}(t) + c_0 f(t) = d_2 \ddot{g}(t) + d_1 \dot{g}(t) + d_0 g(t)$$

dove  $f(t)$  è il segnale di ingresso,  $g(t)$  è il segnale di uscita e  $c_i$  e  $d_i$  sono costanti.

$$c_2 \ddot{f}(t) + c_1 \dot{f}(t) + c_0 f(t) = d_2 \ddot{g}(t) + d_1 \dot{g}(t) + d_0 g(t)$$

Possiamo quindi assegnare ciascun termine dell'equazione a una trasformazione di Laplace e ottenere

$$c_2 s^2 F(s) + c_1 s F(s) + c_0 F(s) = d_2 s^2 G(s) + d_1 s G(s) + d_0 G(s)$$

Dalla quale otteniamo:

$$G(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_2 s^2 + d_1 s + d_0} F(s)$$

Abbiamo quindi espresso la trasformata di Laplace del segnale di uscita dalla trasformata di Laplace del segnale di ingresso, moltiplicato per una nota funzione razionale di  $s$ . Da questo otteniamo il segnale di uscita da una trasformazione inversa di Laplace.

## La funzione razionale

$$H(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_2 s^2 + d_1 s + d_0}$$

È la funzione di trasferimento del sistema descritto dall'equazione differenziale. Essa contiene le stesse informazioni sul sistema dell'equazione differenziale stessa.

$$c_2 \ddot{f}(t) + c_1 \dot{f}(t) + c_0 f(t) = d_2 \ddot{g}(t) + d_1 \dot{g}(t) + d_0 g(t)$$

In generale, la funzione di trasferimento  $H(s)$  di un sistema LTI è la funzione complessa per la quale

$$G(s) = H(s) \cdot F(s)$$

con  $F(s)$  e  $G(s)$  che rappresentano le trasformazioni di Laplace dei segnali di ingresso e uscita.

## La trasformata di Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Sebbene i concetti matematici dietro le trasformazioni di Fourier e di Laplace siano diversi, possiamo considerare la trasformazione di Fourier come una versione speciale della trasformazione di Laplace per frequenze reali, vale a dire per  $s = j\omega$ .

La trasformata di Fourier scompone il segnale in onde puramente armoniche (sinusoidali)  $e^{j\omega t}$ . La trasformata diretta e inversa di Fourier sono anche conosciute come analisi armonica.

Sebbene i concetti matematici dietro le trasformate di Fourier e Laplace siano diversi, possiamo considerare la trasformata di Fourier come una versione speciale della trasformata di Laplace per frequenze reali, ovvero per  $s=j\omega$ . In effetti, vediamo che  $\tilde{F}(\omega) = F(j\omega)$ , ovvero la trasformata di Fourier per frequenze angolari reali  $\omega$  è identica alla trasformata di Laplace per  $s=j\omega$  immaginario. Ai fini pratici le due trasformate sono, quindi, quasi equivalenti e molte delle relazioni tra i segnali temporali e le loro trasformate (come il teorema di convoluzione) sono simili o uguali per entrambi. La funzione  $\tilde{F}(\omega)$  è chiamata la risposta in frequenza complessa del sistema. Alcuni autori usano il nome "funzione di trasferimento" per  $\tilde{F}(\omega)$ ; tuttavia,  $\tilde{F}(\omega) = F(j\omega)$  non ha la stessa funzione di  $F(\omega)$ , quindi nomi diversi sono appropriati. La distinzione tra  $\tilde{F}(\omega) = F(s)$  è essenziale quando i sistemi sono caratterizzati dai loro poli e zeri. Questi sono equivalenti ma non identici nei piani complessi  $s$  e  $\omega$ , ed è importante sapere se si tratta di trasformata di Laplace o di Fourier. Di solito, per la trasformata di Laplace vengono dati poli e zeri. In caso di dubbio, si dovrebbe verificare la simmetria dei poli e degli zeri nel piano complesso: quelli della trasformata di Laplace sono simmetriche rispetto all'asse reale mentre quelli della trasformata di Fourier sono simmetrici rispetto all'asse immaginario.

Il valore assoluto  $|\tilde{F}(\omega)|$  è chiamata risposta in ampiezza e la fase di  $\tilde{F}(\omega)$  la fase.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$s = j\omega.$$

$$\tilde{F}(\omega) = F(j\omega).$$

La trasformata di Fourier per frequenze reali  $\omega$  è identica alla trasformata di Laplace per  $s = j\omega$  immaginario.

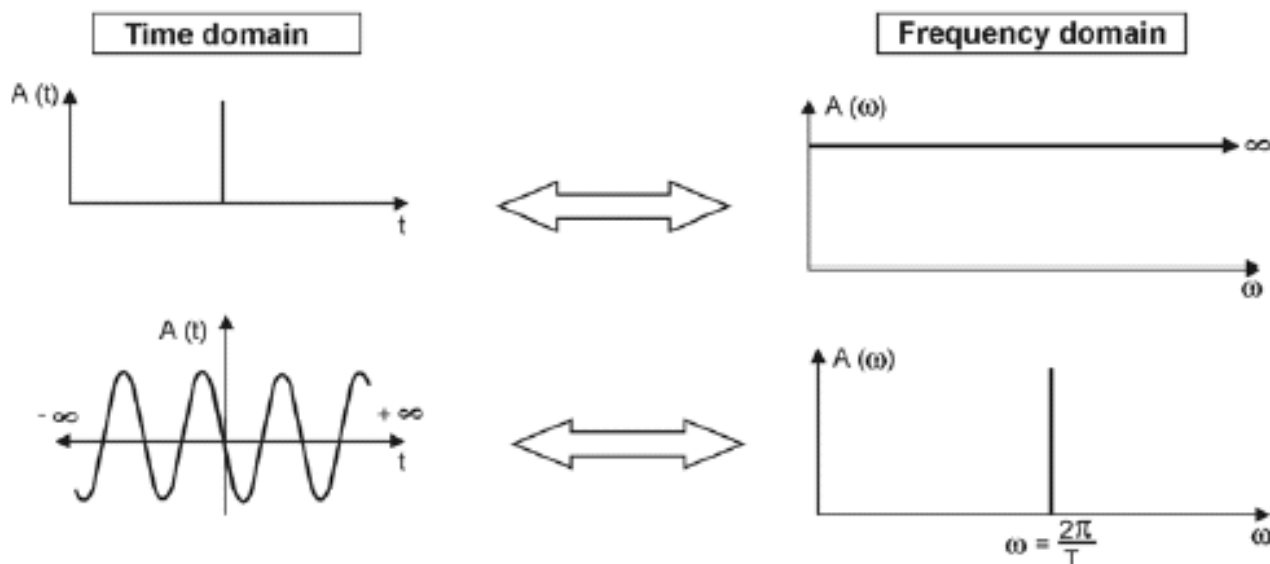
## La risposta impulsiva

La funzione  $\delta(t)$  (delta di Dirac) è una funzione positiva infinitamente corta, infinitamente alta centrata al tempo 0.

Sia la sua trasformata di Laplace che quella di Fourier hanno il valore costante 1. Il suo spettro di ampiezza contiene tutte le frequenze.

$$\Delta t \sim \frac{1}{\Delta \omega}$$

for  $\Delta t \rightarrow 0$        $\Delta \omega \rightarrow \infty$



## La risposta impulsiva

La funzione  $\delta(t)$  (delta di Dirac) è una funzione positiva infinitamente corta, infinitamente alta centrata al tempo 0.

Sia la sua trasformata di Laplace che quella di Fourier hanno il valore costante 1. Il suo spettro di ampiezza contiene tutte le frequenze.

Quindi la

$$G(s) = H(s) \cdot F(s)$$

diventa

$$G(s) = H(s),$$

Di conseguenza la  $H(s)$  è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva  $g(s)$



## Il teorema della convoluzione

Qualsiasi segnale può essere inteso come costituito da una sequenza di impulsi. Ciò è evidente nel caso di segnali campionati, ma può essere generalizzato a segnali continui rappresentando il segnale come una sequenza continua di impulsi di Dirac. Possiamo costruire la risposta di un sistema lineare a un segnale di ingresso arbitrario come somma di risposte all'impulso opportunamente ritardate e ridimensionate.

Questo processo è chiamato convoluzione:

$$g(t) = \int_0^{\infty} h(t') f(t - t') dt' = \int_0^{\infty} h(t - t') f(t') dt'$$

## Il teorema della convoluzione

$$g(t) = \int_0^{\infty} h(t') f(t - t') dt' = \int_0^{\infty} h(t - t') f(t') dt'$$

$$f(t) = \delta(t),$$

$$g(t) = \int h(t') \delta(t - t') dt' = h(t)$$

$h(t)$  è la risposta impulsiva al sistema

Se  $P(s)$  è un polinomio di  $s$  e  $P(\alpha) = 0$ , allora  $s = \alpha$  è chiamata una radice, od uno zero, del polinomio.

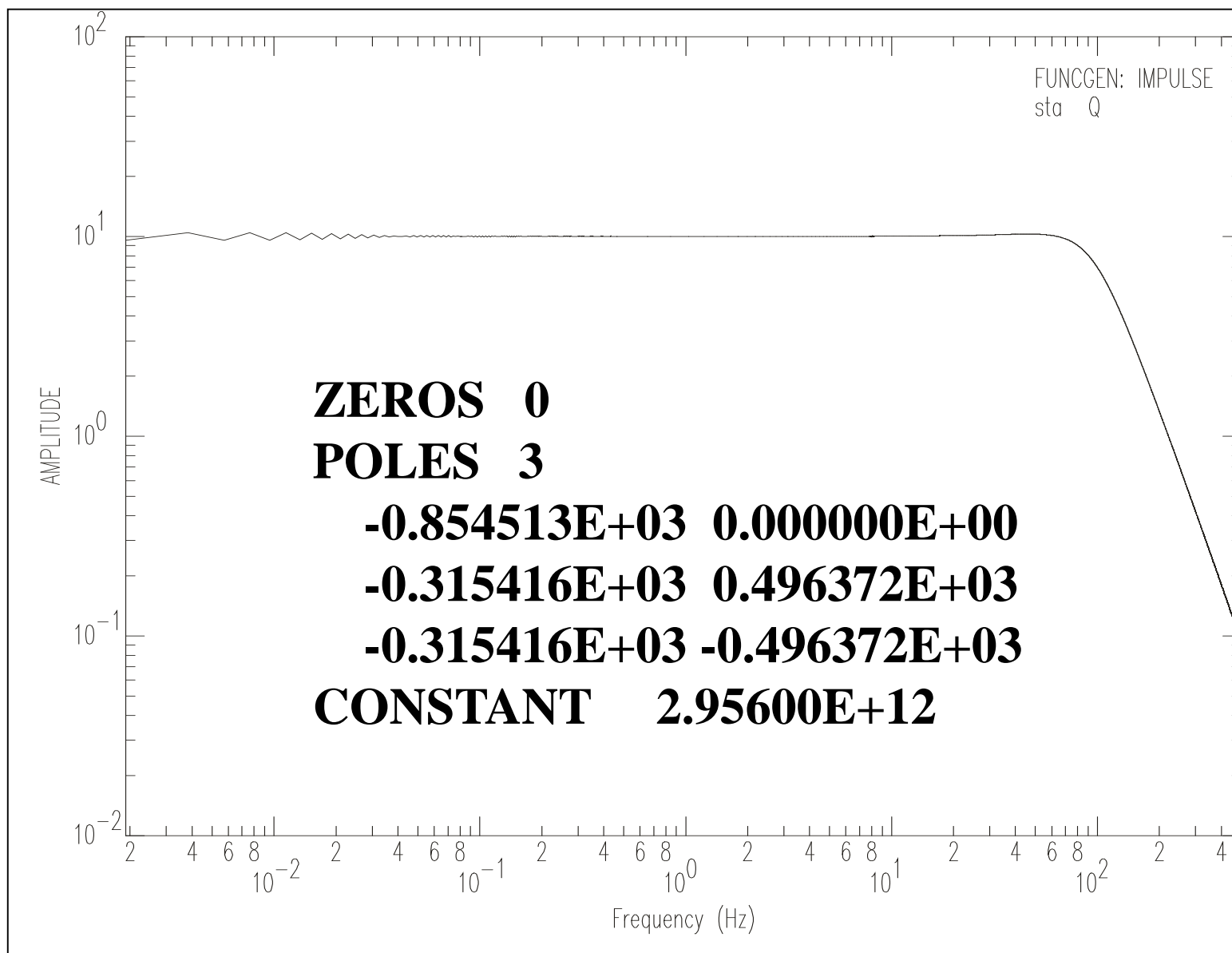
Un polinomio di grado  $n$  ha  $n$  zero complessi e può essere fattorizzato come:

$$P(s) = p \cdot \prod (s - s_i).$$

Gli zeri di un polinomio, con il fattore  $p$ , determinano completamente il polinomio. Poiché le nostre funzioni di trasferimento  $H(s)$  sono il rapporto di due polinomi, possono essere specificati dai loro zeri (gli zeri del numeratore  $G(s)$ ), loro poli (gli zeri del denominatore  $F(s)$ ) e un fattore di guadagno (o equivalentemente il guadagno totale a un data frequenza). L'intero sistema, purché rimanga nel suo campo operativo lineare e non produce rumore, può, quindi, essere descritto da un piccolo numero di parametri discreti.

$$H(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_2 s^2 + d_1 s + d_0}$$

$$H(s) = A \frac{\prod_{n=1}^N (s - z_n)}{\prod_{m=1}^M (s - p_n)}$$



**POLES: 4 (rad/sec )**

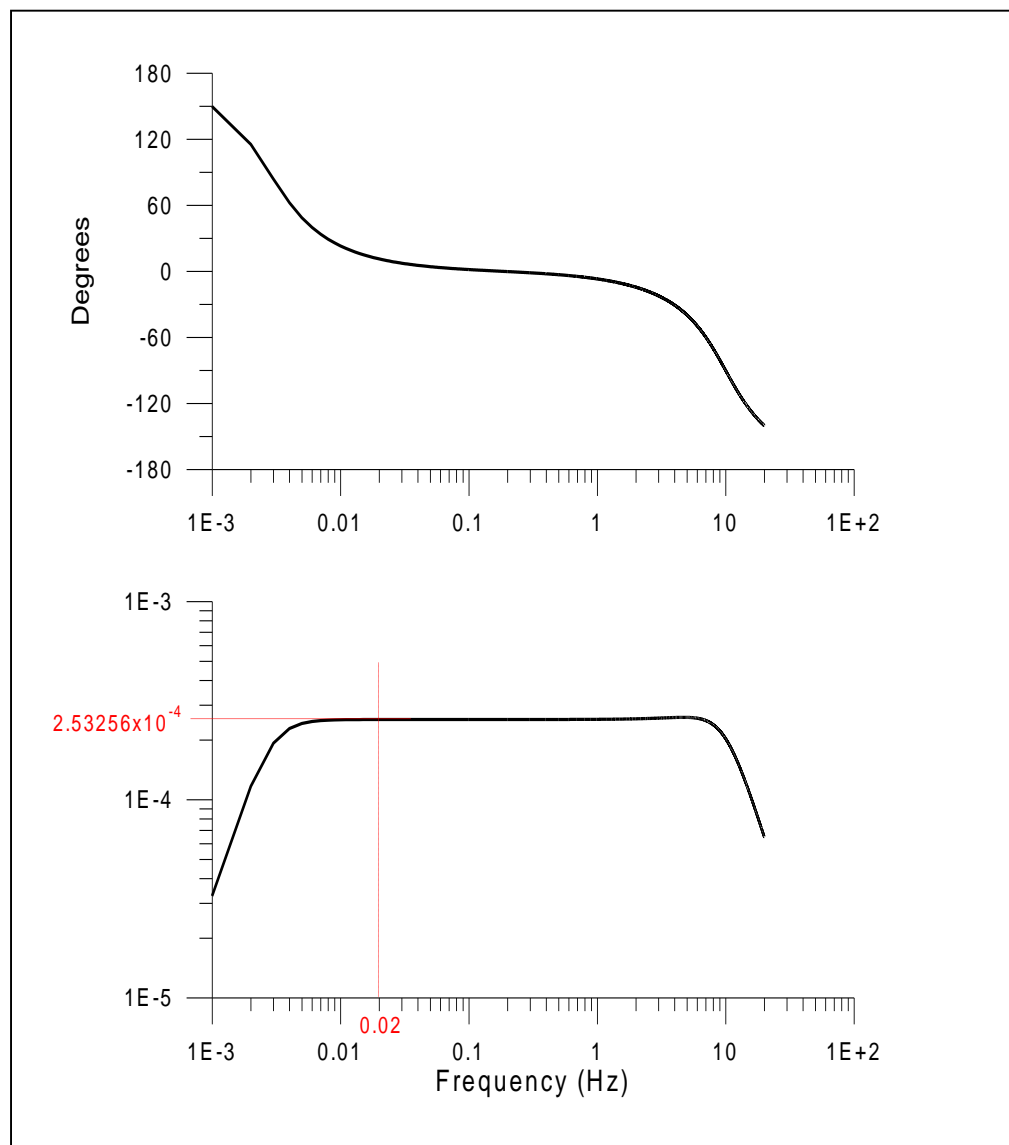
<b>-0.123400d-01</b>	<b>0.123400d-01</b>
<b>-0.123400d-01</b>	<b>-0.123400d-01</b>
<b>-0.391800d+02</b>	<b>0.491200d+02</b>
<b>-0.391800d+02</b>	<b>-0.491200d+02</b>

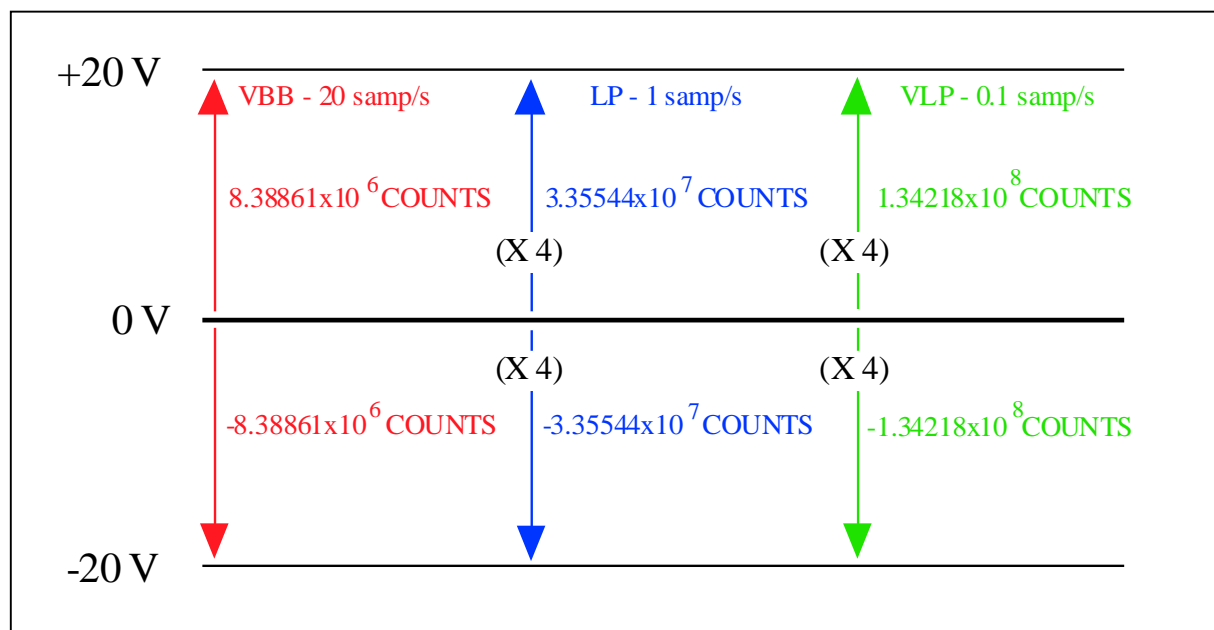
**ZEROS: 2**

<b>0.000000d+00</b>	<b>0.000000d+00</b>
<b>0.000000d+00</b>	<b>0.000000d+00</b>

**NORMALIZATION FREQUENCY: 0.02 Hz**

**NORMALIZATION FACTOR: 3948.573**





**VBB digital data**

**DIGITIZER: range 40 V P-P;  $2^{24}$  counts P-P;  $2.384185 \times 10^{-6}$  V/count**

**VBB:  $2.38419 \times 10^{-6}$  V/counts**

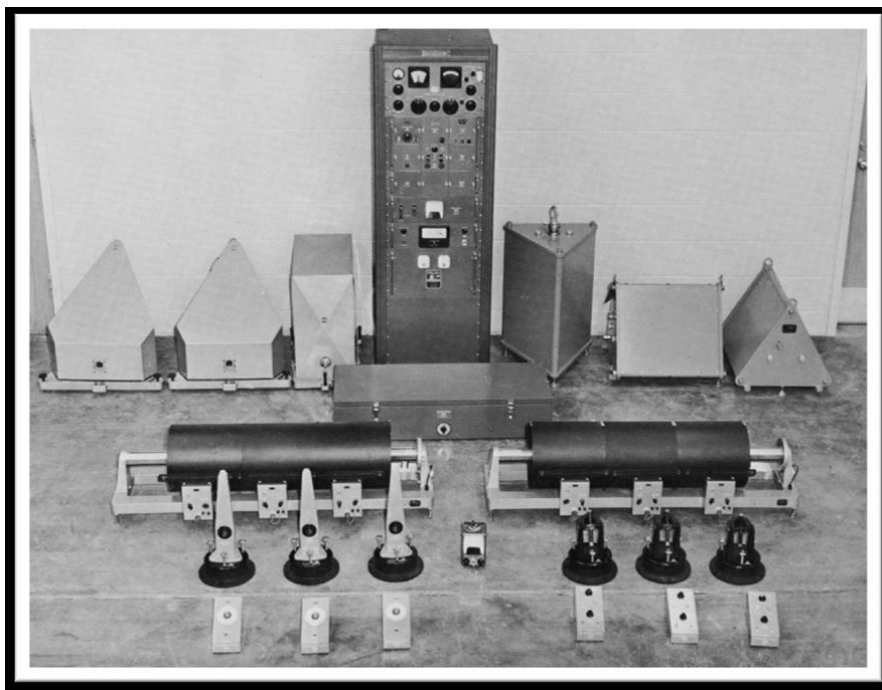
**LP:  $5.96047 \times 10^{-7}$  V/counts**

**VLP:  $1.49011 \times 10^{-7}$  V/counts**

$$\frac{\text{counts}}{\text{m/s}} = \frac{\text{V}}{\text{Coun}}$$

I sismografi a lungo termine dell'ormai obsoleto WWSSN (Worldwide Standard Seismograph Network) consistevano in un sismometro elettrodinamico a lungo periodo con un periodo proprio di 15 secondi e un galvanometro a specchio a lungo periodo con un periodo libero di circa 90 secondi.

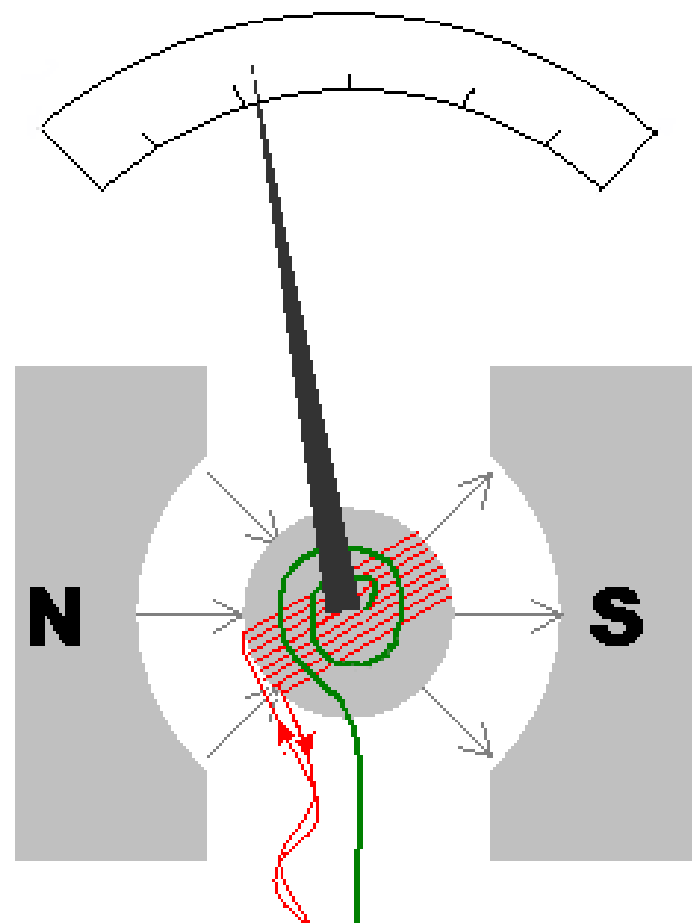
I sismogrammi WWSSN erano registrati su carta fotografica che ruotava su un tamburo. Ora deriveremo diverse forme equivalenti della funzione di trasferimento per questo sistema. Nel nostro esempio le costanti di smorzamento sono scelte come 0,6 per il sismometro e 0,9 per il galvanometro.



Componenti del Standardized Seismograph Network system a livello mondiale. I sismometri a lungo periodo sono mostrati in alto a sinistra, i galvanometri e i registratori in basso a sinistra. I sismometri di breve periodo sono mostrati in alto a destra, i galvanometri e il registratore in basso a destra. La console elettronica contiene sistema di temporizzazione, controlli e alimentazione

## GALVANOMETRO

L'uso più comune del galvanometro è come strumento di misura o come rivelatore di corrente continua. Il dispositivo è costituito da una bobina mobile che può parzialmente ruotare all'interno di un campo magnetico, solidale con una lancetta indicatrice sovrapposta ad una scala graduata. Una molla tiene la bobina in posizione zero. Quando una corrente fluisce nelle spire, il solenoide genera un campo magnetico, che opponendosi a quello esterno produce una forza che fa ruotare la bobina e quindi l'ago indicatore. La molla contrasta la rotazione, con il risultato che l'angolo di deviazione è proporzionale all'intensità della corrente.





## La funzione di trasferimento di un sismografo WWSSN-LP

La funzione di trasferimento di un sismometro elettromagnetico (input: spostamento, output: voltaggio) è

$$H_s(s) = Es^3 / (s^2 + 2s\omega_s h_s + \omega_s^2)$$

$\omega_s = 2\pi / T_s$  frequenza angolare di taglio

$h_s$  smorzamento numerico

$E$  costante del generatore del trasduttore elettromagnetico  
(200 Vsec/m)

Il galvanometro è un filtro passa-basso di secondo ordine e ha la funzione di trasferimento:

$$H_g(s) = \gamma\omega_g^2 / (s^2 + 2s\omega_g h_g + \omega_g^2)$$

$\gamma$  : amplificazione del galvanometro (393.5 m/V) che dà l'ingrandimento complessivo desiderato

$$H_s(s) = Es^3 / (s^2 + 2s\omega_s h_s + \omega_s^2)$$

$$H_g(s) = \gamma\omega_g^2 / (s^2 + 2s\omega_g h_g + \omega_g^2)$$

La funzione di trasferimento complessiva  $H_d$  del sismografo è ottenuta nel nostro trattamento semplificato come prodotto dei fattori

$$H_d(s) = \frac{Cs^3}{(s^2 + 2s\omega_s h_s + \omega_s^2)(s^2 + 2s\omega_g h_g + \omega_g^2)}$$

$$C = E\gamma\omega_g^2 \quad \mathbf{383.6/sec}$$

$$2\omega_g h_g \quad \mathbf{0.1257/sec}$$

$$2\omega_s h_s \quad \mathbf{0.5027/sec}$$

$$\omega_g^2 \quad \mathbf{0.00487/sec^2}$$

$$\omega_s^2 \quad \mathbf{0.1755/sec^2}$$

$$H_d(s) = 383.6s^3 / (s^4 + 0.6283s^3 + 0.2435s^2 + 0.0245s + 0.000855)$$

Essendo sia l'ingresso che l'uscita spostamenti,  $|H_d(s)|$  è l'amplificazione, dipendente dalla frequenza, del sismografo. Il guadagno  $C$  ha dimensioni fisiche  $\text{sec}^{-1}$ , quindi,  $H_d(s)$  è adimensionale.

Per trovare l'amplificazione alla frequenza angolare  $\omega$  :

$$M(\omega) = |H_d(j\omega)|:$$

$$M(\omega) = \frac{C\omega^3}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_s^2h_s^2} \sqrt{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_g^2h_g^2}}$$

$$H_d(s) = \frac{Cs^3}{(s^2 + 2s\omega_s h_s + \omega_s^2)(s^2 + 2s\omega_g h_g + \omega_g^2)}$$

Un triplo zero è esiste per  $C=0$

Ogni fattore  $s^2 + 2s\omega_0 h + \omega_0^2$  al denominatore ha gli zeri :

$$s_0 = \omega_0(-h \pm j\sqrt{1-h^2}) \quad \text{for } h < 1$$

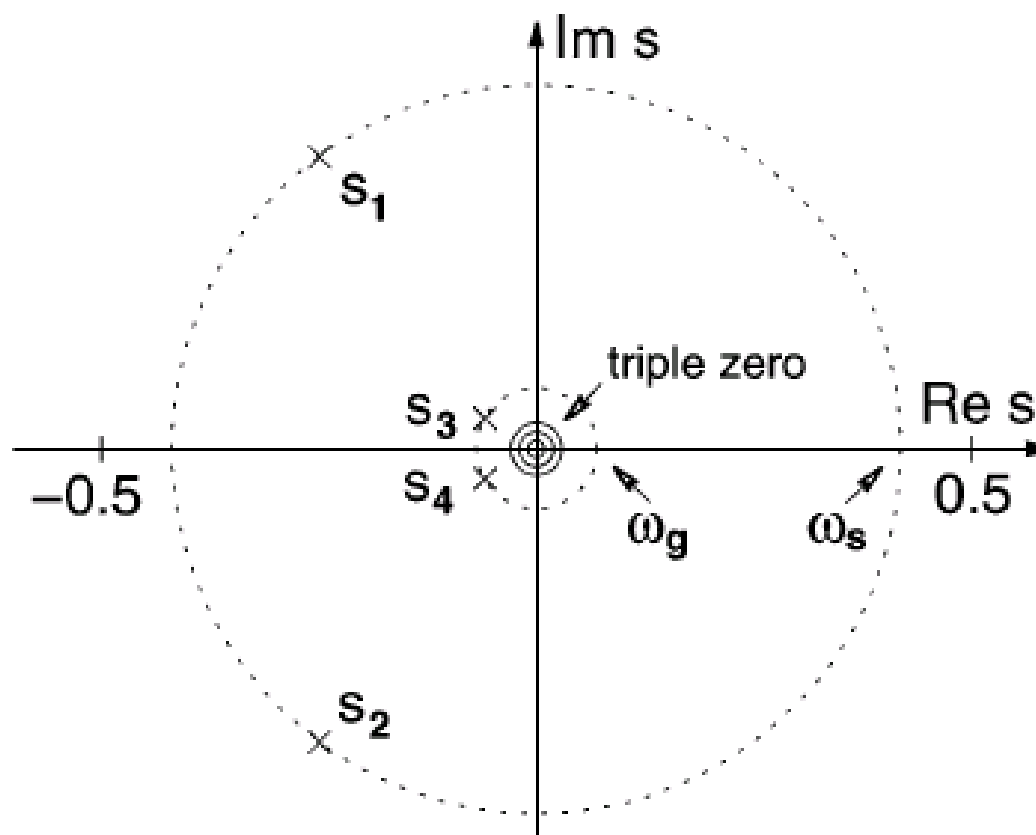
$$s_0 = \omega_0(-h \pm \sqrt{h^2-1}) \quad \text{for } h \geq 1$$

$$s_1 = \omega_s(-h_s + j\sqrt{1-h_s^2}) = -0.2513 + 0.3351j \quad [\text{sec}^{-1}]$$

$$s_2 = \omega_s(-h_s - j\sqrt{1-h_s^2}) = -0.2513 - 0.3351j \quad [\text{sec}^{-1}]$$

$$s_3 = \omega_g(-h_g + j\sqrt{1-h_g^2}) = -0.0628 + 0.0304j \quad [\text{sec}^{-1}]$$

$$s_4 = \omega_g(-h_g - j\sqrt{1-h_g^2}) = -0.0628 - 0.0304j \quad [\text{sec}^{-1}]$$



Per ricostruire  $H_d(s)$  dai suoi poli e zeri scriviamo:

$$H_d(s) = \frac{Cs^3}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$$

$$H_d(s) = \frac{Cs^3}{(s^2 - s(s_1 + s_2) + s_1s_2)(s^2 - s(s_3 + s_4) + s_3s_4)}$$

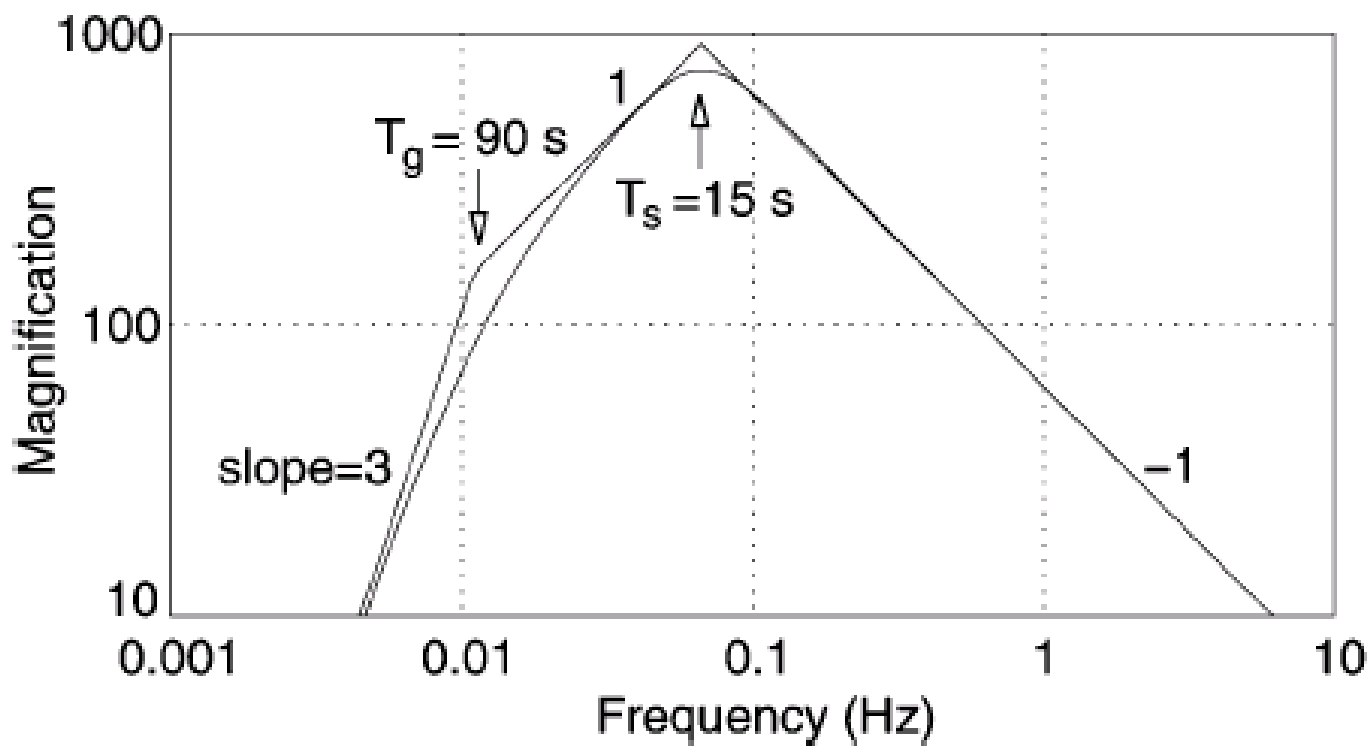
In questo modo abbiamo tutti i fattori reali in quanto:

$$s_2 = s_1^* \qquad s_4 = s_3^*$$

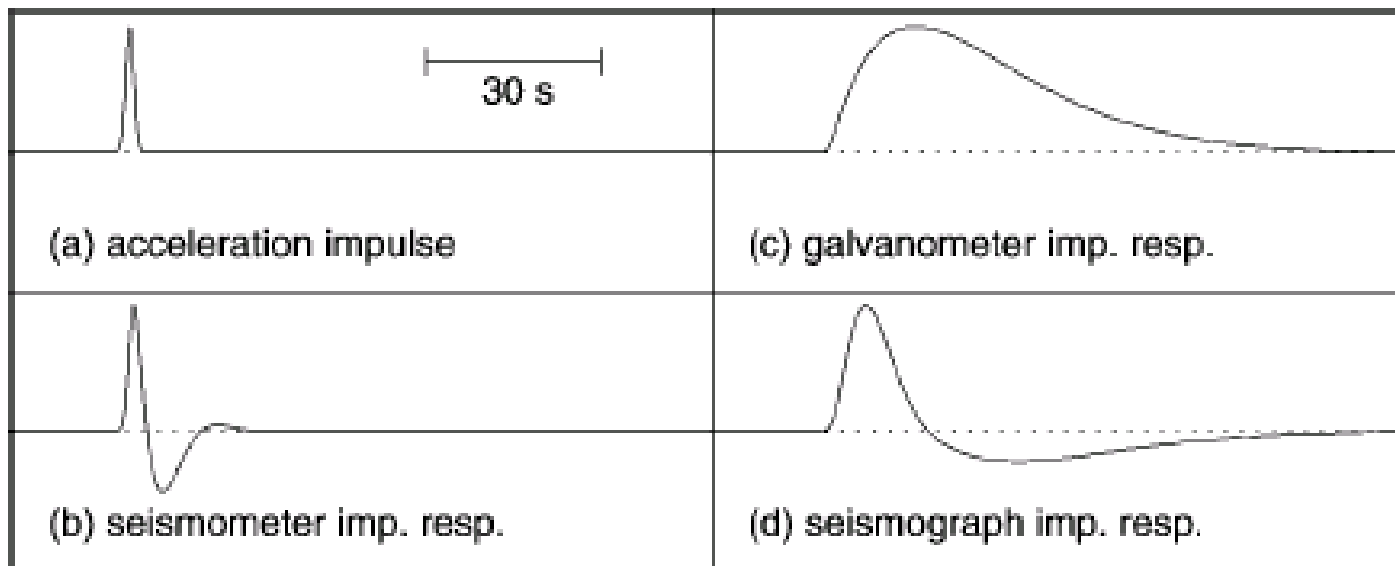
$$H_d(s) = \frac{Cs^3}{(s^2 - s(s_1 + s_2) + s_1s_2)(s^2 - s(s_3 + s_4) + s_3s_4)}$$

$$H_d(s) = \frac{Cs^3}{(s^2 + 2s\omega_s h_s + \omega_s^2)(s^2 + 2s\omega_g h_g + \omega_g^2)}$$

$$H_d(s) = \frac{383.6s^3}{(s^2 + 0.5027s + 0.1755)(s^2 + 0.1257s + 0.00487)}$$

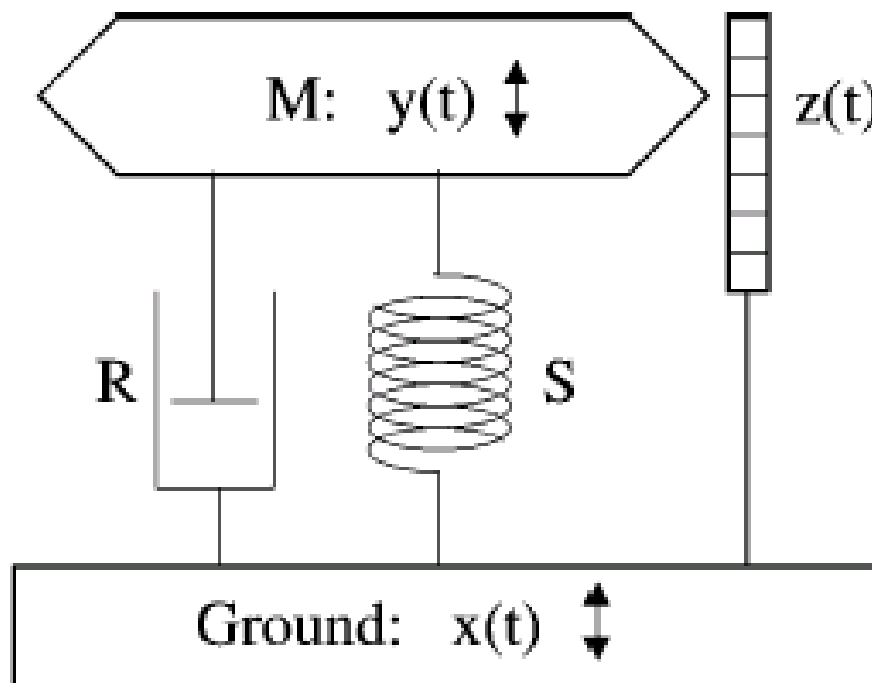




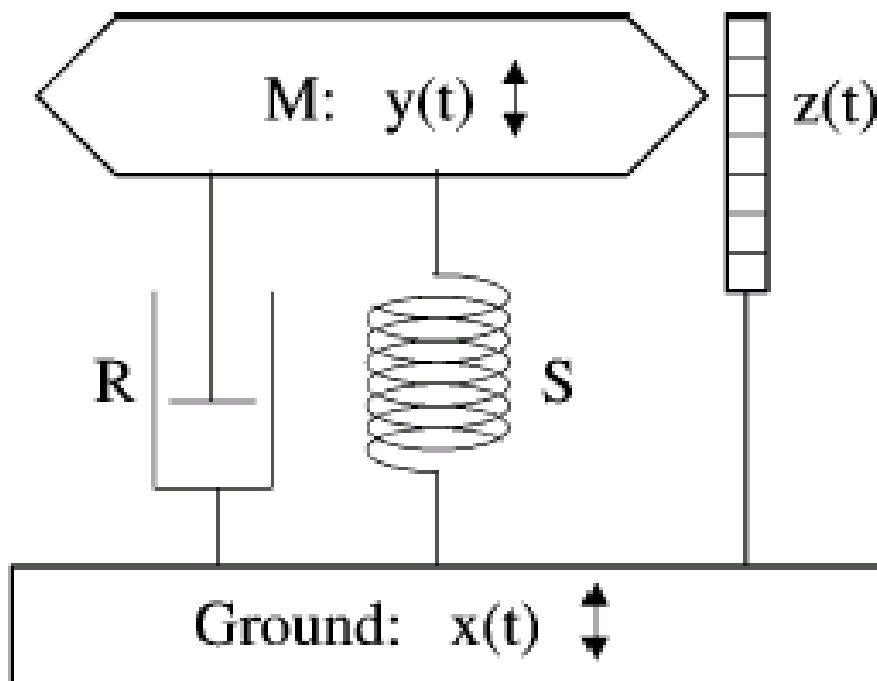


## PENDOLO MECCANICO

Oscillatore armonico smorzato



$$z(t) = y(t) - x(t)$$



$$z(t) = y(t) - x(t)$$

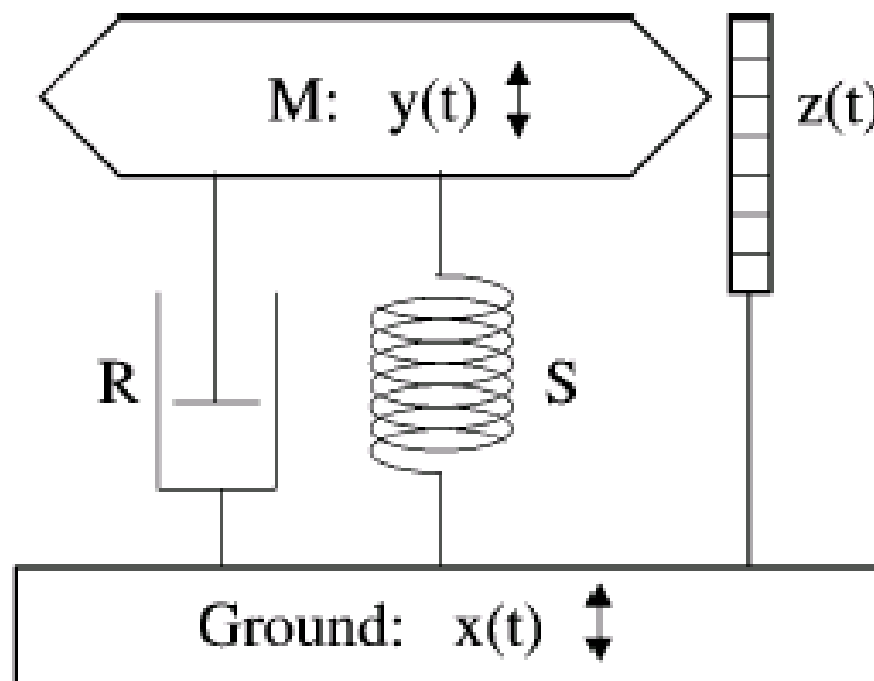
$$M \ddot{y}(t) = f(t) - S z(t) - R \dot{z}(t).$$

$M$  = massa (kg)

$S$  = costante della molla (Newton per metro)

$R$  = costante di smorzamento (Newton per metro per secondo)

Da ogni forza  $f(t)$  esterna che agisce sulla massa e dalle forze trasmesse dalla molla e dallo smorzatore corrisponderà un'accelerazione  $\ddot{y}(t)$



$$z(t) = y(t) - x(t)$$

$$M \ddot{y}(t) = f(t) - S z(t) - R \dot{z}(t).$$

Dato che siamo interessati alla relazione tra  $z(t)$  e  $x(t)$ :

$$M \ddot{z}(t) + R \dot{z}(t) + S z(t) = f(t) - M \ddot{x}(t).$$

Un'accelerazione del terreno  $\ddot{x}(t)$  corrisponde ad un'accelerazione  $f(t) = -M \ddot{x}(t)$  applicata alla massa in assenza dell'accelerazione del terreno

$$c_2 \ddot{f}(t) + c_1 \dot{f}(t) + c_0 f(t) = d_2 \ddot{g}(t) + d_1 \dot{g}(t) + d_0 g(t)$$

e

$$c_2 s^2 F(s) + c_1 s F(s) + c_0 F(s) = d_2 s^2 G(s) + d_1 s G(s) + d_0 G(s)$$

dalla

$$M \ddot{z}(t) + R \dot{z}(t) + S z(t) = f(t) - M \ddot{x}(t).$$

otteniamo

$$(s^2 M + s R + S) Z = F - s^2 M X$$

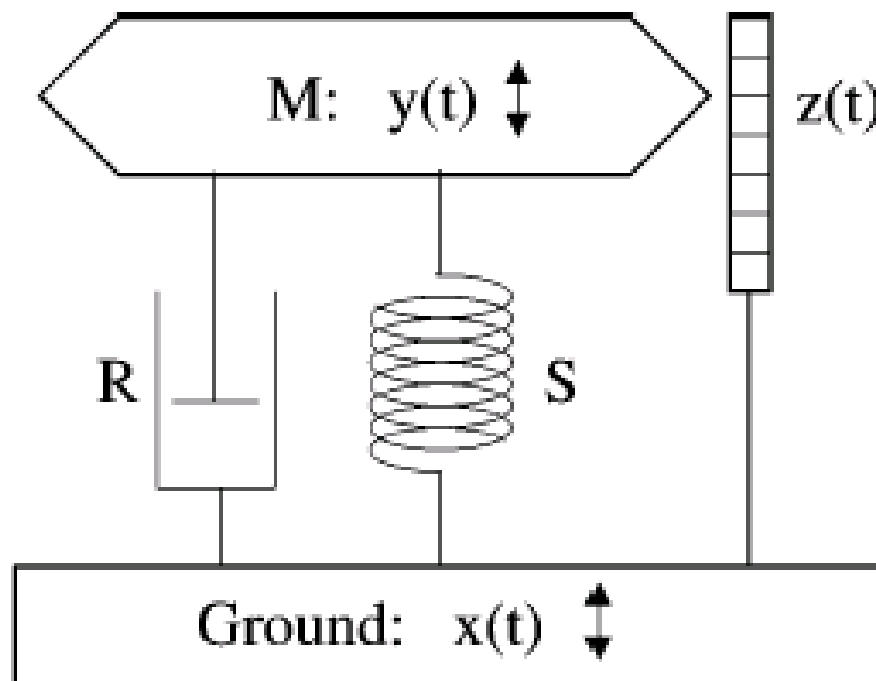
o

$$Z = (F / M - s^2 X) / (s^2 + s R / M + S / M).$$

dalla

$$Z = (F / M - s^2 X) / (s^2 + sR / M + S / M).$$

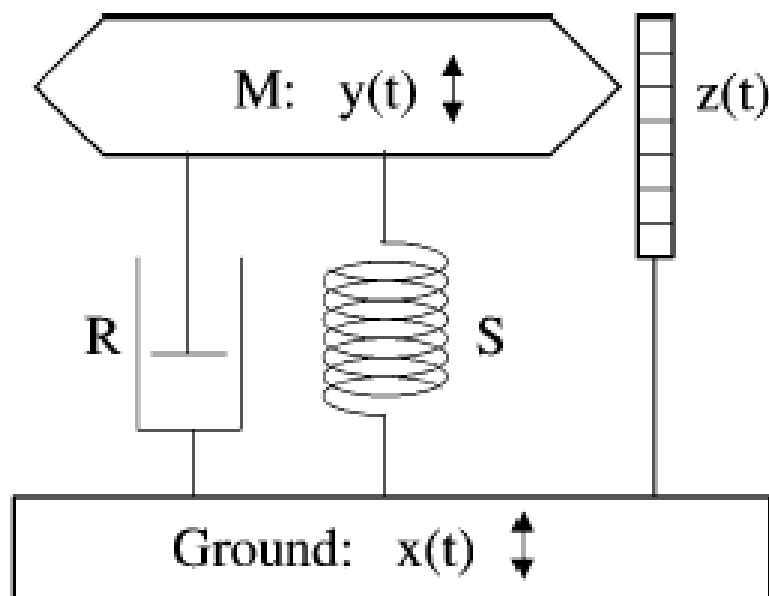
Possiamo ottenere la funzione di trasferimento  $T_f = Z/F$  relativa alla forza esterna  $F$  e la funzione di trasferimento  $T_d = Z/X$  relativa allo spostamento  $X$



$$z(t) = y(t) - x(t)$$

$$M \ddot{z}(t) + R \dot{z}(t) + S z(t) = f(t) - M \ddot{x}(t)$$

Si arriva allo stesso risultato utilizzando la trasformata di Fourier assumendo un moto armonico  $x(t) = \tilde{X} e^{j\omega t} / 2\pi$  ed una forza armonica  $f(t) = \tilde{F} e^{j\omega t} / 2\pi$ .



$$z(t) = y(t) - x(t)$$

$$M \ddot{z}(t) + R \dot{z}(t) + S z(t) = f(t) - M \ddot{x}(t)$$

$$(-\omega^2 M + j\omega R + S)\tilde{Z} = \tilde{F} + \omega^2 M\tilde{X}$$

$$\tilde{Z} = (\tilde{F} / M + \omega^2 \tilde{X}) / (-\omega^2 + j\omega R / M + S / M)$$



$$\tilde{Z} = (\tilde{F} / M + \omega^2 \tilde{X}) / (-\omega^2 + j\omega R / M + S / M).$$

Frequenza di taglio

$$f_0 = \omega_0 / 2\pi$$

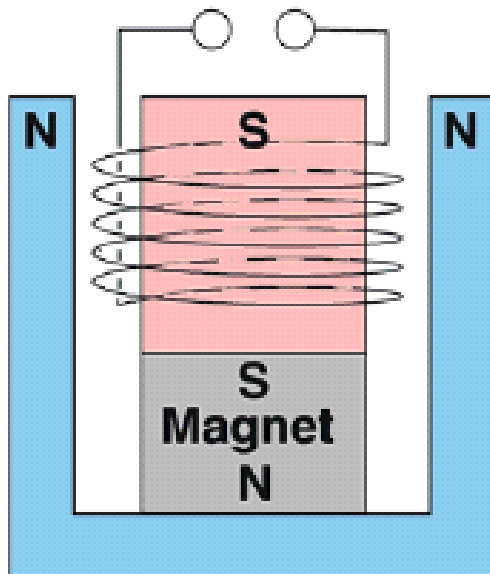
$$\omega_0 = \sqrt{S / M}.$$

smorzamento numerico

$$h = R / (2\omega_0 M)$$

$$\tilde{Z} = (\tilde{F} / M + \omega^2 \tilde{X}) / (-\omega^2 + 2j\omega\omega_0 h + \omega_0^2)$$

Alla frequenza angolare  $\omega_0$  il moto del terreno  $\pi/2$  viene amplificato di un fattore  $\omega_0 M/R$  ed uno sfasamento di  $\tilde{X}$



Per convertire il moto della massa in segnale elettrico il pendolo meccanico è equipaggiato con un trasduttore di velocità elettromagnetico.

$$\tilde{Z} = (\tilde{F} / M + \omega^2 \tilde{X}) / (-\omega^2 + 2j\omega\omega_0 h + \omega_0^2)$$

Per convertire il movimento della massa in un segnale elettrico, il pendolo meccanico nel caso più semplice è dotato di un trasduttore di velocità elettromagnetico e indichiamo con  $\tilde{U}$  la sua tensione di uscita. Abbiamo quindi un sismometro elettromagnetico, chiamato anche un geofono, progettato per l'esplorazione sismica. Quando la reattività del trasduttore è  $E$  (volt al metro al secondo;  $\tilde{U} = -Ej\omega\tilde{Z}$ ) otteniamo

$$\tilde{U} = -j\omega E (\tilde{F} / M + \omega^2 \tilde{X}) / (-\omega^2 + 2j\omega\omega_0 h + \omega_0^2)$$

Nel caso di assenza di forze esterne

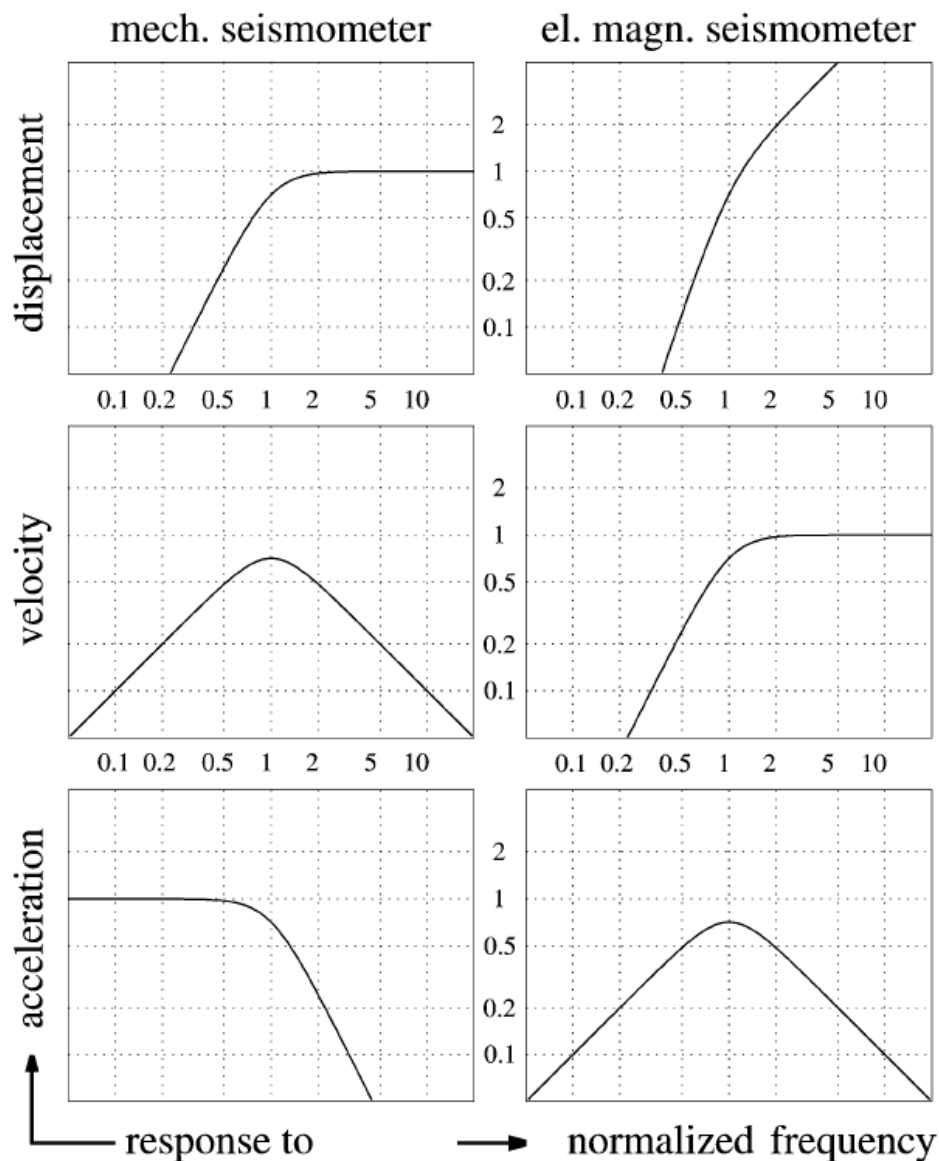
$$f(t) = 0, \tilde{F} = 0$$

Otteniamo la funzione di risposta complessa dipendente dalla frequenza

$$\tilde{H}_d(\omega) := \tilde{U} / \tilde{X} = -j\omega^3 E / (-\omega^2 + 2j\omega\omega_0 h + \omega_0^2)$$

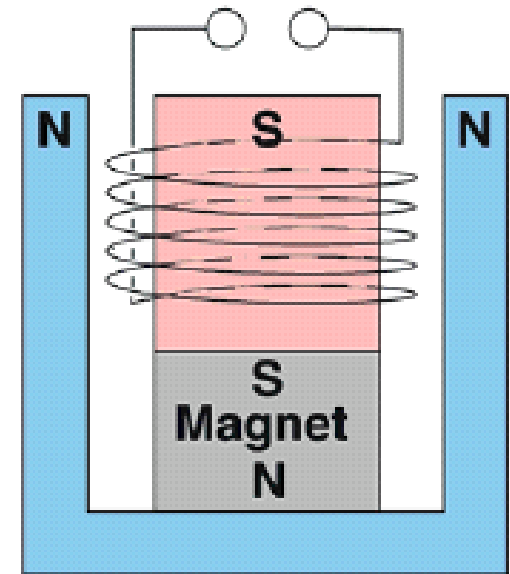
$$\tilde{H}_v(\omega) := \tilde{U} / (j\omega\tilde{X}) = -\omega^2 E / (-\omega^2 + 2j\omega\omega_0 h + \omega_0^2)$$

$$\tilde{H}_a(\omega) := \tilde{U} / (-\omega^2 \tilde{X}) = j\omega E / (-\omega^2 + 2j\omega\omega_0 h + \omega_0^2)$$



Curve di risposta di un sismometro meccanico (pendolo e molla, a sinistra) ed sismometro elettrodinamico (geofono, a destra) rispetto ai diversi tipi di segnali di ingresso (spostamento, velocità e accelerazione, rispettivamente). La frequenza normalizzata è il segnale frequenza divisa per l'autofrequenza (frequenza d'angolo) del sismometro.

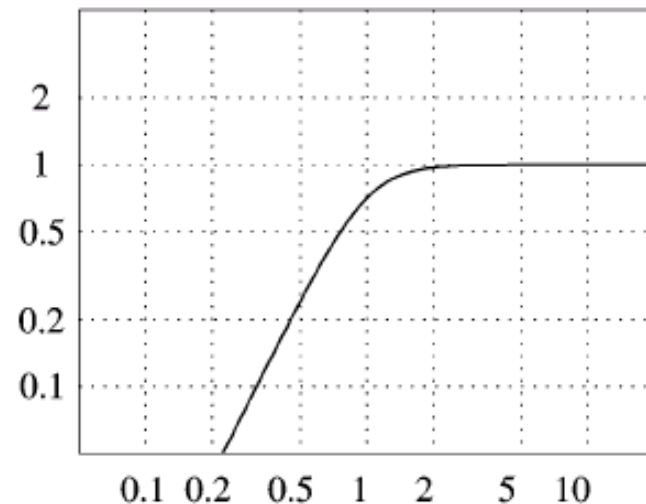
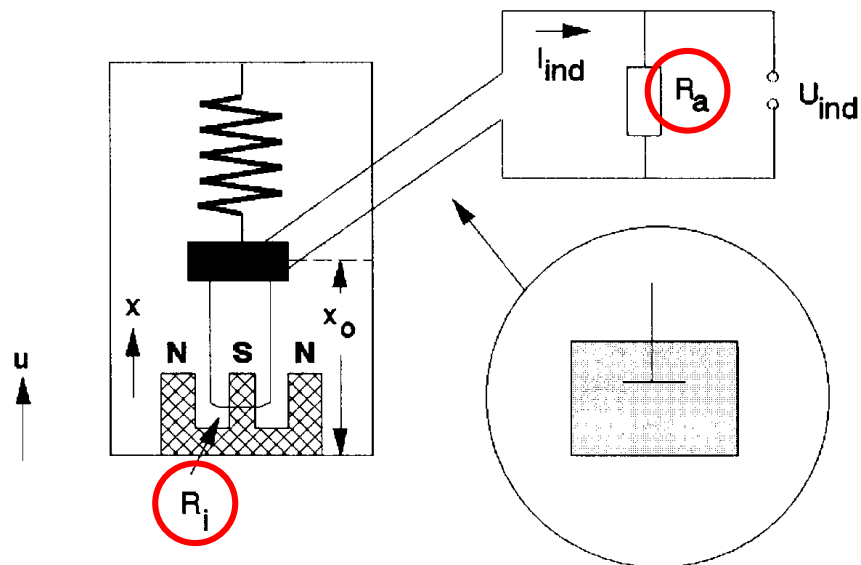
Il trasduttore più semplice sia per rilevare movimenti sia per esercitare forze è un dispositivo elettromagnetico (elettrodinamico) in cui una bobina si muove nel campo di un magnete permanente, come in un altoparlante. Il movimento induce una tensione nella bobina; una corrente che scorre nella bobina produce una forza. Dalla conservazione dell'energia deriva che la reattività del sistema spirale-magnete come trasduttore di forza, in Newton per Ampere, e sua reattività come trasduttore di velocità, in Volt al metro al secondo, sono identici. Le unità sono infatti le stesse (ricorda che  $1\text{Nm} = 1\text{Joule} = 1\text{VAs}$ ). Quando il trasduttore di velocità è caricato con un resistore, permettendo così a una corrente di fluire, genera una forza, opposta al moto. Questo effetto viene utilizzato per smorzare l'oscillazione libera meccanica del sensore sismico passivo (geofoni e sismometri elettromagnetici).



In questo caso lo smorzamento è dato in piccola parte dallo smorzamento meccanico e principalmente dal trasduttore elettromagnetico:

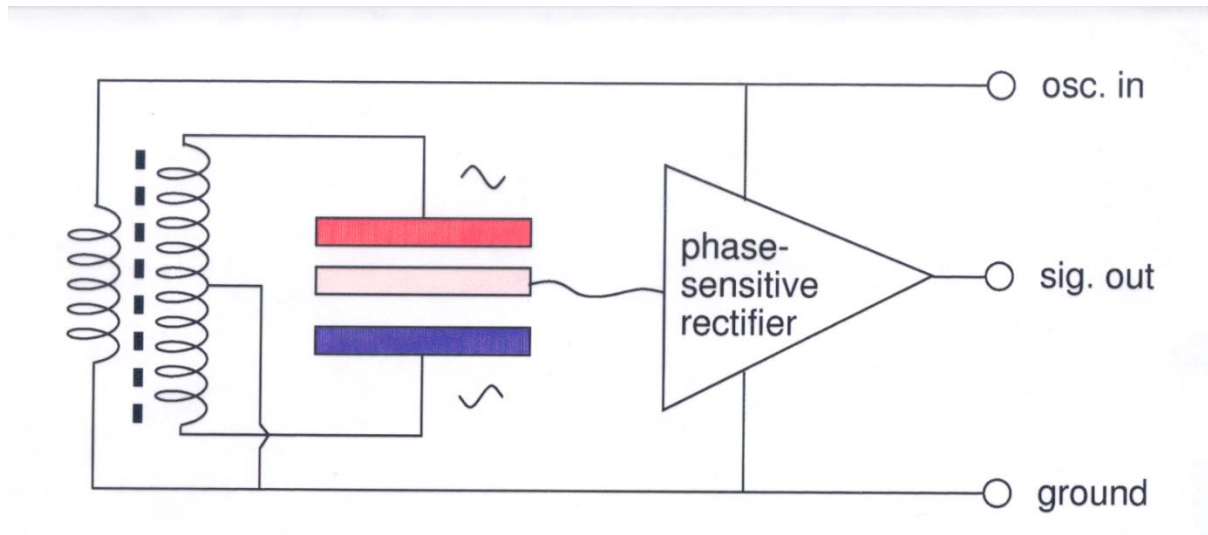
$$h_{el} = E^2 / 2M\omega_0 R_d$$

Dove  $R_d$  lo smorzamento totale (la somma della resistenza della bobina e della resistenza esterna).

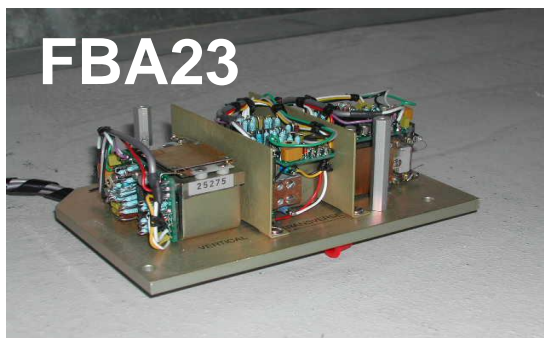
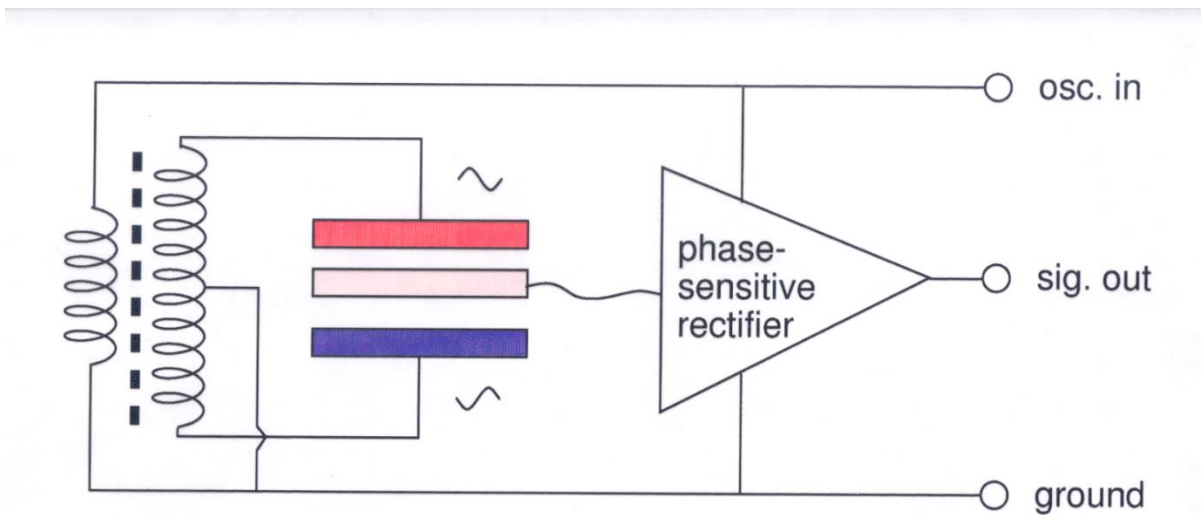


Lo smorzamento totale viene scelto pari a  $1/\sqrt{2}$  in modo da ottenere una risposta piatta.

A frequenze molto basse, il segnale di uscita dei trasduttori elettromagnetici diventa troppo piccolo per essere utile per il rilevamento sismico. Si utilizzano quindi trasduttori elettronici attivi in cui un segnale portante, generalmente nella gamma di frequenze audio, è modulato dal movimento della massa sismica. Il dispositivo modulante di base è un half-bridge induttivo o capacitivo. Gli half-bridge induttivi sono separati da un nucleo magnetico mobile. Gli half-bridge capacitivi sono realizzati come condensatori a tre piastre in cui la piastra centrale o le piastre esterne si muovono con la massa sismica. La loro sensibilità è limitata dal rapporto tra il rumore elettrico del demodulatore e l'intensità del campo elettrico.



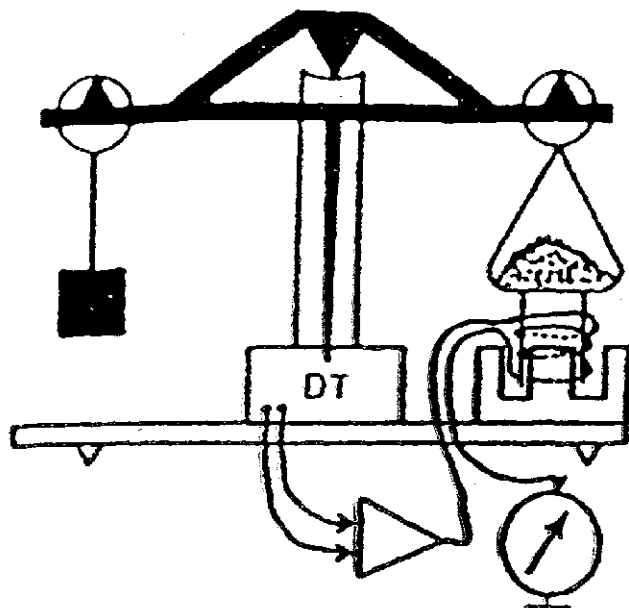
**Capacitive displacement *transducer* (Blumlein bridge).**



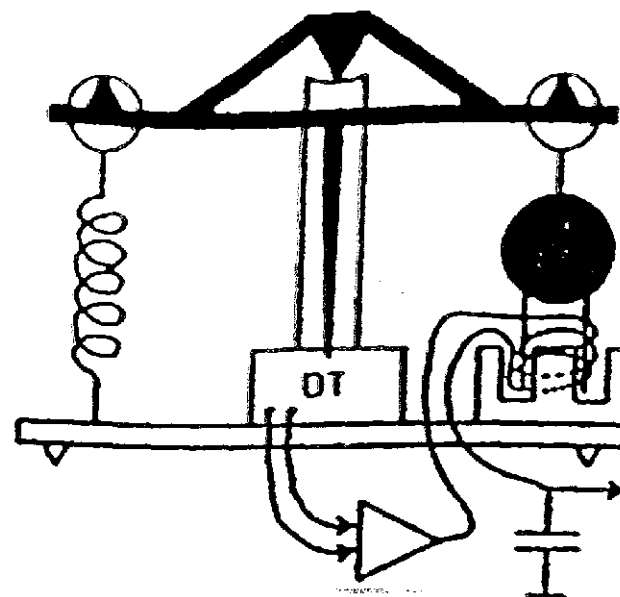


## Sismometri ed accelerometri “Force balance”

La forza inerziale viene compensata (o bilanciata) con una forza generata elettricamente in modo da far muovere la massa il meno possibile. Un piccolo movimento è comunque necessario altrimenti la forza inerziale non può essere osservata.



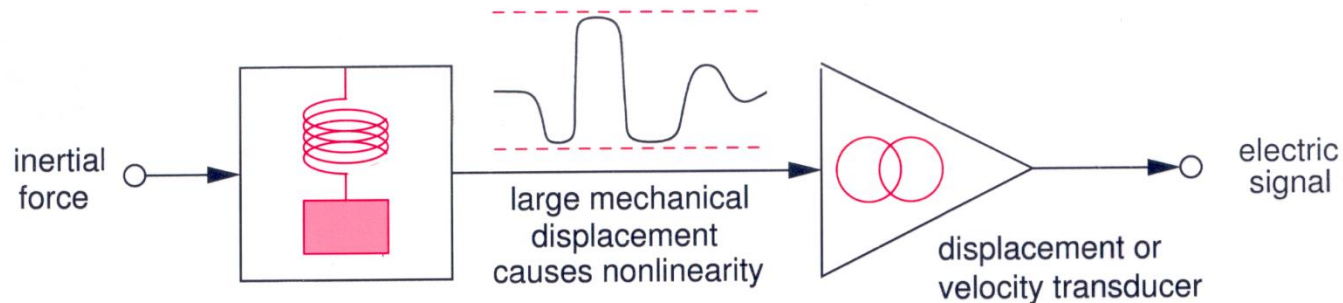
**Bilancia con  
sostituzione del  
peso automatica**



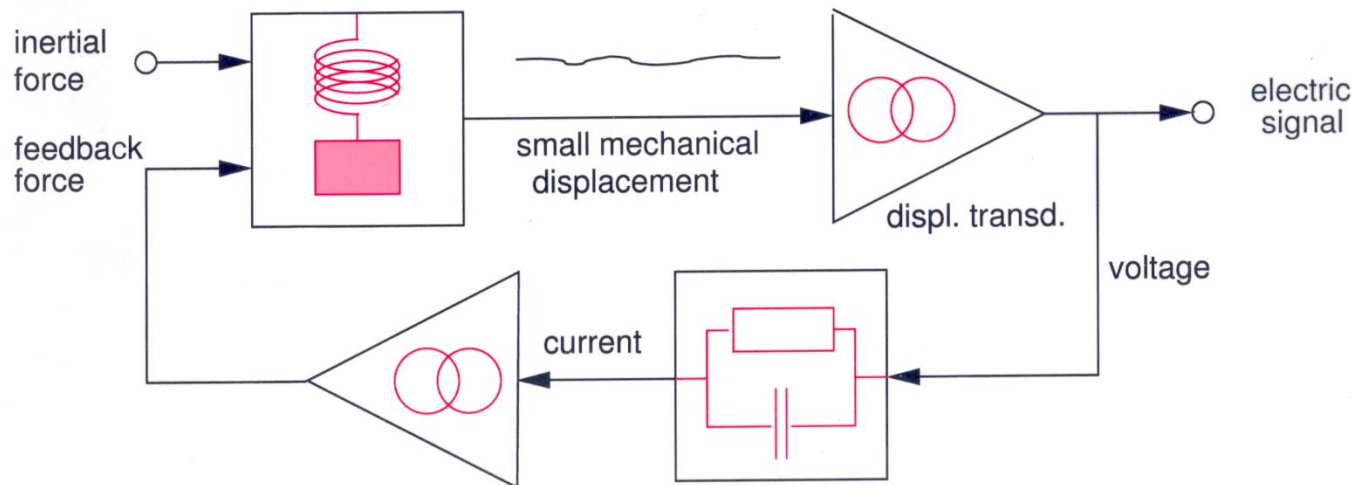
**Sismometro a  
controreazione**

*Adattato da: G. P. ...*

### Seismometer without feedback

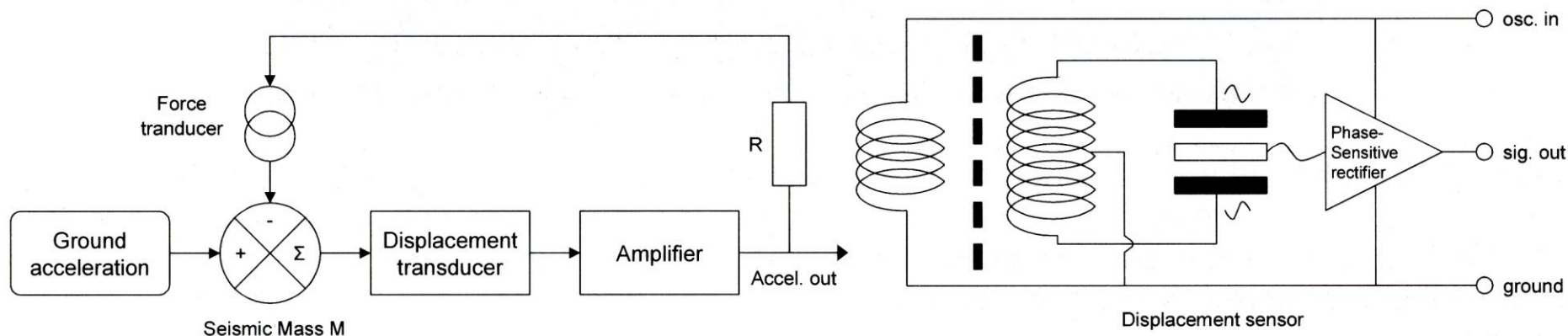
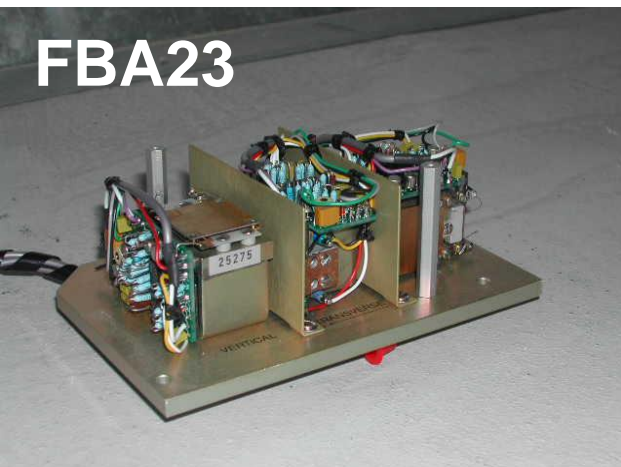


### Force-Balance Seismometer

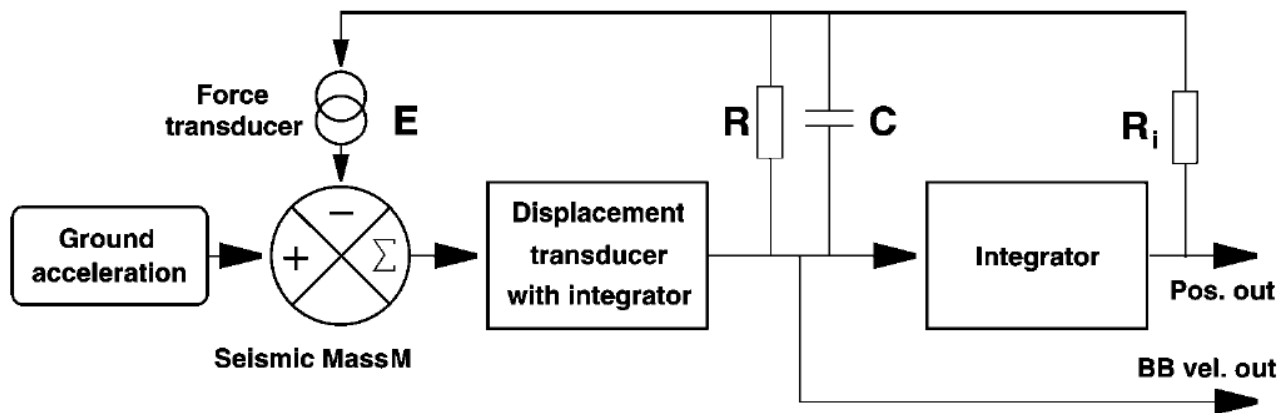


ideally, the mechanical sensor "doesn't know" how large the seismic signal is

# FBA23



Il moto della massa è controllato dalla somma di 2 forze: la forza inerziale dovuta alla accelerazione del suolo e la forza negativa di controreazione.



Circuito di retroazione di un sismometro VBB (velocità-banda larga). La massa sismica è la somma della forza inerziale e della forza di controreazione negativa.

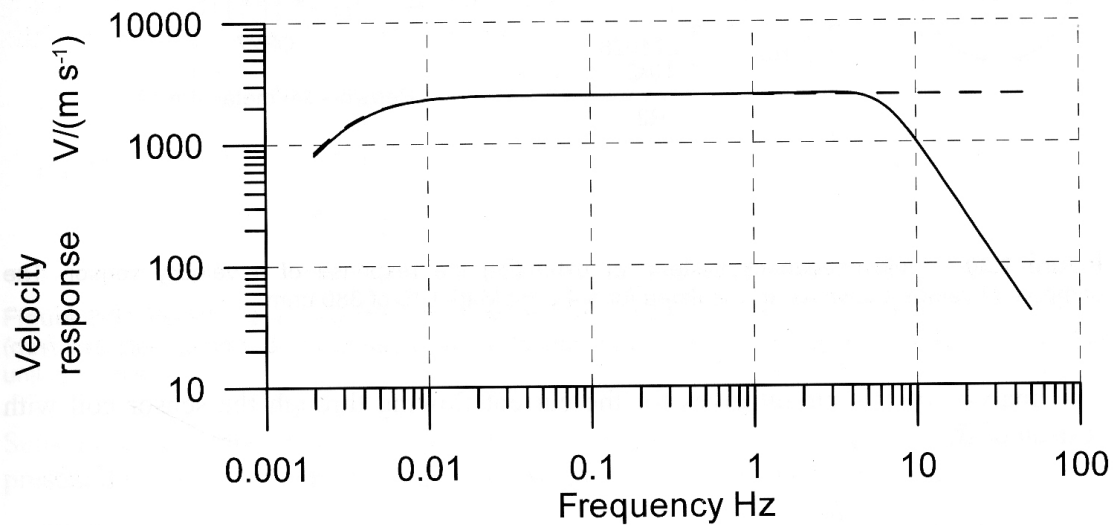
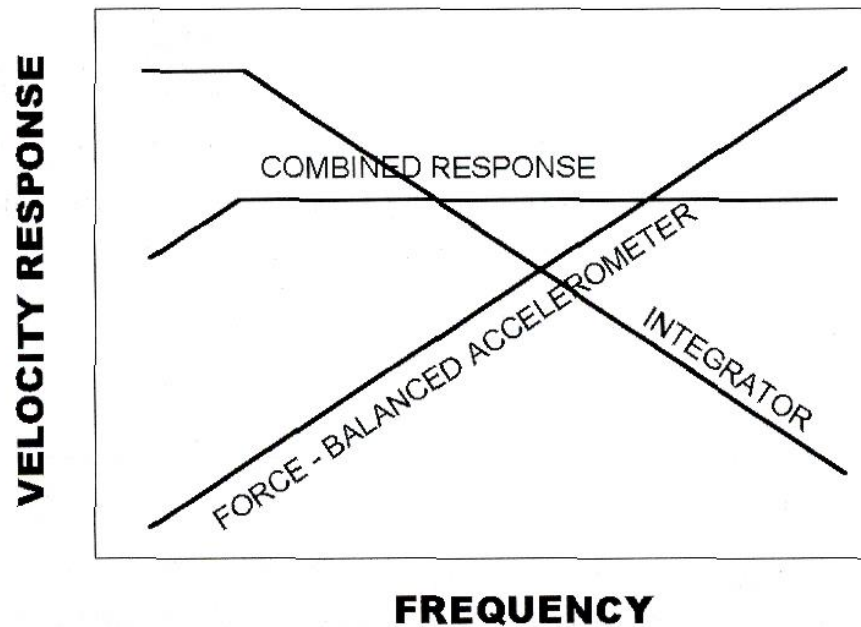
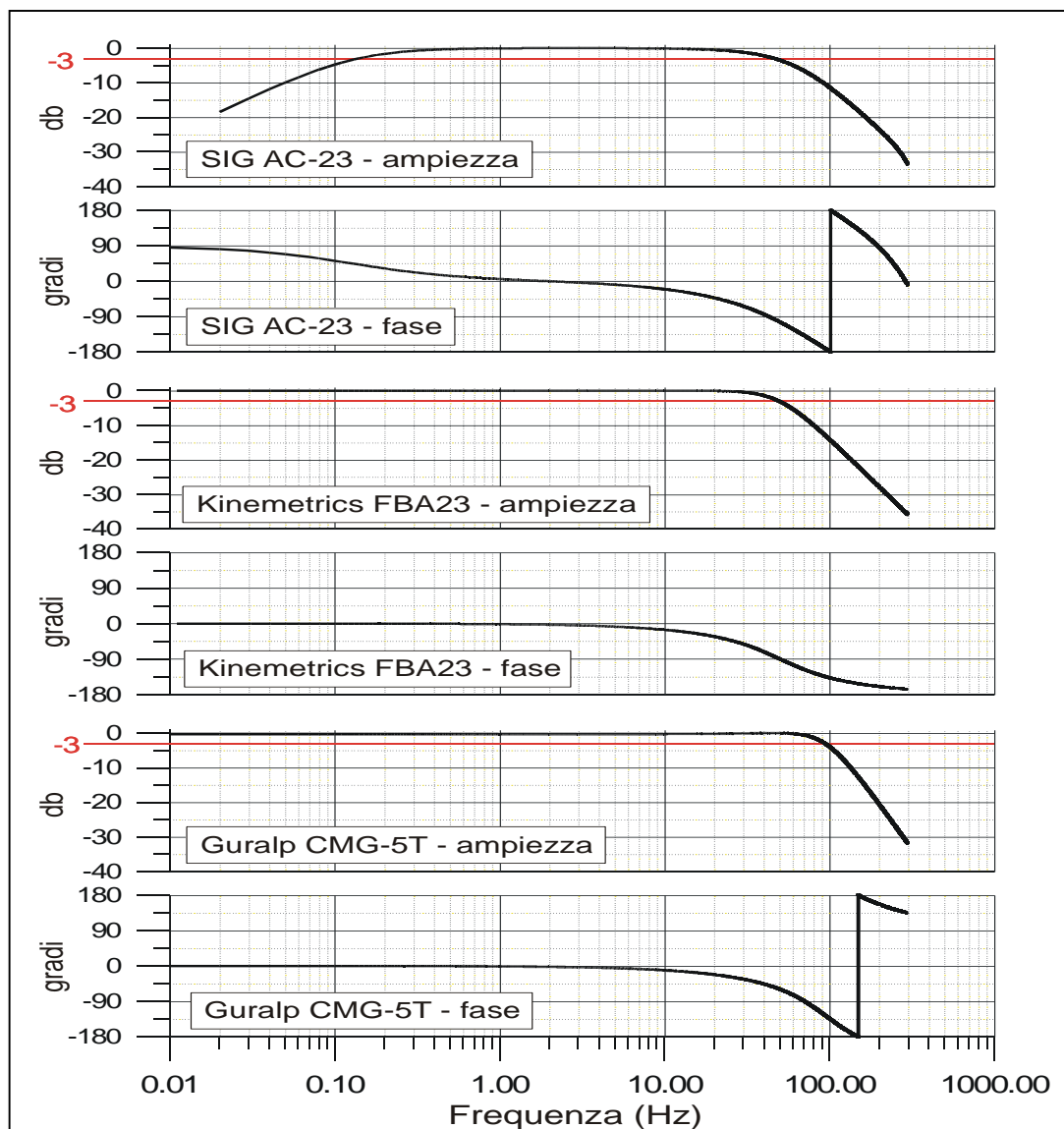
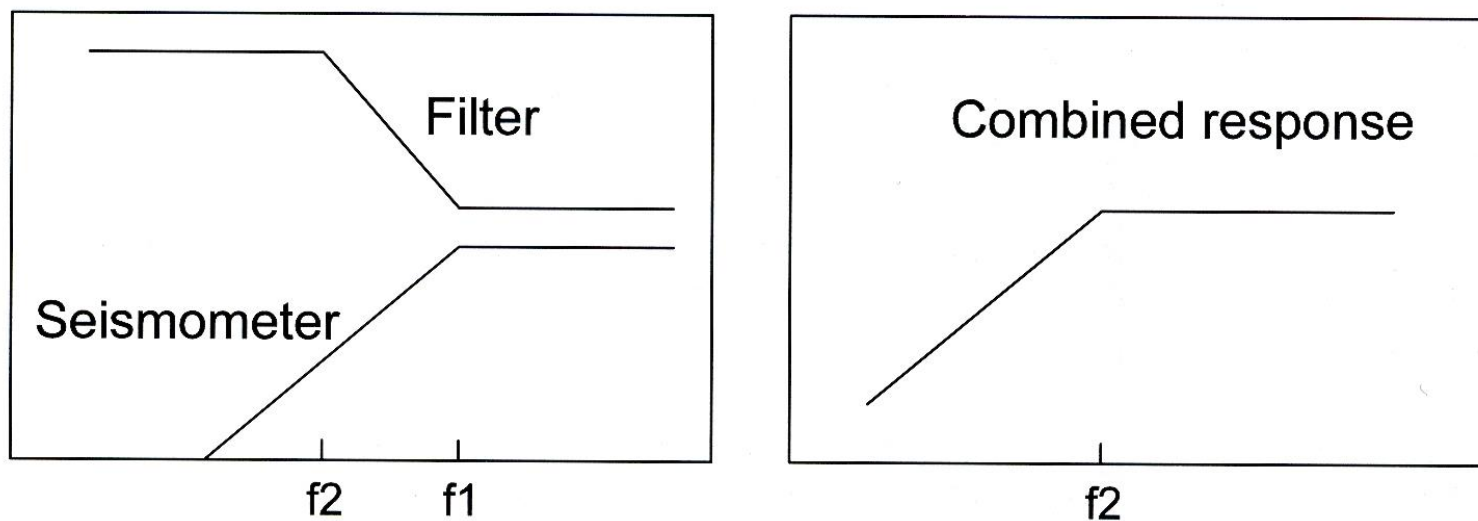


Figure 2.29 Frequency response of a BB system







**Figure 2.22** Enhancing frequency response by inverse filtering. The response functions are shown as log gain versus log frequency. The seismometer has corner frequency  $f_1$  and the special filter corner frequencies  $f_1$  and  $f_2$  (left). To the right is seen the combined response.



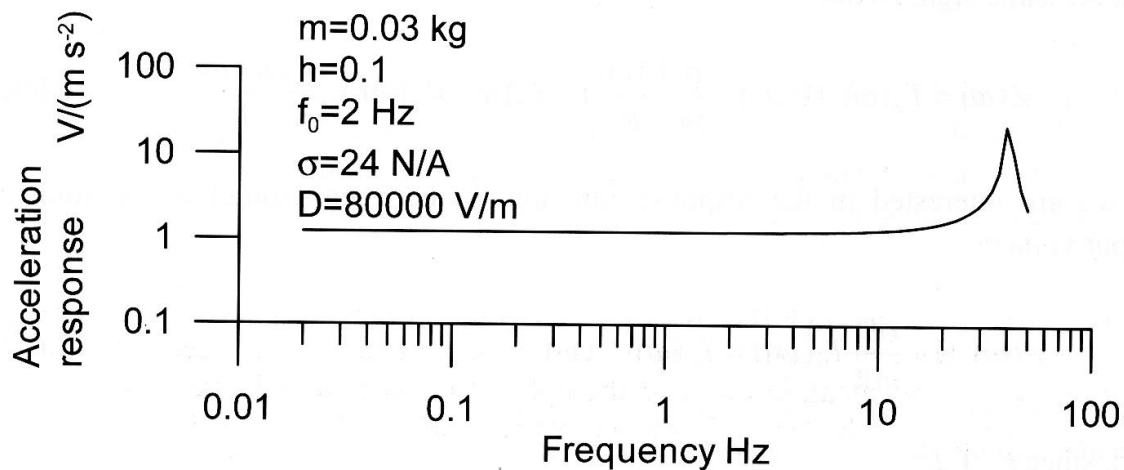


Figure 2.26 Example of the effect of force feedback on the sensor response.

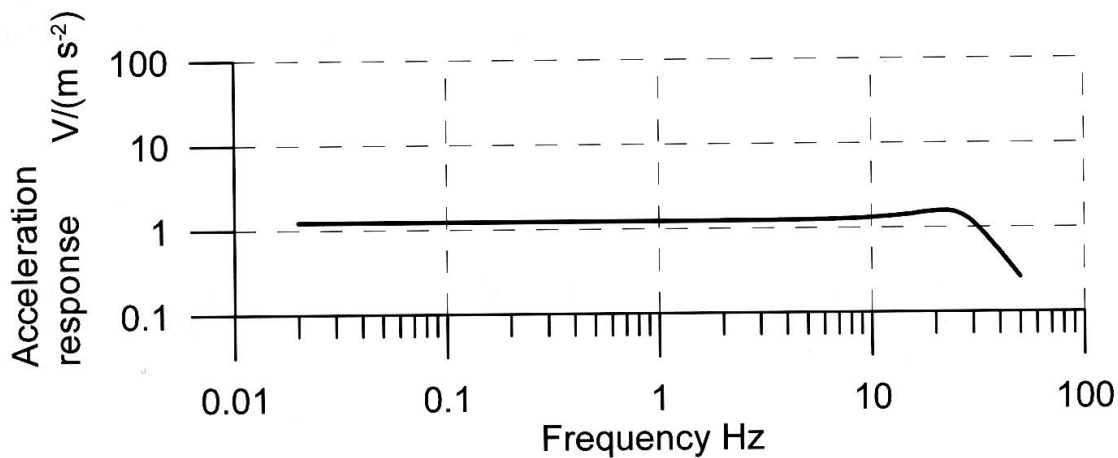


Figure 2.27 Frequency response of filtered FBA.

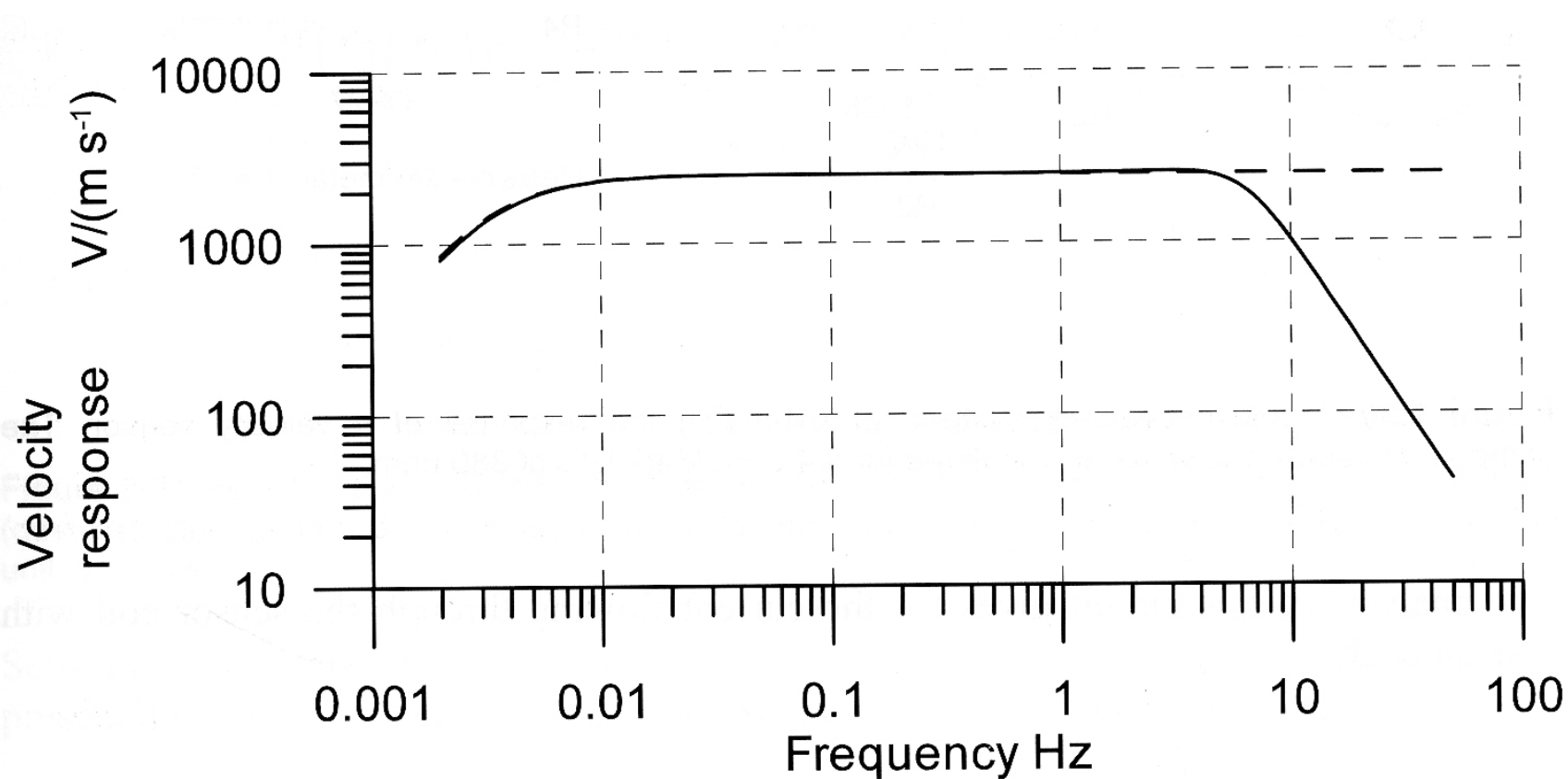
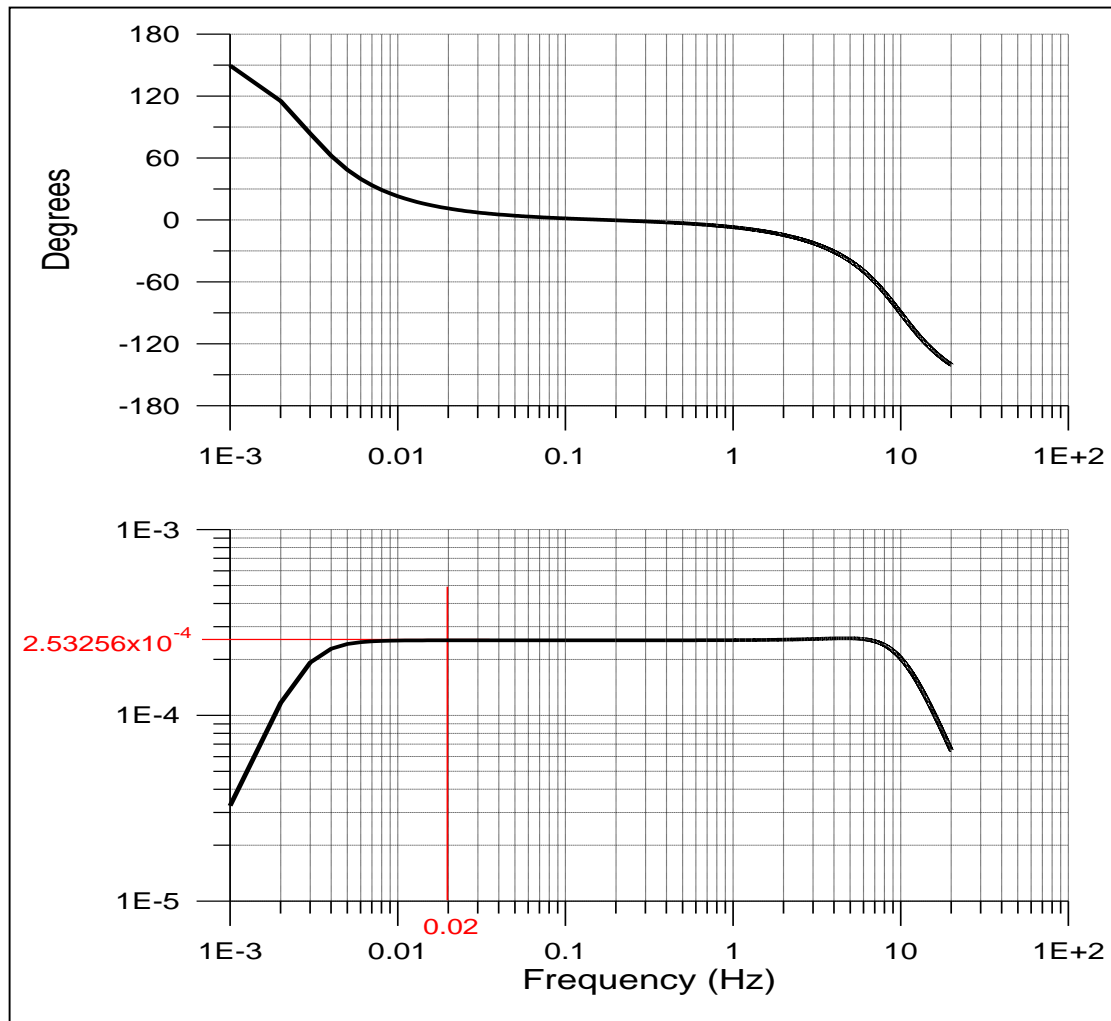
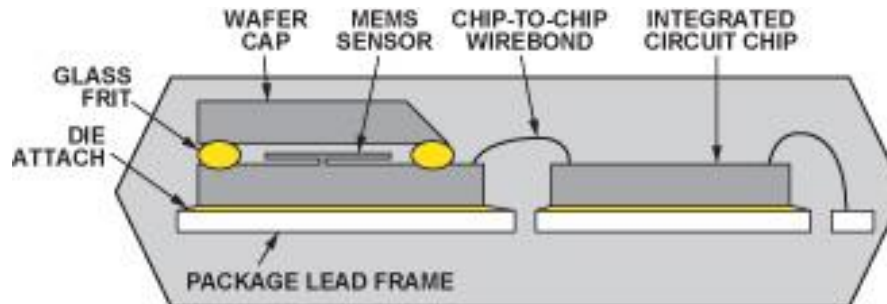
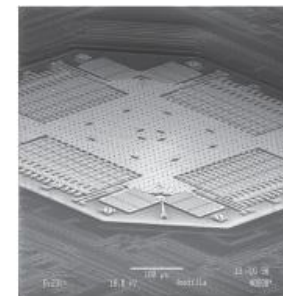
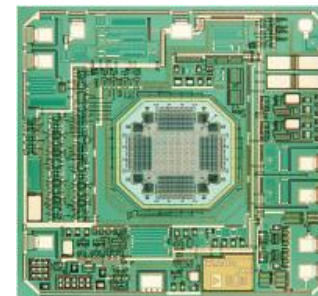
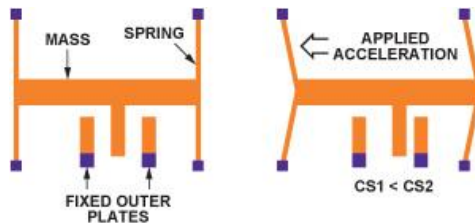
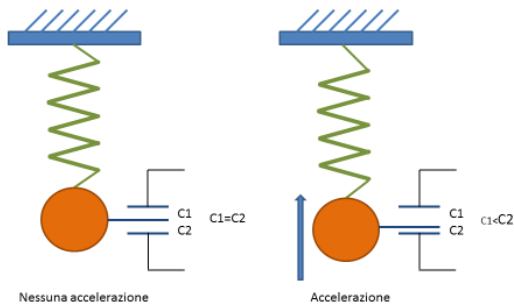


Figure 2.29 Frequency response of a BB system





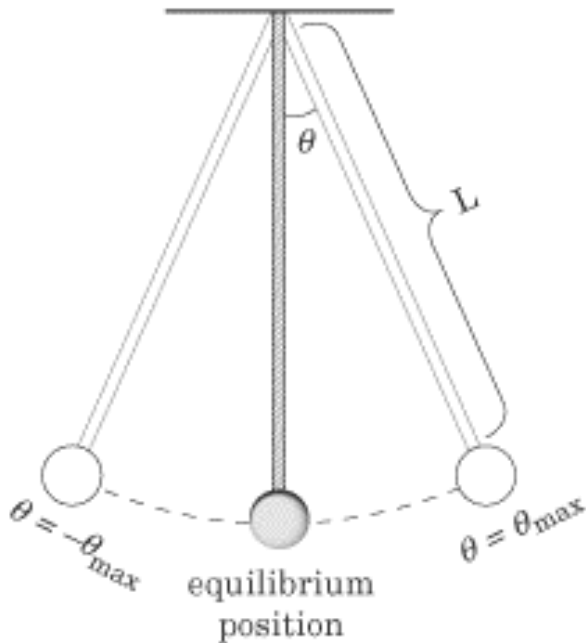
<b>LE-3D/5s</b>	
Power Supply	10...16 V DC, unstabilized
Power Consumption	10 mA at 12 V DC
Output Voltage	400 V/(m/s) precisely adjusted on all components
Full scale output voltage	$\pm 5$ V (differential output)
Damping	0.707 critical (internal damping; independent of datalogger input resistance)
Dimensions	195 mm diameter 165 mm height
Weight	6.5 kg
Temperature Range	-15...+60 °C
Housing	Painted aluminium, splash proof, with level adjustment feet and water bubble level control
Eigenfrequency	0.2 Hz
Upper Corner Frequency	> 40 Hz
RMS Noise at 1 Hz	< 1 nm/s
Dynamic Range (typical)	140 dB
Poles	3 poles: -0.885/+0.887j -0.855/-0.887j -0.427/0.000j
Suggested waiting time after connecting power (does not include time required to reach ambient temperature)	30 seconds



L'equazione differenziale è quella del moto armonico con periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{dz}{dg}}$$

Si vede che la sensibilità è direttamente proporzionale al quadrato del periodo.  
Costruttivamente è difficile ottenere  $T > 1s$ .



$$L = 1 \text{ m}$$

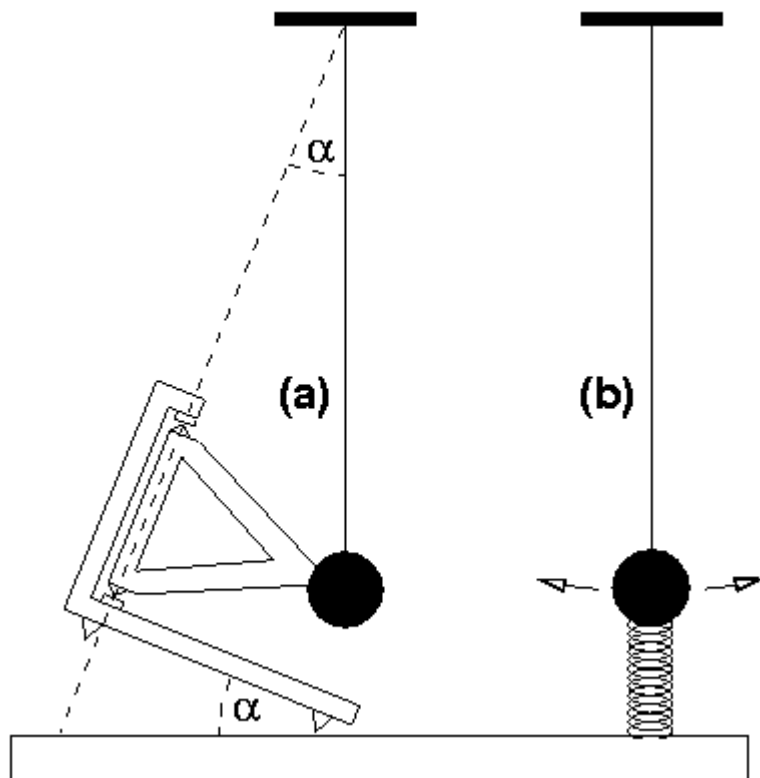
$$T = 2 \text{ s}$$

$$L = 100 \text{ m}$$

$$T = 20 \text{ s}$$



## Astatizzazione Sospensione garden-gate



Equivalenza tra un pendolo inclinato "cancello del giardino" e un pendolo a corda. Per un periodo libero di 20 sec, il pendolo a corda deve essere lungo 100 m. L'angolo di inclinazione  $\alpha$  di un garden-gate il pendolo con lo stesso periodo libero e una lunghezza di 30 cm è di circa  $0,2^\circ$ . Più è lungo è il periodo considerato, meno stabile sarà sotto l'influenza di piccoli cambiamenti di inclinazione. (b) Allungamento del periodo con una molla compressa ausiliaria.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\ell / g \sin \alpha}$$

$$T_0 = 20$$

$$l = 30 \text{ cm}$$

$$\alpha = 0.2^\circ$$



Il principio è quello del dinamometro. Consideriamo una massa  $m$  sospesa ad una molla con costante  $k$ . Nelle condizioni di equilibrio avremo:

$$mg = kz_0$$

Se la gravità varia, sarà:

$$mdg = kdz$$

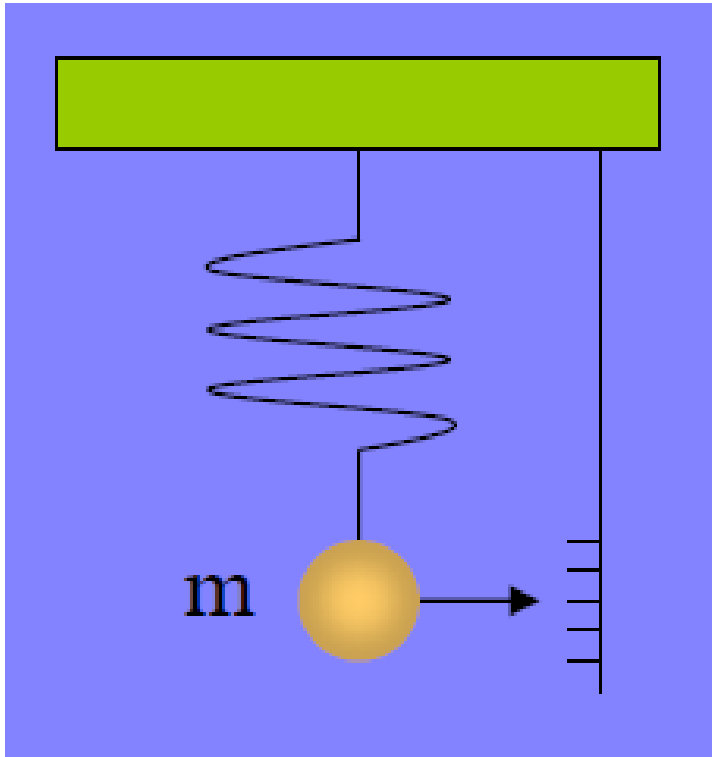
da cui:

$$\frac{dz}{dg} = \frac{m}{k}$$

Il rapporto è la sensibilità dello strumento. Spostando la massa dalle condizioni di equilibrio ed applicando la legge di Newton si ottiene:

$$mg - kz = m \frac{d^2(z - z_0)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2(z - z_0)}{dt^2} + \frac{k}{m}(z - z_0) = 0$$



## ASTATIZZAZIONE

La massa è sostenuta da un braccio rigido di lunghezza  $b$  girevole intorno ad un asse  $O$ . Avremo pertanto equilibrio di momenti. Nella posizione di equilibrio sarà nullo il momento delle forze applicate  $M(\varphi, g(\varphi))$

$$M(\varphi_0) = 0$$

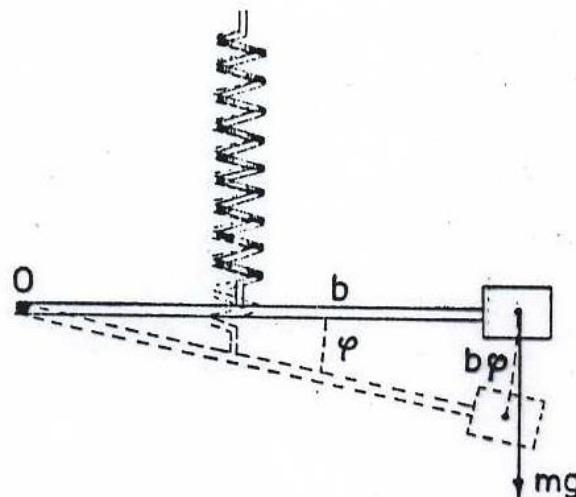
Derivando:

$$\frac{\delta M}{\delta \varphi} d\varphi + \frac{\delta M}{\delta g} dg = 0$$

Si ottiene:

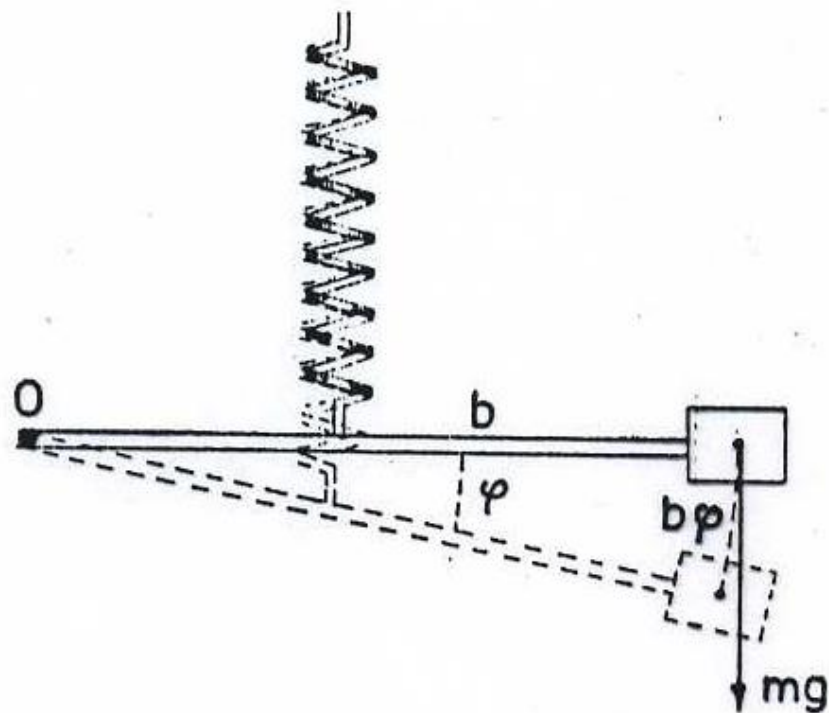
$$\frac{d\varphi}{dg} = - \frac{\delta M / \delta g}{\delta M / \delta \varphi}$$

**Sensibilità**



Il momento totale è dato dalla componente stabilizzante (elastica) e quella labilizzante (gravitazionale)

$$M = M_e - M_g$$



Per piccoli valori di  $Mg = mgb \cos\varphi \approx mgb$  ed avremo  $\frac{\delta Mg}{\delta g} = mb$  mentre  $\frac{\delta Me}{\delta g} = 0$  perché  $Me$  non dipende esplicitamente da  $g$ . Quindi sarà:

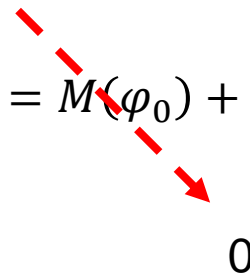
$$d\varphi = - \frac{-mb}{\delta M / \delta \varphi} dg$$

Per uno spostamento infinitesimo della massa conseguente ad una rotazione  $d\varphi$  si avrà:

$$ds = bd\varphi = \frac{mb^2}{\delta M / \delta \varphi} dg$$

Spostando la massa dal punto di equilibrio  $\varphi_0$  essa si metterà ad oscillare attorno al punto  $\varphi_0$ . Per il principio di d'Alembert, l'equazione del moto si otterrà eguagliando i momenti delle forze applicate a quelli delle forze di inerzia.

Il momento delle forze applicate attorno al punto di equilibrio ( $\varphi$  piccolo e  $g$  costante) si può scrivere:

$$M(\varphi) = M(\varphi_0) + \left( \frac{\delta M}{\delta \varphi} \right)_0 \varphi + \dots$$


Mentre il momento delle forze di inerzia, essendo l'accelerazione tangenziale  $b\ddot{\varphi}$ , sarà dato da:

$$M_i = b \cdot m a_t = m b^2 \ddot{\varphi}$$

Da cui si ricava che l'equazione del moto sarà

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_0}{m b^2} \varphi = 0$$

Che da ancora un moto armonico di periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m b^2}{\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_0}}$$

Pertanto anche in questo caso la sensibilità è proporzionale al quadrato del periodo.

Per ottenere periodi grandi e sensibilità elevate basterà realizzare:

$$\left(\frac{\delta M}{\delta \varphi}\right)_0 \cong 0$$

Il procedimento di rendere  $\left(\frac{\delta M}{\delta \varphi}\right)_0 \cong 0$  viene detto astatizzazione e può essere realizzato in vari modi

Per avere:

$$\frac{\delta M}{\delta \varphi} = \frac{\delta M_e}{\delta \varphi} = \frac{\delta M_g}{\delta \varphi} \approx 0$$

Si può procedere in due modi.



1

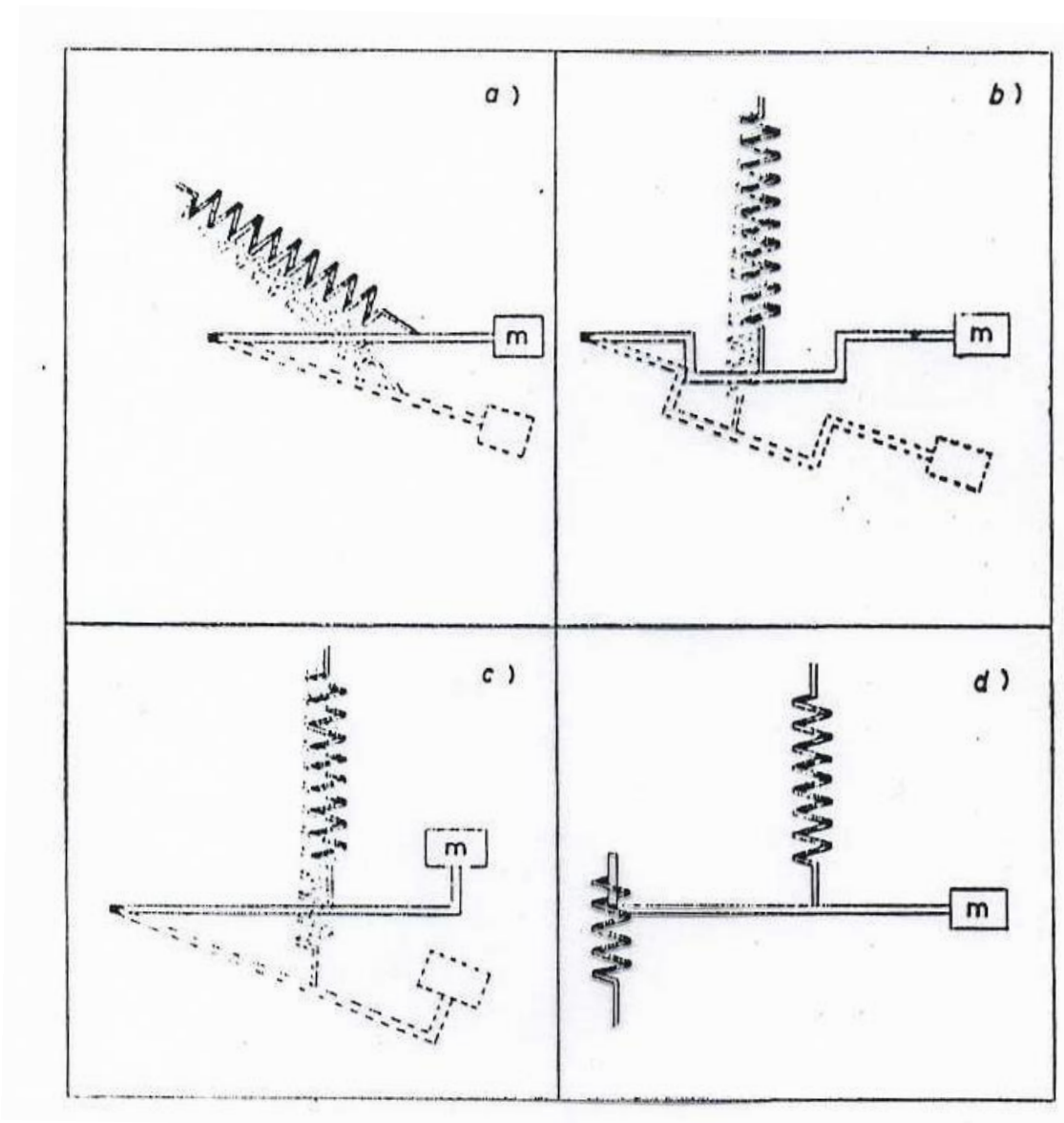
Rendere  $M_g$  indipendente da  $\varphi$  (per cui  $\delta M_g / \delta M_\varphi \approx 0$ ) e realizzare le condizioni geometriche del sistema in modo che sia  $\delta M_e / \delta M_\varphi \approx 0$

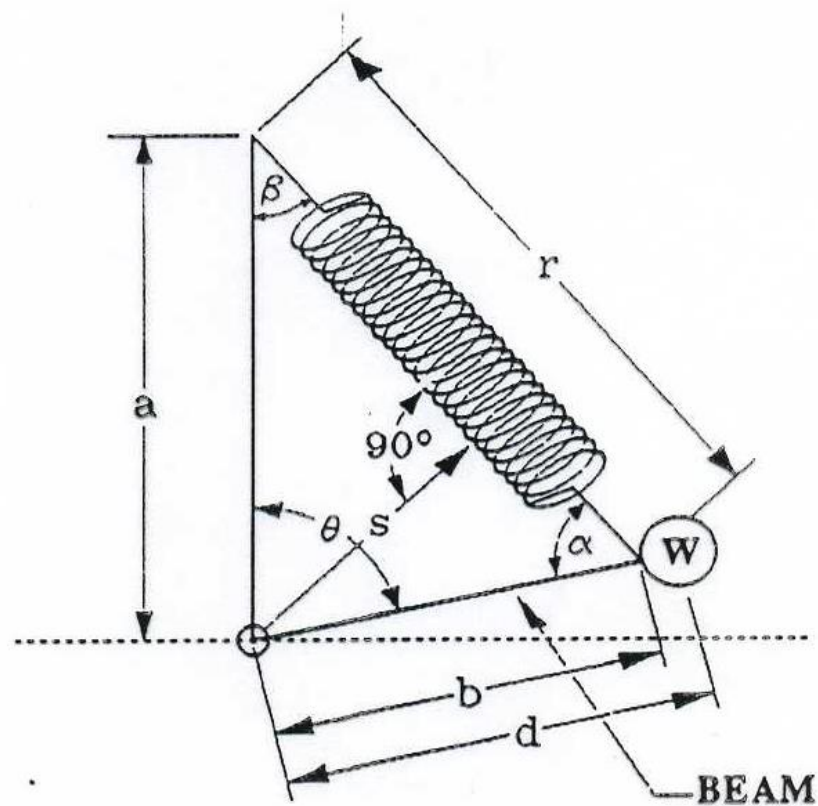
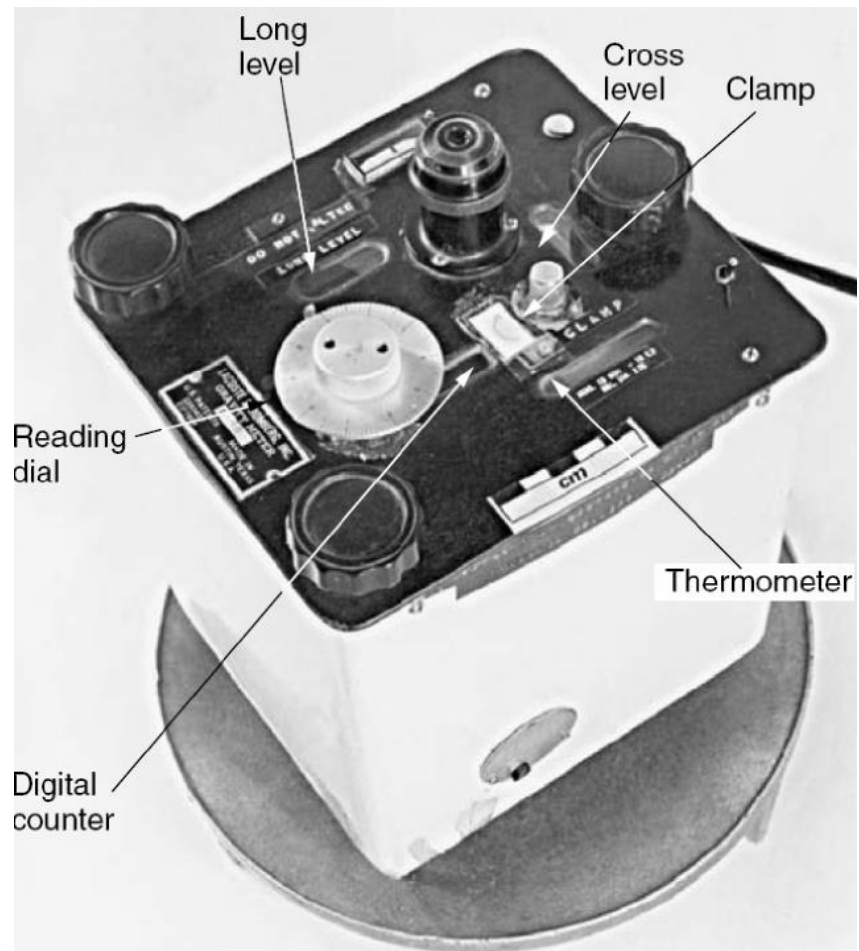
- a) Lunghezza molla varia di pochissimo
- b) Aumenta la tensione, ma diminuisce il braccio

2

Rendere  $\frac{\delta M_e}{\delta \varphi} \approx \frac{\delta M_g}{\delta \varphi}$

- a) Aumentare  $M_e$ , ma aumentare pure  $M_g$
- b) Ad un aumento di  $M_e$  si oppone un momento contrario dovuto ad un'altra molla





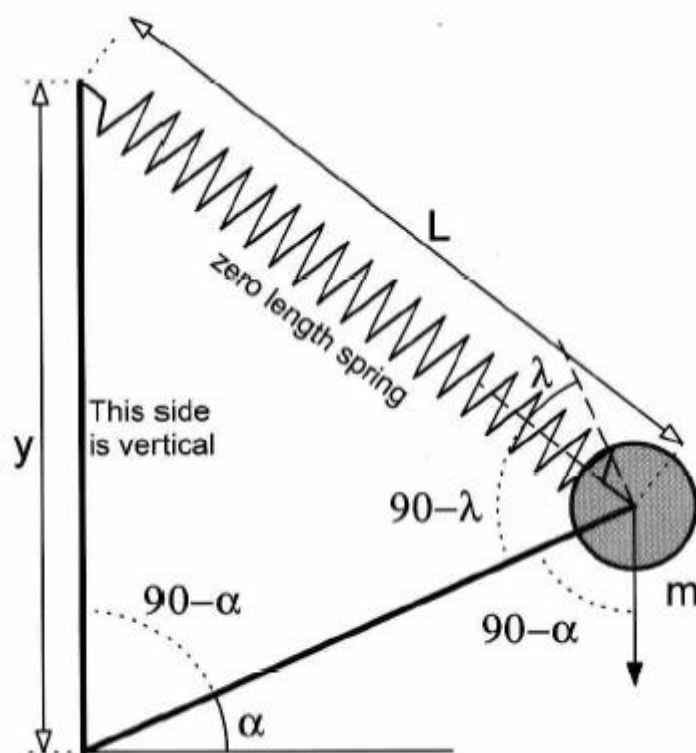
$$M \ddot{z}(t) + R \dot{z}(t) + S z(t) = f(t) - M \ddot{x}(t)$$

A lunghi periodi ed in assenza di forze esterne:

$$S z = -M \ddot{x}$$

Per uno spostamento relativo  $-\Delta z$  della massa:

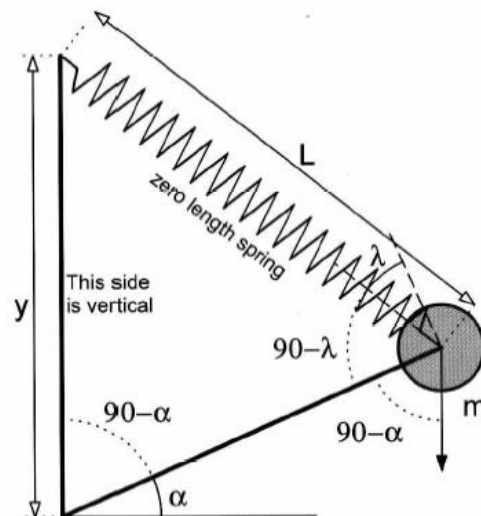
$$\ddot{x} = (S / M) \Delta z = \omega_0^2 \Delta z = (2\pi / T_0)^2 \Delta z$$



**Figure 2.16** The principle behind the LaCoste suspension. The mass  $m$  is sitting on a hinge, which has an angle  $\alpha$  with the horizontal and suspended by a spring of length  $L$ .

$$F = k \cdot L,$$

$$F = k \cdot \Delta L,$$



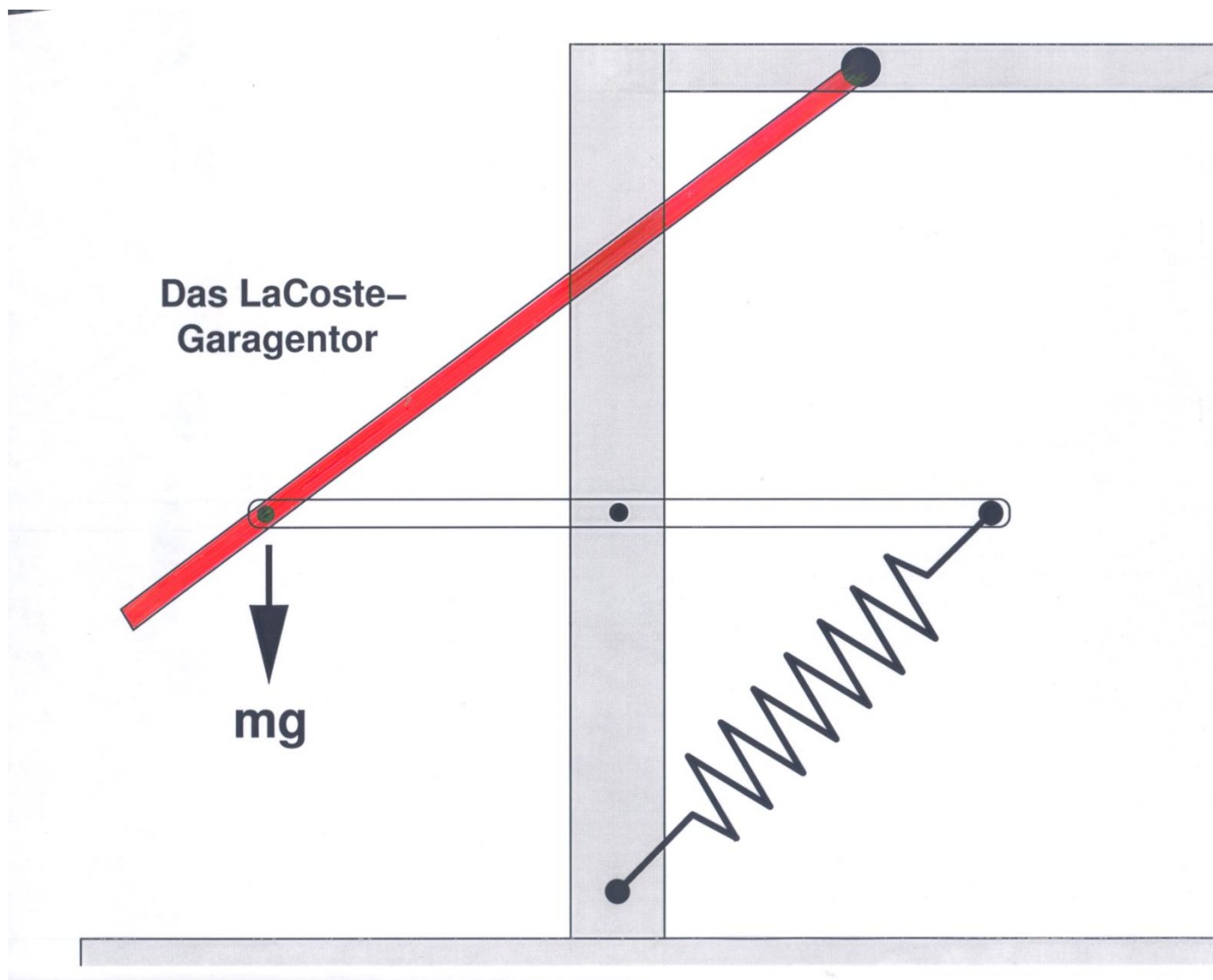
**Figure 2.16** The principle behind the LaCoste suspension. The mass  $m$  is sitting on a hinge, which has an angle  $\alpha$  with the horizontal and suspended by a spring of length  $L$ .

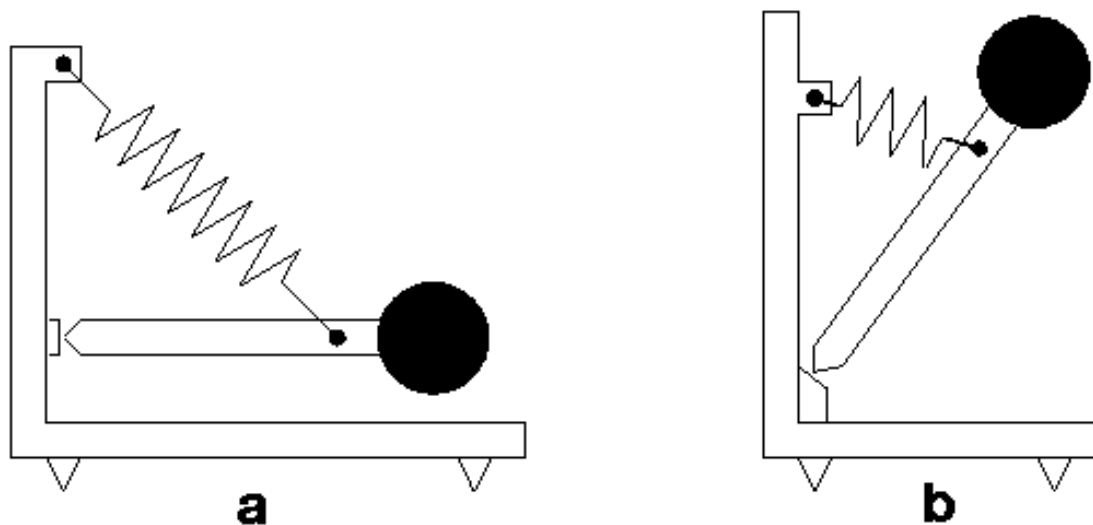
$$F_g = mg \cos(\alpha)$$

$$F_s = kL \cos(\lambda)$$

$$\frac{L}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{y}{\sin(90 - \lambda)} \quad \text{or} \quad \cos(\lambda) = \frac{y}{L} \cos(\alpha)$$

$$ky = mg \quad \text{or} \quad y = mg/k$$

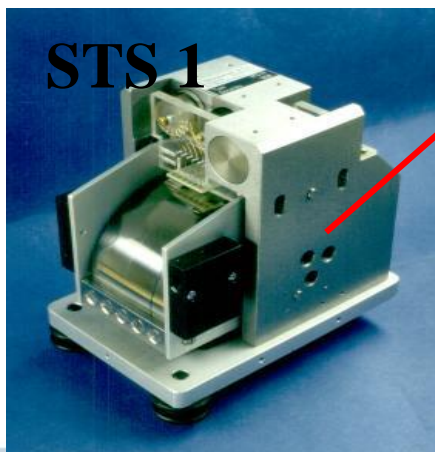
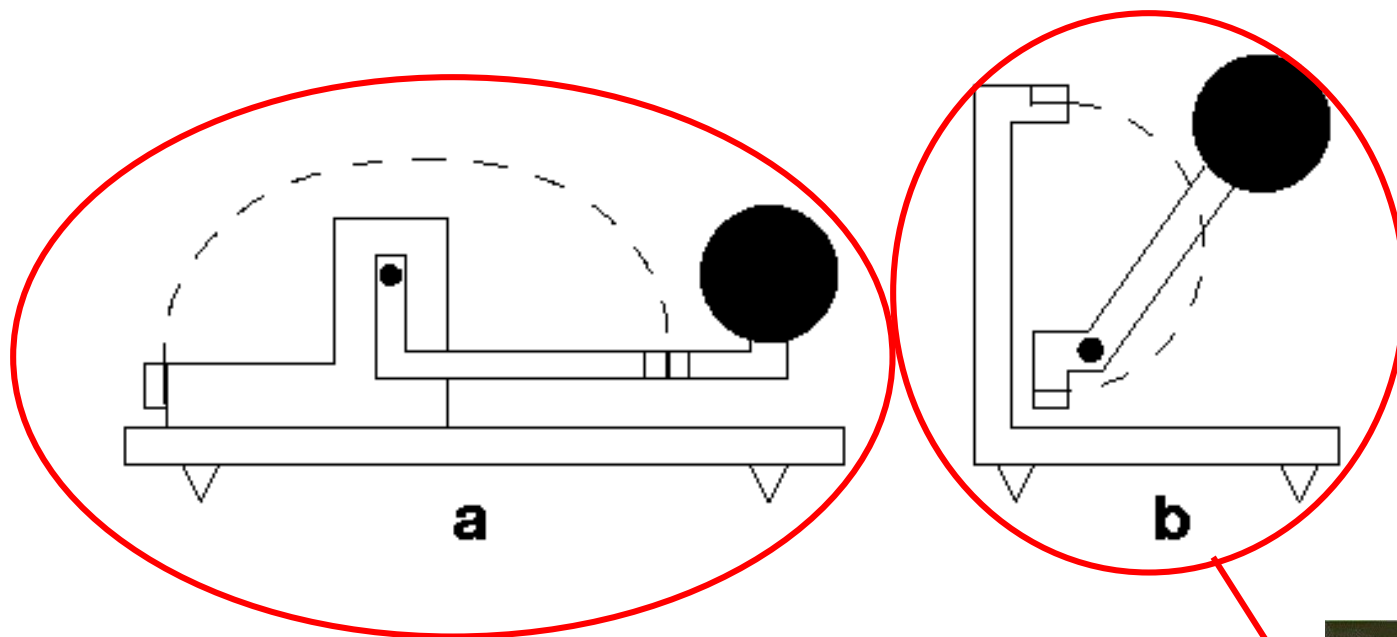




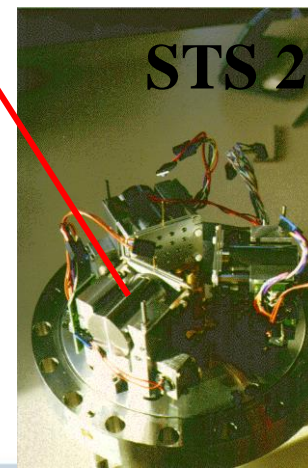
## Sospensione La Coste

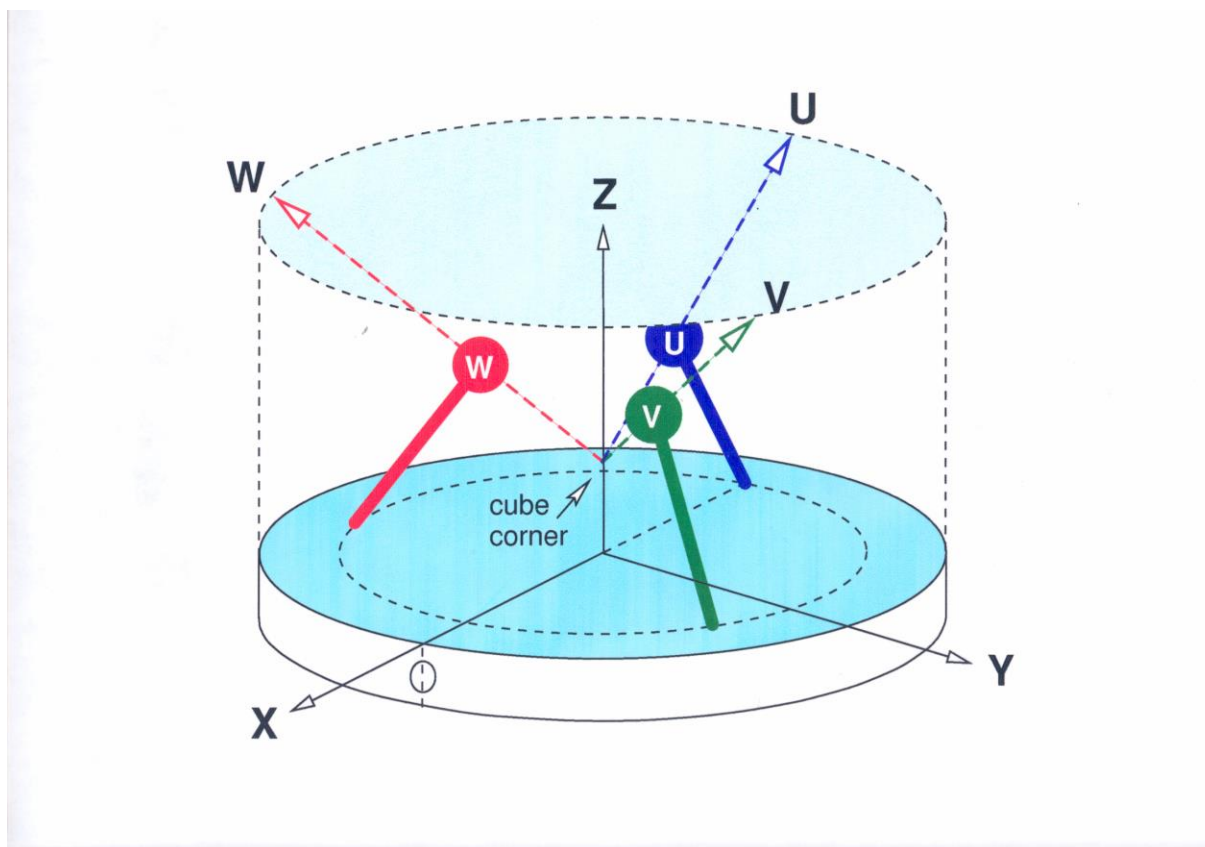
- **verticale**
- **orizzontale**





- a) Wielandt
- b) Streckeisen

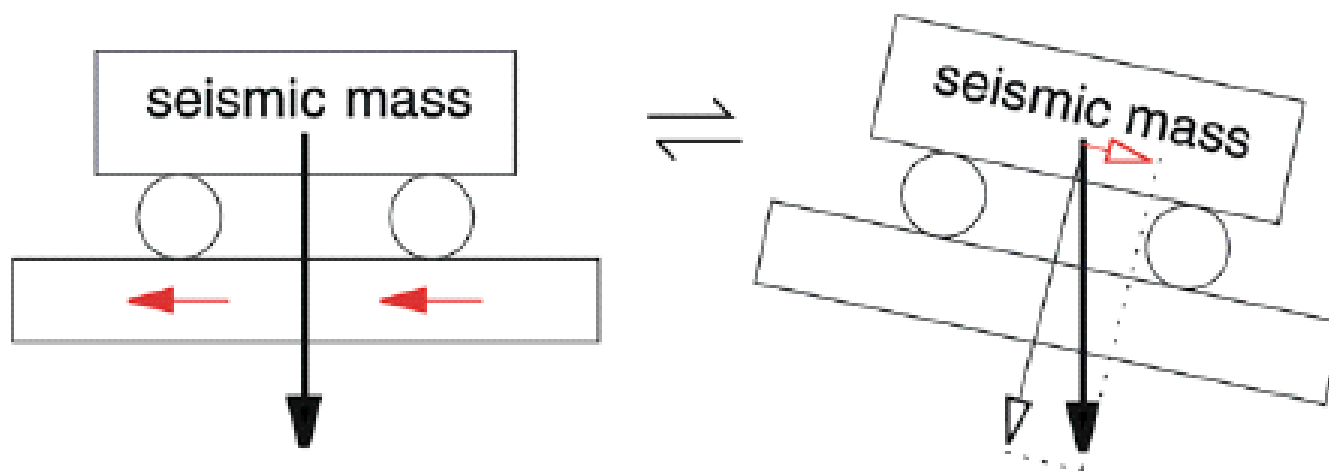




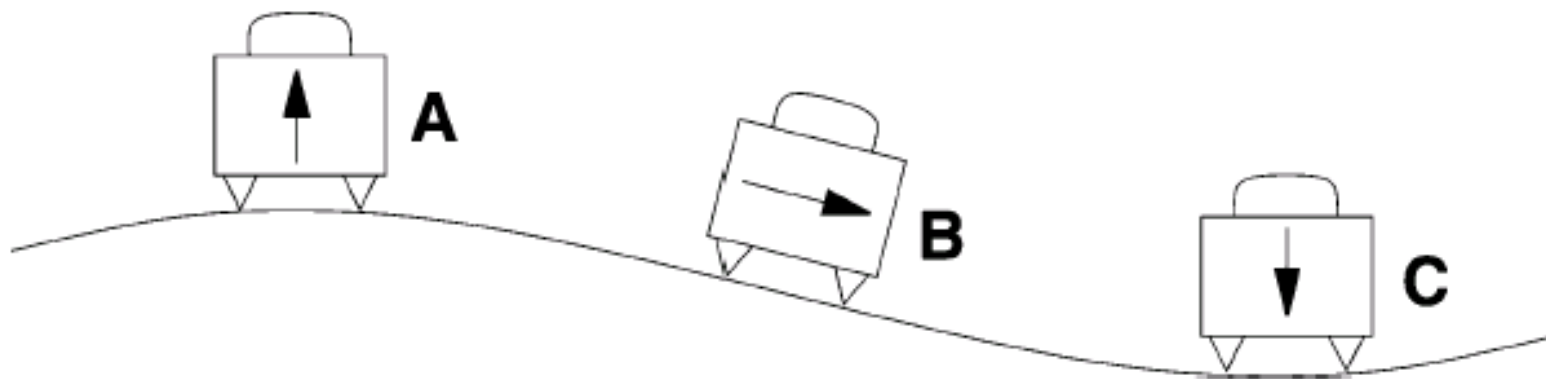
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$$



Un'accelerazione sismica del terreno ha lo stesso effetto sulla massa sismica di una forza esterna. La più grande tra tali forze è la gravità. È normalmente annullato dalla sospensione, ma quando il sismometro è inclinato, la proiezione del vettore gravità sull'asse della sensibilità cambia, producendo una forza che nella maggior parte dei casi non è distinguibile da un segnale sismico. L'inclinazione indesiderata alle frequenze sismiche può essere causato da carichi in superficie variabili come auto, persone o pressione atmosferica. I disturbi risultanti sono un effetto di secondo ordine nei sismometri verticali ben installati ma per il resto sono un effetto del primo ordine. Questo spiega perché le tracce sismiche orizzontali a lungo periodo sono sempre più rumorose di quelle verticali. Un tilt breve e impulsivo equivale a uno step della velocità del suolo e pertanto causerà un transiente di lungo periodo in un sismometro orizzontale a banda larga. Per segnali periodici, lo spostamento orizzontale apparente associato a una data inclinazione aumenta con il quadrato del periodo



$\pm 1\mu m$        $3km$        $T = 10min$

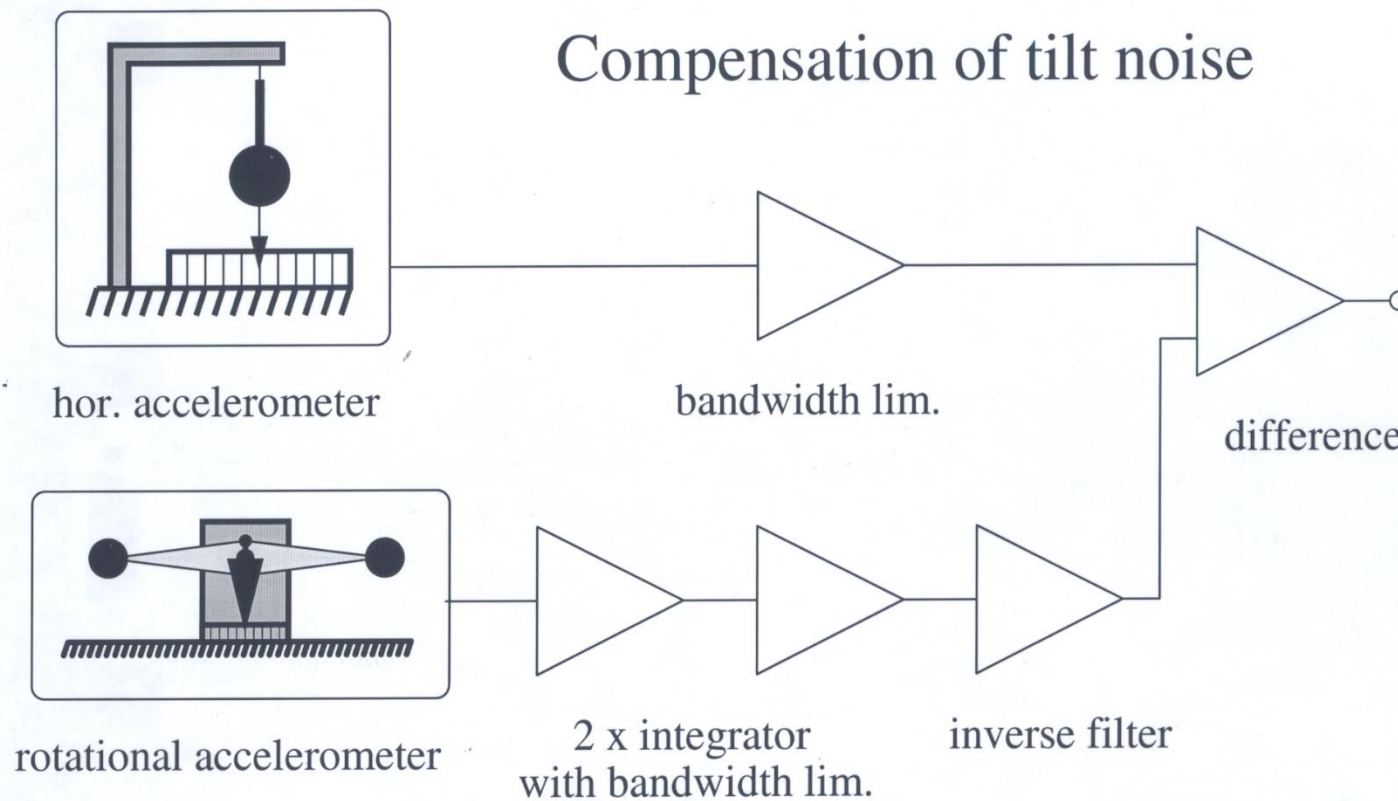


**A e C**       $\pm 10^{-10} m/s^2$       **B**       $\pm 10^{-8} m/s^2$

L'inclinazione del terreno causata dalla pressione atmosferica è la fonte principale di un periodo molto lungo rumore sui sismografi orizzontali.



## Compensation of tilt noise



Another integration is required for a VBB output!

