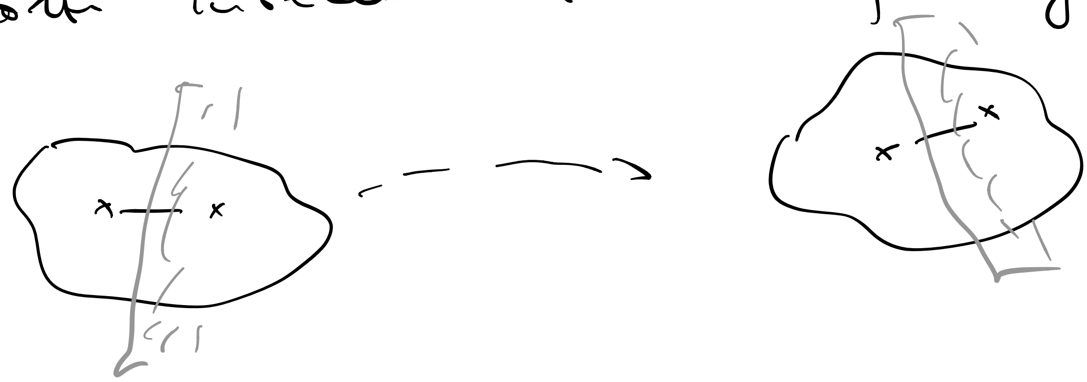
MECCANICA RAZIONALE

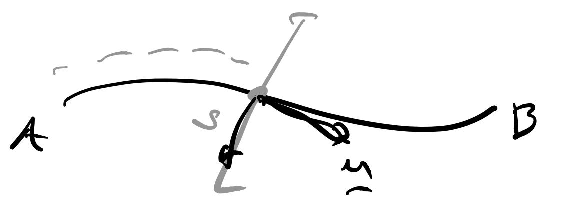
Ing. Civile & Ambientale
Navale

30 marzo 2021

Sforzi interni ad un corpo rigido.



→ E.C.S. (eq. di bilancio)



→ $N(s) \to \underline{u}$

$\underline{T}(s) = T(s)\, \underline{\tau}$

$\underline{M}_f(s) = M_f(s)\, \underline{e}_3$

$\underline{\tau} = \underline{u} \wedge \underline{e}_3$

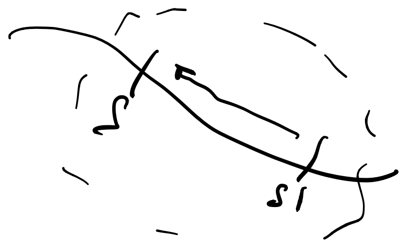
→ capire la geometria del rigido

↳ $\underline{u} = \frac{d\underline{x}}{ds}$, $\underline{\tau}$

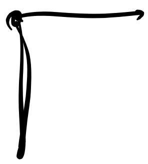
Relazioni differenziali: $\frac{d}{ds}\left(N\underline{u} + \underline{T}\right) = -\underline{f}(s)$

e $\quad \frac{d}{ds} M_f(s) = \underline{T}(s) \wedge \underline{u}(s)$

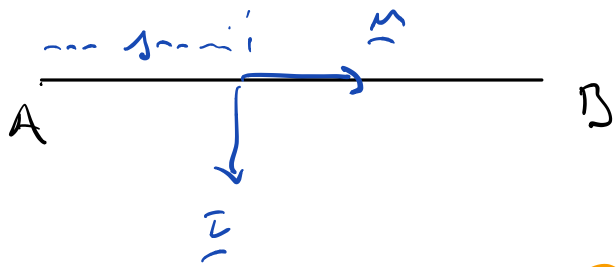
Vengono



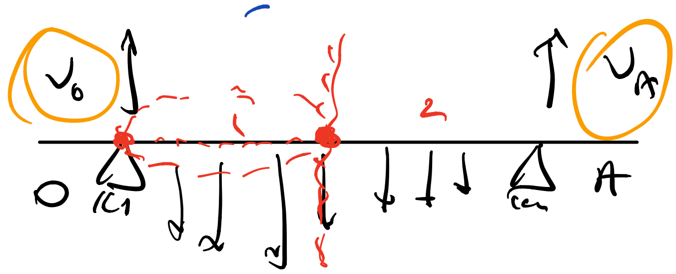
Forze concentrate $\longrightarrow$ $N, \underline{T}$ possono avere discontinuità, $\frac{dM_f}{ds}$ può avere discontinuità.



Asse :



Esempio



$\underline{f}(s) = \rho(s)\, \underline{g}$

a) Calcolare le reazioni vincolari.

Per utilizzare le eq. di bilancio dobbiamo conoscere le forze esterne.

ECS $\longrightarrow$ reazioni vincolari

$\underline{M}, \underline{R} \longrightarrow$ $V_0 = Mg\left(1 - \frac{s_G}{L}\right)$

$V_A = Mg - V_0$

Per le ECS: forza peso: agisce nel centro di massa

•) $N\underline{u} + T\underline{e} - V_0\underline{\tau} + m(s)\,g\,\underline{\tau} = \underline{0}$

$$m(s) = \int_0^s \rho(x)\,dx$$

forza peso $\longrightarrow$ distribuita.

$N = 0$
$T = V_0 - m(s)\,g$

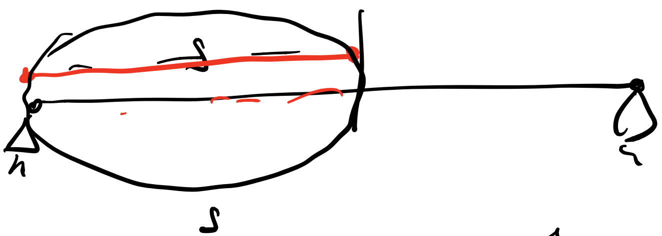
$$M_f(s) = \int_0^s T(x)\,dx$$

$$\rho(s) = \begin{cases} 0 & 0 < s < \frac{L}{2}\left(1 - \frac{1}{L}\right) \\ \mu\frac{M}{L} & \\ 0 & \end{cases}$$

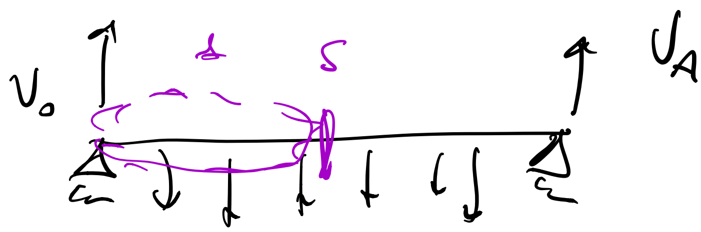
$$0 < s < \frac{L}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$m(s) = \begin{cases} 0 \\ n\, M[\,\ldots\,] \\ M \end{cases}$$

$$m(s) = \int_0^s \rho(x)\,dx$$



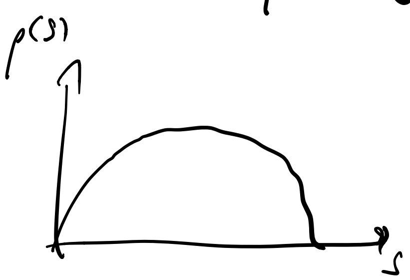
<u>Esercizio</u>



$$\cdot \quad \rho(s) = 6\,\frac{M}{L}\,\frac{s}{L}\left(1-\frac{s}{L}\right)$$

$N = 0$

$T = V_0 - m(s)\,g \qquad m(s) = \int_0^s \rho(x)\,dx$



simmetrico rispetto a $\frac{L}{2}$

$\longrightarrow \quad s_G = \frac{L}{2}$

$$s_G = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\rho(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^L 6\,\frac{M}{L}\left[\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right] dx$$

$$M = \int_0^L \rho(x)\,dx = 6\frac{M}{L^2}\left(\frac{L^2}{2}\right) - 6\frac{M}{L^3}\left(\frac{L^3}{3}\right)$$

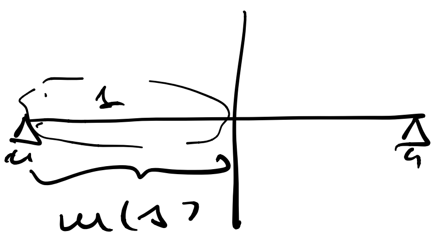
$$= 3M - 2M = M$$

Reazioni vincolari $\longrightarrow$ identiche che nel caso omogeneo di densità $\frac{M}{L}$

Sforzi interni

$$m(s) = \int_0^s \rho(x)\,dx = \int_0^s 6\frac{M}{L}\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)dx$$

$$= 3M\frac{s^2}{L^2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{s}{L}\right)$$



$$T(s) = \frac{Mg}{2} - m(s)\,g = \frac{Mg}{2}\left(\frac{1}{2} - 3\frac{s^2}{L^2} + 2\frac{s^3}{L^3}\right)$$

$$\widetilde{V_0}$$

$$M_f(s) = MgL\left(\frac{1}{2}\frac{s}{L} - \frac{s^3}{L^3} + \frac{1}{2}\frac{s^4}{L^4}\right)$$

- $\rho(s) = 3\frac{M}{L}\left(\frac{s}{L}\right)^2$

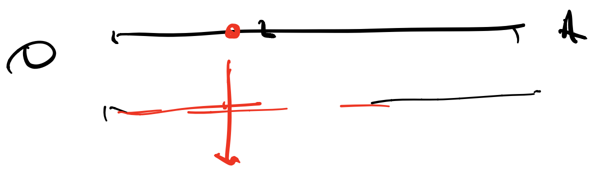
Massa Totale $M = \int_0^L 3 \frac{M}{L^3} x^2 \, dx$

$$= 3 \frac{M}{L^3} \frac{1}{3} L^3 = M$$

$$s_G = \frac{\int_0^L 3 \frac{M}{L^3} x^3 \, dx}{M} = \frac{3 \frac{M}{L^3} \frac{1}{4} L^4}{M} = \frac{3}{4} L$$

Reazioni vincolari

$$\underline{M}^e(A) = \underline{0} \implies V_0 L = Mg(L - s_G)$$



$$V_0 = \frac{Mg}{4}$$

$$V_A = Mg - V_0 = \frac{3}{4} Mg$$

$$m(s) = \int_0^s \rho(x) \, dx = \int_0^s 3 \frac{M}{L^3} x^2 \, dx$$

$$= 3 \frac{M}{L^3} \frac{1}{3} s^3 = \frac{M}{L^3} s^3$$

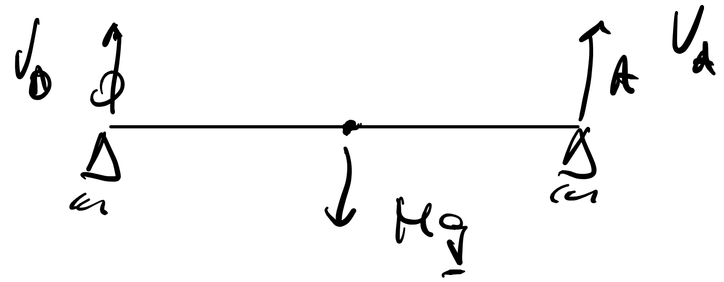
$$T(s) = V_0 - m(s) g =$$

$$= \frac{Mg}{4} - Mg \frac{s^3}{L^3}$$

$$M_f(s) = \frac{Mg}{4} s \left(1 - \frac{s^3}{L^3}\right)$$

Seconda parte

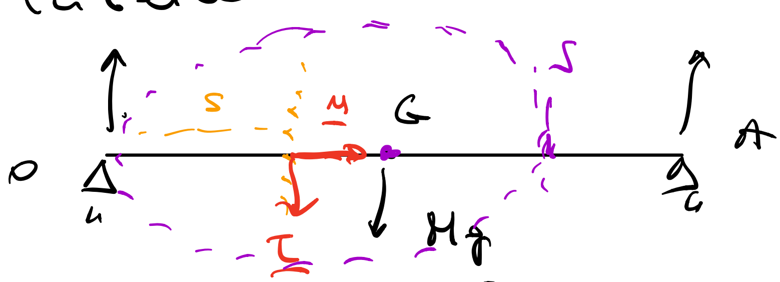
Aste



Carico concentrato in $\frac{L}{2}$ e pari a $M\underline{g}$

Le reazioni esterne sono uguali al caso $p = \frac{M}{L}$: $V_o = V_A = \frac{Mg}{2}$

Sforzi interni



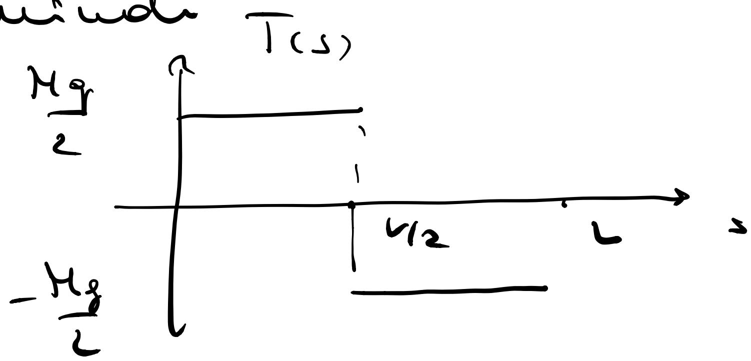
$s \in OG$ (prima del punto di applicazione del carico concentrato)

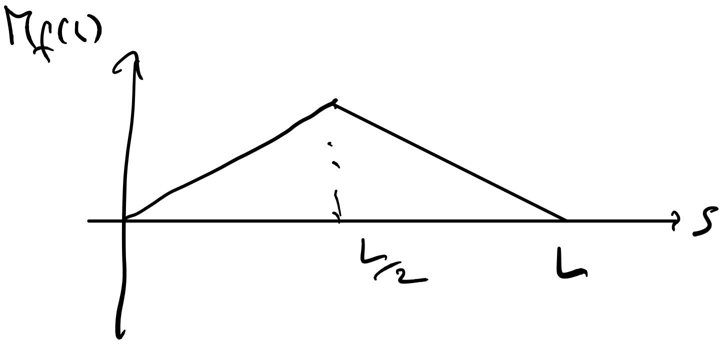
$$N\underline{u} + T\underline{\tau} - V_o\underline{\tau} = 0 \qquad \begin{cases} N = 0 \\ T = \frac{Mg}{2} \end{cases}$$

$s \in GA$ (dopo il punto di applicazione)

$$N\underline{u} + T\underline{\tau} - V_o\underline{\tau} + Mg\,\underline{\tau} = 0 \qquad \begin{cases} N = 0 \\ T = -\frac{Mg}{2} \end{cases}$$

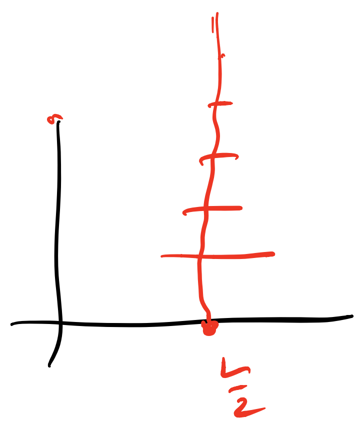
Quindi



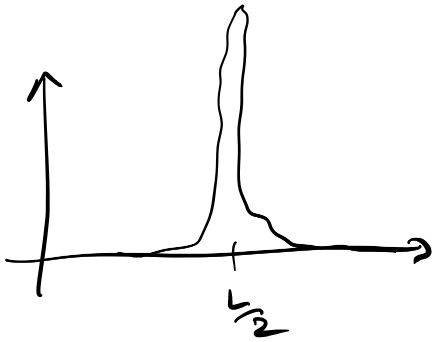


$$M_f(s) = \begin{cases} \frac{Mg}{2} s & 0 < s < \frac{L}{2} \\ \frac{Mg}{2} s - Mg\left(s - \frac{L}{2}\right) & \frac{L}{2} < s < L \end{cases}$$

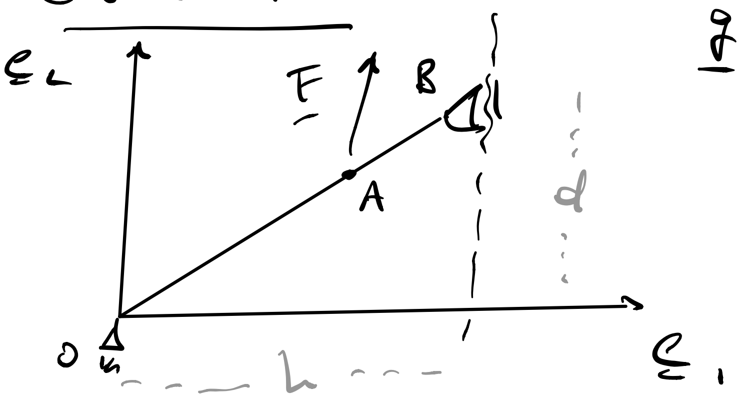
Intuitivamente: questi sforzi interni sono il limite per $n \to \infty$ di quelli del carico distribuito simmetricamente intorno a G



$n \to \infty$



Esercizio

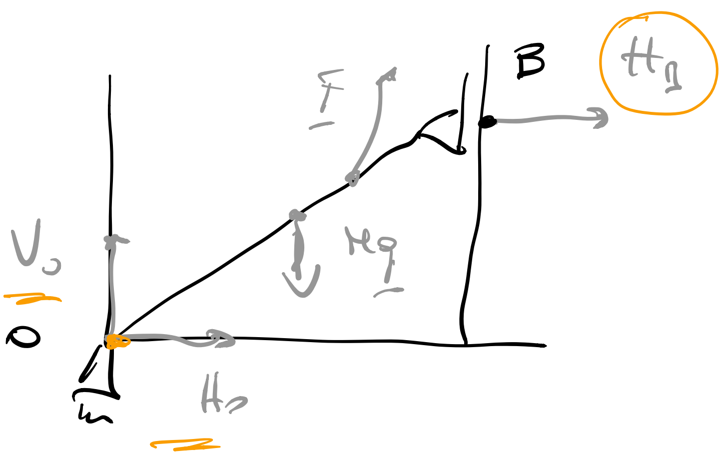


Piano verticale
asta OB, massa M
e densità $\rho(s)$

$OB = L$

$AB = \underline{a} L \qquad 0 < a < 1$

Calcolare
- reazioni in B
- sforzi interni



$\underline{F} = F_1 \underline{e}_1 + F_2 \underline{e}_2$

$$L = \sqrt{d^2 + h^2}$$

Vogliamo H_B

eq $\underline{M}^e(O) = \underline{0}$

$$(\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge (H_B \underline{e}_1) + (\underline{x}_A - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}$$

$$+ (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge (-Mg\, \underline{e}_2) = \underline{0}$$

$$(h\,\underline{e}_1 + d\,\underline{e}_2) \wedge H_B\,\underline{e}_1 + \big((h - ah)\,\underline{e}_1 +$$

$$+ (d - ad)\,\underline{e}_2\big] \wedge (F_1\,\underline{e}_1 + F_2\,\underline{e}_2) +$$

$$- \left(\overline{OG}\,\frac{h}{L}\,\underline{e}_1 + \cdots\,\underline{e}_2\right) \wedge (M g\,\underline{e}_2) = 0$$

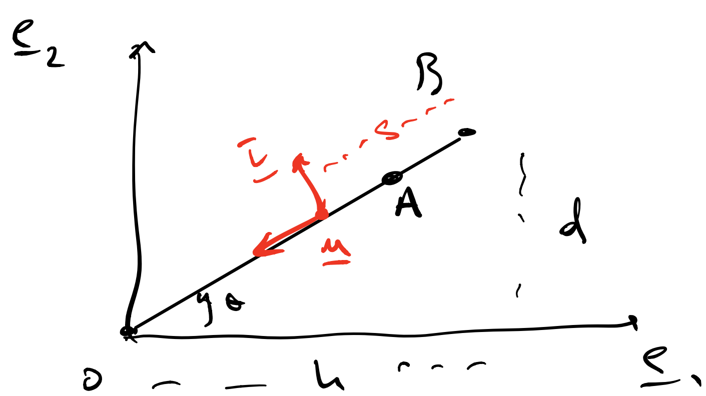
$$- d\,H_B - F_1\,(d - ad) + F_2\,(h - ah)$$

$$- M g\,\overline{OG}\,\frac{h}{L} = 0$$

$$\Rightarrow \quad H_B = -(1-a)\,F_1 + (1-a)\,\frac{h}{d}\,F_2 +$$

$$- \overline{OG}\,\frac{h}{L}\,\frac{1}{d}\,M g$$

- Sforzi interni : misuriamo la sezione a partire da B



$$\underline{\mu} = -\frac{h}{L}\,\underline{e}_1 + - \frac{d}{L}\,\underline{e}_2$$

$$h = L\cos\theta$$

Calcoliamo $\underline{\tau} = \underline{\mu} \wedge \underline{e}_3 = \frac{h}{L}\,\underline{e}_2 - \frac{d}{L}\,\underline{e}_1$

Eq di blocco $\to$ $0 < s < aL$

$aL < s < L$

Primo caso: $0 < s < aL$

$$N \underline{n} + T \underline{\tau} - m(s) g \underline{e}_2 + H_B \underline{e}_1 = \underline{0}$$

$$m(s) = \int_0^s \rho(x)\, dx$$ è nota dalla densità

Allora

moltiplico $\cdot \underline{n}$

$$N - m(s) g \underline{e}_2 \cdot \underline{n} + H_B \underline{e}_1 \cdot \underline{n} = 0$$

$$\to N = m(s) g \underline{e}_2 \cdot \underline{n} - H_B \underline{e}_1 \cdot \underline{n} =: N^-(s)$$

moltiplico per $\underline{\tau}$

$$T = m(s) g \underline{e}_2 \cdot \underline{\tau} - H_B \underline{e}_1 \cdot \underline{\tau} =: T^-(s)$$

Quando $aL < s < L$

$$\underbrace{N \underline{n} + T \underline{\tau} - m(s) g \underline{e}_2 + H_B \underline{e}_1}_{\text{la stessa di prima}} + \underline{F} = \underline{0}$$

$$N^+(s) = N^-(s) - \underline{F} \cdot \underline{n}$$

$$T^+(s) = T^-(s) - \underline{F} \cdot \underline{\tau}$$

Possiamo vedere come relazioni di discontinuità

Esplicitamente:

$$N(s) = \begin{cases} N^-(s) = -\frac{d}{L} m(s) g + \frac{h}{L} H_B & 0<s<aL \\ N^+(s) = N^-(s) - \left(-\frac{h}{L} F_1 - \frac{d}{L} F_2\right) & aL<s<L \end{cases}$$

Allo stesso modo

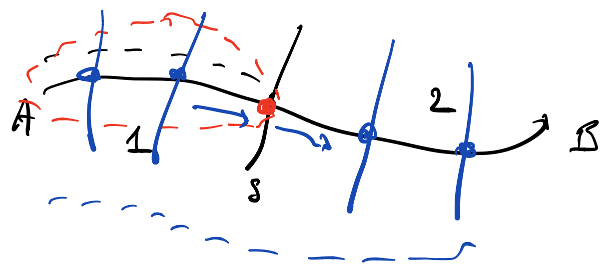
$$T(s) = \begin{cases} T^-(s) = \frac{h}{L} m(s) g - \frac{d}{L} H_B & 0<s<aL \\ T^+(s) = T^-(s) - \left(-\frac{d}{L} F_1 + \frac{h}{L} F_2\right) & aL<s<L \end{cases}$$

$$M_f(s) = \begin{cases} \int_0^s T^-(x)\, dx & 0<s<aL \\ \int_0^{aL} T^-(x)\, dx + \int_{aL}^{s} T^+(x)\, dx & aL<s<L \end{cases}$$

Terza parte

Abbiamo visto $\rightarrow$ sforzi interni ad un rigido.

Rigido piano $\rightarrow$ $N(s)$, $T(s)$, $M_f(s)$



Troviamo funzioni di s

Cenni alla statica dei continui deformabili

Problema molto difficile $\rightarrow$ versione semplificata.

Modello matematico

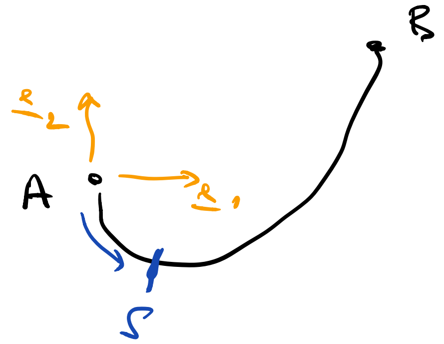
- geometria del continuo $\Rightarrow$ consideriamo un continuo 1-D deformabile come una curva
- forze agenti $\rightarrow$ come per i rigidi
- struttura meccanica del materiale in esame

$\Rightarrow$ equazioni costitutive del materiale

Metodi

- eq. di bilancio delle forze per ogni porzione del mezzo
- metodi variazionali (non vedremo)

Esempio : Catena



$\downarrow \underline{g}$

Configurazione di equilibrio

Peso specifico : $\rho(s)\,\underline{g}$. L lunghezza della catena

Configurazione generica : qualsiasi curva regolare di estremi A e B fissati e lunghezza L (inestendibile)

Parametro $\longrightarrow$ parametro d'arco s (perché inestendibile)

Vogliamo la configurazione di eq.

$\rightarrow$ eq. di bilancio su un tratto

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}(N\underline{u}+\underline{T}) = -\rho\,\underline{g} \\[2ex] \dfrac{d}{ds}\underline{M}_f = \underline{T}\wedge\underline{u} \end{cases}$$

relazioni differenziali

La curva è

$x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in [0, L]$,

$x(0) = x_A = 0$
$y(0) = y_A = 0$
$x(L) = x_B$
$y(L) = y_B$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad \left(\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \right)$$

Tangente $\underline{u} = \dfrac{dx}{ds}\underline{e}_1 + \dfrac{dy}{ds}\underline{e}_2 = \dfrac{d}{ds}\underline{x}$

$\underline{x} = (x, y)$

<u>Equazioni costitutive</u> : la catena è un filo flessibile → non ha sforzo di taglio o momento flettente

Invece c'è una tensione (= sforzo normale positivo)

Quindi

$$\begin{cases} \underline{T} = \underline{0} \\ \underline{M}_f = \underline{0} \\ N > 0 \end{cases}$$

equazioni costitutive del materiale

Allora troviamo

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(N\underline{u} + \underline{T}) = -\rho \underline{g} \\ \frac{d}{ds}\underline{M}_f = \underline{T} \wedge \underline{u} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{ds}(N\underline{u}) = -\rho \underline{g}}$$

$$\underline{u} = \frac{d}{ds}\underline{x}$$

Le riscriviamo come:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\left(N \frac{dx}{ds}\right) = 0 & \text{lungo } \underline{e}_1 \\ \frac{d}{ds}\left(N \frac{dy}{ds}\right) = \rho g & \text{lungo } \underline{e}_2 \end{cases}$$

Dobbiamo trovare $x(s)$, $y(s)$, $N(s) > 0$ tali che siano soddisfatte le condizioni al contorno.

Sforzi sui vincoli

$$\underline{F}_A^z = -N(0)\,\frac{dz}{ds}\Big|_{s=0}$$

$$\underline{F}_B^z = N(L)\,\frac{dz}{ds}\Big|_{s=0}$$

La soluzione è data da una curva chiamata catenaria:

$$y(x) = b + a\cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right)$$

dove a, b, x_0 sono dei parametri determinati imponendo

$$y(0) = 0$$

$$y(x_B) = y_B$$

e $$L = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$ lunghezza della catena

Sforzi interni ad un rigido $\longrightarrow$ continui deformabili

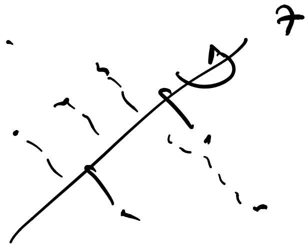
TRASFORMAZIONE DI INERZIA

Se abbiamo punti materiali

Momento di inerzia → misura

l' inerzia di un corpo al variare

della velocità angolare



$$\boxed{I_z = \sum_i m_i r_i^2}$$

↑ distanza² dall'asse

momento angolare

$$L_z = \sum_i m_i r_i v_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega$$

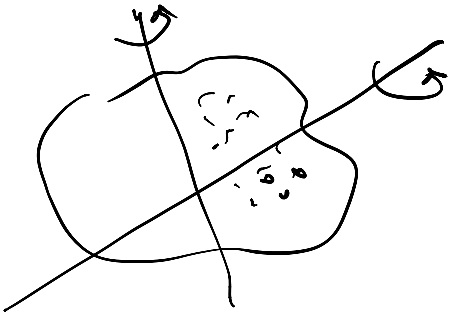
$$= \omega I_z$$

Energia

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2$$

$$= \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

↑ se I_z è grande, allora serve molta energia per piccole rotazioni



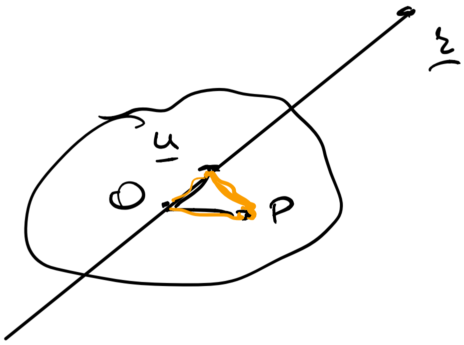
$$I \sim \sum_p m_p r_p^2$$

distribuzione di massa

geometria del rigido

(formulazione discreta

$\iiint \rho(x)\, r^2 \, dx\,dy\,dz$)



$\underline{u}$ = vers $\underline{r}$

distanza P da r

$$\| \underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \|$$

($\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{\underline{ab \sin\theta}}\ \hat{n}$)

Allora $I_r := \sum_{P \in S} m_P \, \| \underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \|^2$

distribuzione di massa

geometria